

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1. BIỆN LUẬN THEO THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K (HÀM SỐ KHÁC)

Câu 1: Cho hai hàm số $y = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15; 20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

Lời giải

ĐS: 85

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} = |x+2| - x + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} - |x+2| + x = m \quad (1).$$

Đặt $g(x) = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} - |x-2| + x$.

Ta có $g'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{|x-2| - (x-2)}{|x-2|} > 0$ với mọi x thuộc các

khoảng sau $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ và $(3; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt nên (C_1) và (C_2) luôn cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt với mọi giá trị của m . Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $(-15; 20)$ nên $m \in \{-14; -13; \dots; 18; 19\}$. Khi đó tổng tất cả các giá trị m là $S = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 85$.

Câu 2: Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1}$ và $y = e^x + 2020 + 3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019; 2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 2692

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} = e^x + 2020 + 3m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - e^x - 2020 = 3m \quad (1).$$

Đặt $g(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - e^x - 2020$.

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - e^x < 0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -1)$,

$(-1; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2017$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+		+
$g(x)$	-2017	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$

tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m \geq -2017 \Leftrightarrow m \geq -\frac{2017}{3} \approx -672,3$.

Do m nguyên thuộc $(-2019; 2020)$ nên $m \in \{-672; -671; \dots; 2019\}$. Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Câu 3: Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y = x - |x+1| + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20; 20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

Lời giải

ĐS: 21

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} = x - |x+1| + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} - x + |x+1| = m \quad (1).$$

Đặt $g(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} - x + |x+1|$.

Ta có $g'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} + \frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2} + \frac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2} - 1 + \frac{x+1}{|x+1|}$

$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} + \frac{-(x-1)^2-1}{(x^2-2x)^2} + \frac{-(x-2)^2-1}{(x^2-4x+3)^2} + \frac{x+1-|x+1|}{|x+1|} < 0$$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -1), (-1; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 3)$ và $(3; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-	-	-	-	-
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có năm nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt khi $m \leq 1$, do m nguyên thuộc $(-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; 0; 1\}$. Vậy có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn.

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 1

Đặt $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$

Ta có $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x = x[m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1)]$. Giả sử $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ thì hàm số $f(x) = m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x = 0$, nghĩa là $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = m^2x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ phải có nghiệm $x = 0$, suy ra $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Điều kiện đủ:

Với $m=1$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 3x + 1)$ khi đó $f(1) = -1 < 0$ không thỏa mãn điều kiện $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. (loại)

Với $m=1$, $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Vậy $S = \{-1\}$.

Câu 5: Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải

ĐS: 0

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x+2)(ax^2+bx+2) = 0$ thì hàm số $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x+2)(ax^2+bx+2) = 0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$ (1)

Lí luận tương tự có $h(x) = (x-1)(ax^2+bx+2) = 0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} a+b+2=0 \\ 4a-2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$ có $f(x) = (x-1)(x+2)(-x^2-x+2) = -(x-1)^2(x+2)^2 \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a; b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Trong số các cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

Lời giải

ĐS: 0,25

Đặt $f(x) = (x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ và $g(x) = (x-a)(x^2+x+b)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x-a)(x^2+x+b) = 0$ thì hàm số $f(x) = (x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x-a)(x^2+x+b) = 0$ có nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases} a=1 \\ x^2+x+b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a=1 \\ x^2+x+b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1 > 0 \\ \Delta = 1-4b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0 \Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương

$$\text{trình } x^2+x+b=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

$$\text{Trong trường hợp 1: } \begin{cases} a=1 \\ b \geq \frac{1}{4} \Rightarrow ab \geq \frac{1}{4} \end{cases} \text{ suy ra tích } ab \text{ nhỏ nhất khi } ab = \frac{1}{4}$$

Và với $a=1, b=\frac{1}{4}$, tích $ab=\frac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)(x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ thỏa mãn với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ (nhận)}$$

Trong trường hợp 2: Tích $ab=4 > \frac{1}{4}$

Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 4040

Ta có nhận xét: khi $f(x)=0$ thì phương trình $f'(x)=m.f(x)$ vô nghiệm.

$$\text{Do đó: } f'(x)=m.f(x) \Leftrightarrow m=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\dots+\frac{1}{x-2020}.$$

$$\text{Ta có } g'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{-1}{(x-3)^2}+\dots+\frac{-1}{(x-2020)^2}<0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3; \dots; 2020\}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	...	2020	$+\infty$
$g'(x)$	-		-		...		-
$g(x)$	0	$\nearrow +\infty$	$\nearrow +\infty$	$\nearrow +\infty$	...	$\nearrow +\infty$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020; 2020]$ nên $m \in \{n \in \mathbb{Z} \mid -2020 \leq n \leq 2020, n \neq 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho phương trình $4\cos^3 x - 12\cos^2 x - 33\cos x = 4m + 3\sqrt{3\cos^2 x + 9\cos x + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Lời giải

ĐS: 15

Đặt $t = \cos x$ với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, với mỗi $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ chỉ có một $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3\sqrt{3t^2 + 9t + m}$ (1)

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } u = \sqrt{3t^2 + 9t + m} &\Rightarrow \begin{cases} 4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3u \\ u^3 = 3t^2 + 9t + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 = 12t^2 + 33t + 4m + 3u \\ 4u^3 = 12t^2 + 36t + 4m \end{cases} \\ \Rightarrow 4t^3 - 4u^3 = 3u - 3t &\Leftrightarrow (t-u)(4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow u = t, (4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3 > 0) \end{aligned}$$

Ta tìm m để phương trình $m = t^3 - 3t^2 - 9t$ có nghiệm duy nhất $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\text{Xét } g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (I)} \\ t = 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Vậy $g(1) \leq m \leq g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -11 \leq m \leq \frac{29}{8}$ vậy có 15 giá trị nguyên của m .

Câu 9: Cho hai hàm số $y = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

Lời giải

ĐS: 506

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 4m - 2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi (*) có duy nhất một nghiệm.

$$+ \text{ Xét hàm số } y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = \begin{cases} g_1(x) = \ln(x-2) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x > 2 \\ g_2(x) = \ln(2-x) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } 0 < x < 2 \\ g_3(x) = \ln(2-x) - \ln(-x) - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} g_1'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x > 2 \\ g_2'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0 < x < 2, \text{ do vậy } y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \\ g_3'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0	+
y	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	0

+ Qua bảng biến thiên này ta có (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4m-2020=4 \\ 4m-2020=\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=506 \in \mathbf{Z} \\ m=\frac{2020+\ln 3}{4} \notin \mathbf{Z} \end{cases}$$

+ Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Câu 10: Cho hai hàm số $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 2021

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) :

$$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|) = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3 \quad (1)$$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x \in \left\{ -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

Suy ra: $f'(x) = -2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2}.$

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} -4 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0; +\infty) \\ -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không

xác định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-		-		-
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

Lời giải

ĐS: 15

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} = 2x \Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \quad (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 = 2x^2 - 3x + m \quad (x \neq 3) \quad (*)$$

Đặt: $x^2 - 2x + m = t$ ta được hệ: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = t \\ t^2 = 2x^2 - 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - t + m = 0 \\ 2x^2 - t^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 - x + t = 0 \Rightarrow (x - t)(x + t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 1 - x \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = x \\ x^2 - 2x + m = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

$$-(1), (2) \text{ đều có hai nghiệm pb khác 3 khi: } \begin{cases} 9-4m > 0 \\ 3^3-3.3+m \neq 0 \\ 1-4(m-1) > 0 \\ 3^2-3+m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ m < \frac{5}{4} \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1,25 \\ m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{cases} (**)$$

$$-(1), (2) \text{ không có nghiệm trùng nhau} \Leftrightarrow \text{Hệ: } \begin{cases} x^2-3x+m=0 \\ x^2-x+m-1=0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-3x+m=0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x^2-3x+m=0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4} (***)$$

Vậy số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ đồng thời thỏa mãn (**) và (***) là 15.

Câu 12: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

Lời giải

ĐS: 2006

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 15x$ (*).

Nếu $x = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \neq 0$.

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \frac{1}{x^3} = \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{m-15x})^3 + 3\sqrt{m-15x}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{m-15x} \quad (2).$$

Nếu $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x > 0$.

Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ x + \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ nên $(2) \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = m - 15x \Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x$.

Đặt $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x, x > 0$. $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + 15$.

Phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
g'			$-$	0	$+$
g		$+\infty$		$\frac{55}{4}$	$+\infty$

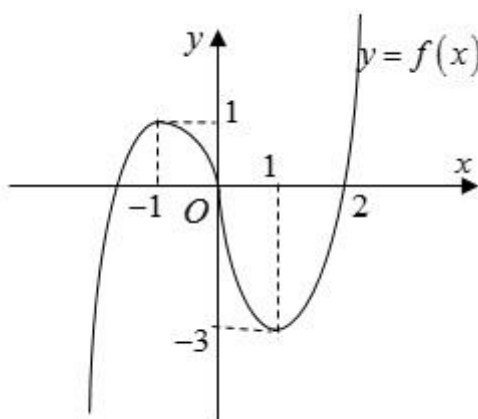
Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{55}{4}$ (thỏa $m > 0$).

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

DẠNG 7. TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

Lời giải

ĐS: 2

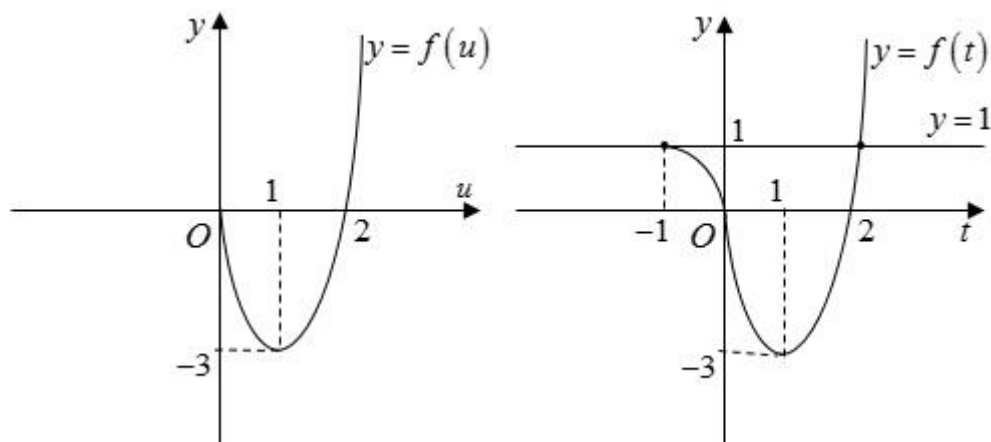
Đặt $u = e^x > 0$, từ đồ thị suy ra: $f(u) \geq -3, \forall u > 0$.

Đặt $t = 2 + f(u), t \geq -1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t = -1$, có một nghiệm $u = 1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t \in (-1; 2)$, có hai nghiệm $u \in (0; 2)$.

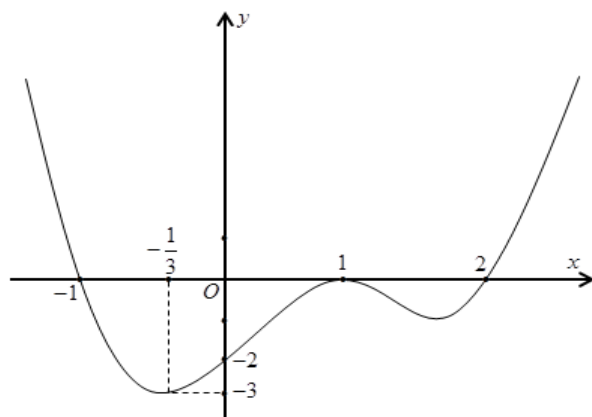
Ứng với mỗi nghiệm $t > 2$, có một nghiệm $u > 2$.



Phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm $t = -1$ và một nghiệm $t > 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 9

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)-1), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = x_0 \in (1; 2) \\ f'(x)-1 = -1 \\ f'(x)-1 = 1 \\ f'(x)-1 = 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta cũng có:

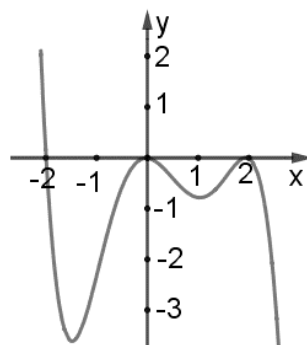
$$\square f'(x) - 1 = -1 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\square f'(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\square f'(x) - 1 = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \in (-\infty; x_1) \\ x = x_4 \in (x_2; +\infty) \end{cases}$$

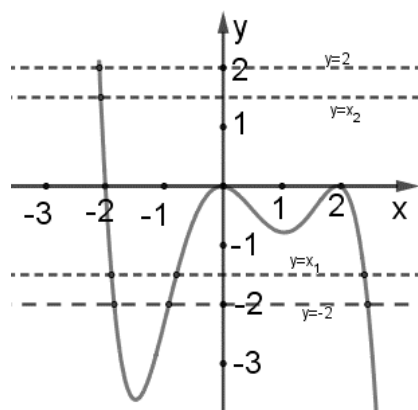
Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x))$. Hỏi phương trình $g(x) = 0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



Lời giải

ĐS: 10



Ta có $g(x) = f(f(x)) \cdot f(x)$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Có } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, (-2 < x_1 < -1) \\ x = 0 \\ x = x_2, (1 < x_2 < 2) \\ x = 2 \end{cases} ; f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x = -2, x = 0, x = 2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x) = 0$.

$f(x) = x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3 \in (-2; -1), x_4 \in (-1; 1), x_5 \in (2; +\infty)$.

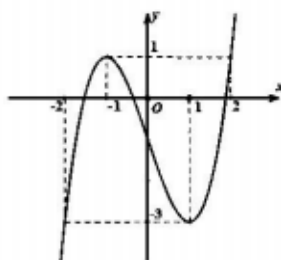
$f(x) = x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6 \in (-\infty; -2)$.

$f(x) = 2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7 \in (-\infty; -2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, -2, 0, 2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g(x) = 0$ có tổng cộng 10 nghiệm phân biệt.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (1; 2) \end{cases}$$

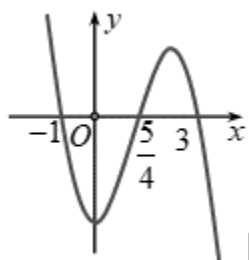
$$\text{Khi đó: } f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = x_1 \in (-2; -1) \\ f(x) - 1 = x_2 \in (-1; 0) \\ f(x) - 1 = x_3 \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 + x_1 \in (-1; 0) \\ f(x) = 1 + x_2 \in (0; 1) \\ f(x) = 1 + x_3 \in (2; 3) \end{cases}$$

+ Ta thấy hai phương trình $f(x) = 1 + x_1 \in (-1; 0); f(x) = 1 + x_2 \in (0; 1)$ đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = 1 + x_3 \in (2; 3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có 7 nghiệm.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

Lời giải

ĐS: 3

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \frac{5}{4}, 3$.

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$. Hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2).

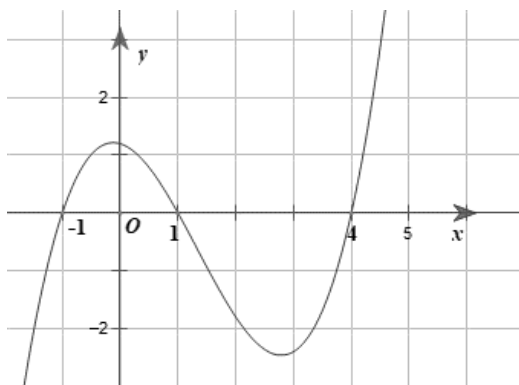
Từ (1) và (2) suy ra $n = -\frac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$.

Khi đó phương trình $f(x) = r \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0 \Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{3} \vee x = 3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\frac{5}{3}; 0; 3\right\}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

Lời giải

ĐS: 4

Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$

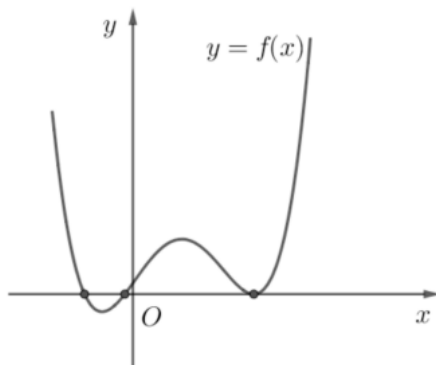
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	2	4		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$								

Phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r \Leftrightarrow f(x) = f(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 19: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ có số phần tử là

Lời giải

ĐS: 1

Xét phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ (1)

Do $f(x) = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) và $f'(x_3) = 0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

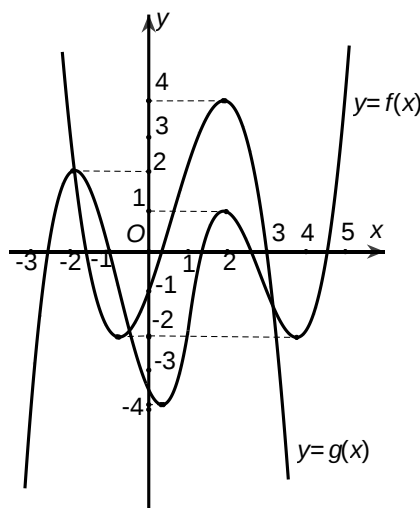
Ta có $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^2$, ($a \neq 0$)

$$\text{Với } x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{2}{x - x_3} \right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \frac{2}{(x - x_3)^2} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Câu 20: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

Lời giải

ĐS: 22

Quan sát đồ thị ta thấy: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 (-3 < x_1 < -2) \\ x = -1 \\ x = x_2 (1 < x_2 < 2) \\ x = x_3 (2 < x_3 < 3) \\ x = x_4 (4 < x_4 < 5) \end{cases} .$

Do đó: $f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x_1 (1) \\ g(x) = -1 (2) \\ g(x) = x_2 (3) \\ g(x) = x_3 (4) \\ g(x) = x_4 (5) \end{cases}$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm; Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (4) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (5) có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f(g(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

Quan sát đồ thị ta thấy: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_5 (-2 < x_5 < -1) \\ x = x_6 (0 < x_6 < 1) \\ x = 3 \end{cases}$

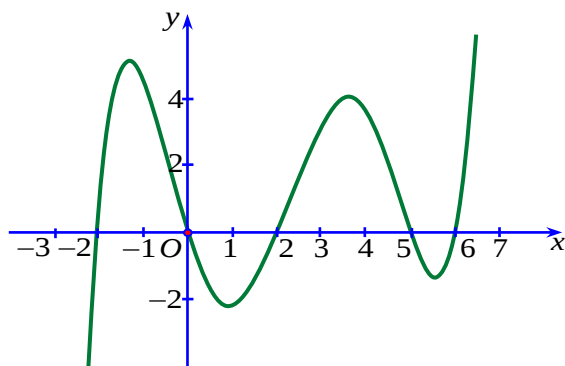
Do đó $g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_5 (6) \\ f(x) = x_6 (7) \\ f(x) = 3 (8) \end{cases}$

Phương trình (6) có 5 nghiệm; Phương trình (7) có 5 nghiệm; Phương trình (8) có 1 nghiệm.

Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g(f(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là 22 nghiệm.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

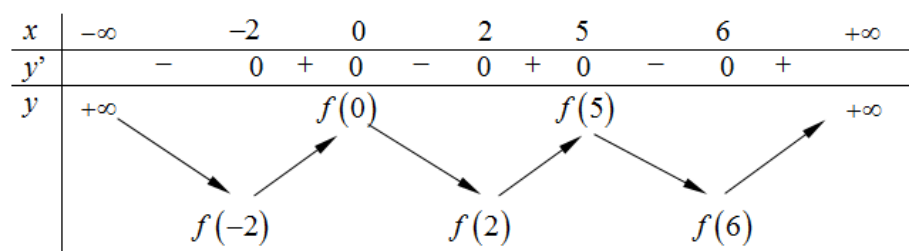


Số nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{2}{3}; 6 \right]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

Lời giải

ĐS: 2

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có BBT



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 0; x = 2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 2; x = 5$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 5; x = 6$

$$S_1 = -\int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2);$$

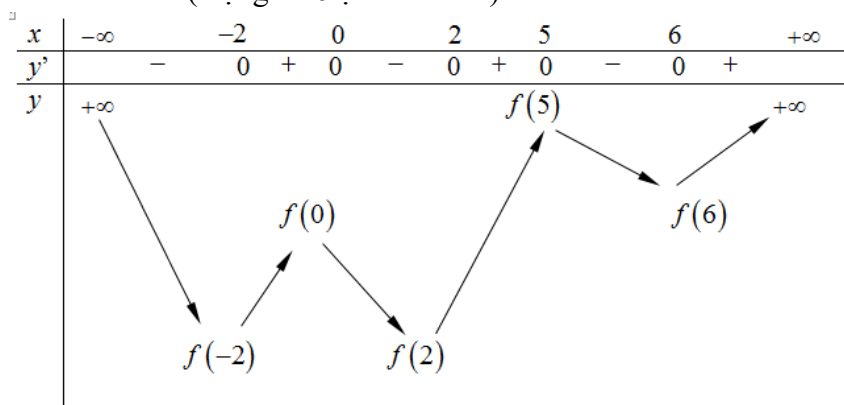
$$S_2 = \int_2^5 f'(x) dx = f(5) - f(2);$$

$$S_3 = -\int_5^6 f'(x) dx = f(5) - f(6)$$

Từ đồ thị ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(5) > f(0)}$

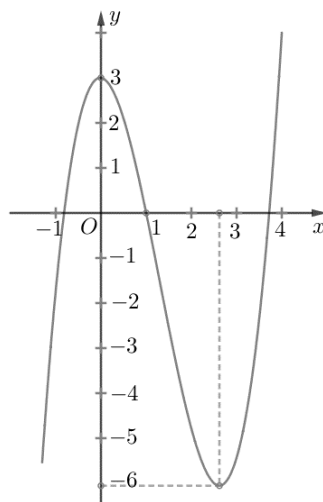
và $S_1 + S_3 < S_2 \Rightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(6) > f(0)}$

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:



Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $\frac{2}{3}; 6$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



Lời giải.

ĐS: 8

Ta có: $g'(x) = f'(x) f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} (*)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a_1 \end{cases}, \text{ với } 2 < a_1 < 3.$$

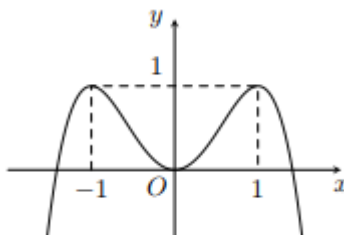
$$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, (1) \\ f(x) = a_1, (2) \end{cases}.$$

Phương trình (1): $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (*).

Phương trình (2): $f(x) = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình (*).

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



Lời giải

ĐS: 4

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

$$\text{Từ đồ thị} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 0 \\ e = 0 \\ a + c + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2.$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x}) = x^2 + 2x \text{ và } f(\sqrt{f(x)}) = f^2(x) + 2f(x).$$

$$\text{Như vậy phương trình } f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0 \text{ với } f(x) \geq 0.$$

$$\text{Đặt } t = f(x) (t \geq 0) \text{ ta được phương trình } g(t) = 0 \text{ với } g(t) = t^2 - 3t - 2\sqrt{t} + 1.$$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$$\Rightarrow g(t) = 0 \text{ có ít nhất 1 nghiệm thuộc } (0;1).$$

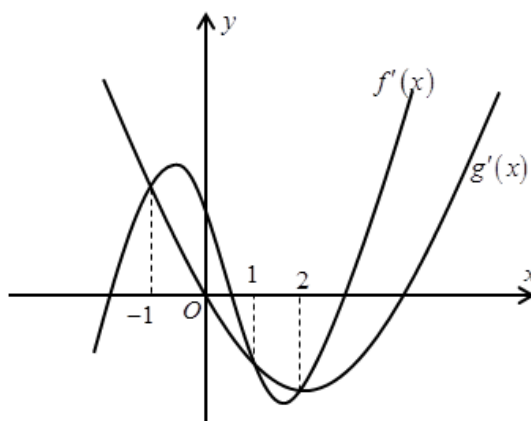
Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$$\Rightarrow g(t) = 0 \text{ có ít nhất 1 nghiệm thuộc } (1;4).$$

Mà $g(t) = 0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0;1)$.

Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 24: Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(n, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{Q})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $f'(x)$, $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

Lời giải

ĐS: 2

+) Từ giả thiết $f(0) = g(0)$ suy ra $r = d$ do đó phương trình $f(x) = g(x)$ tương đương với:

$$x[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c) = 0 \end{cases}$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m \neq 0$ và

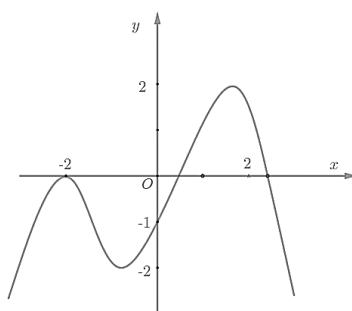
$$\begin{cases} f'(-1) = g'(-1) \\ f'(1) = g'(1) \\ f'(2) = g'(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 3(n-a) - 2(p-b) + q - c = 0 \\ 4m + 3(n-a) + 2(p-b) + q - c = 0 \\ 32m + 12(n-a) + 4(p-b) + q - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-a = -\frac{8}{3}m \\ p-b = -2m \\ q-c = 8m \end{cases}$$

Từ đó ta có phương trình: $mx^3 - \frac{8}{3}mx^2 - 2mx + 8m = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0$.

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác 0.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có 2 phần tử.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

ĐS: 9

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f(f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a < -2 \\ f(x) = b \in (-2; -1) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = c > 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } f(x) = a < -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -2 \\ x = x_2 > 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } f(x) = b \in (-2; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 < -2 \\ x = x_4 \in (-2; -1) \\ x = x_5 \in (-1; 0) \\ x = x_6 > 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_7 = -2 \\ x = x_8 \in (0; 1) \\ x = x_9 \in (2; 3) \end{cases}.$$

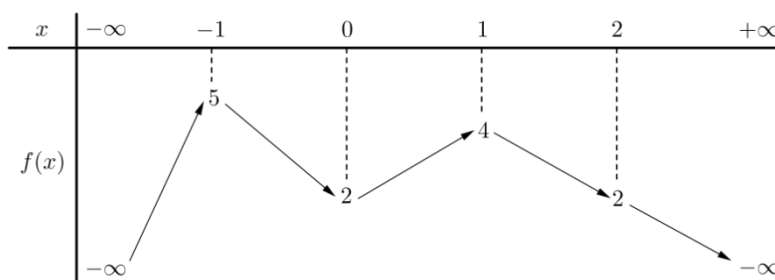
+ Với $f(x) = c > 2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $(-\infty; -2)$, $f(x_1) = a \neq b = f(x_3)$ nên $x_1 \neq x_3$.

Hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $(2; +\infty)$, $f(x_6) = b \neq 0 = f(x_9)$ nên $x_6 \neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f(\sqrt{2x-x^2}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

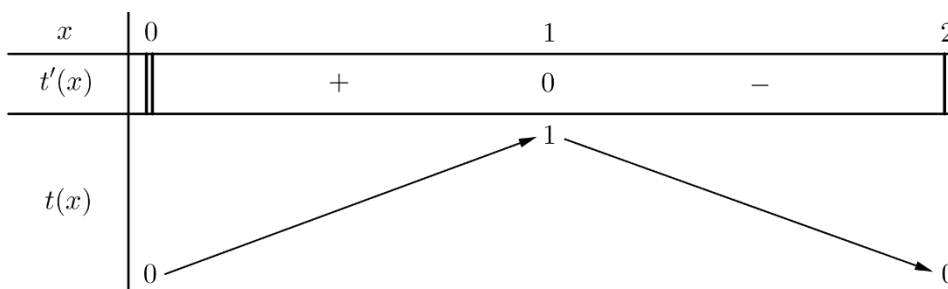
Lời giải

ĐS: 2

Trước hết, xét hàm số $t = t(x) = \sqrt{2x-x^2}$, $x \in [0; 2]$.

Ta có $t'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, $x \in (0; 2)$. $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; 2)$.

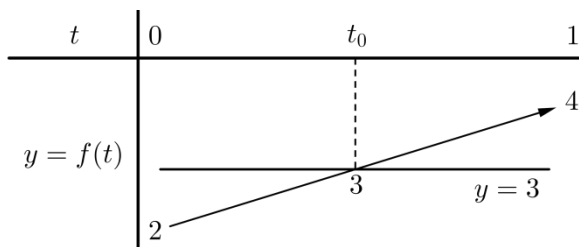
Bảng biến thiên của $t(x)$:



$\Rightarrow 0 \leq t \leq 1, \forall x \in [0; 2]$.

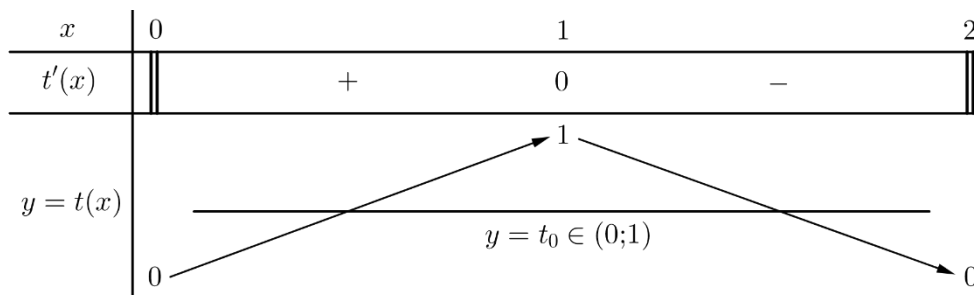
Lúc này, phương trình $f(\sqrt{2x-x^2}) = 3$ trở thành $f(t) = 3$ (1) với $t \in [0; 1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0; 1]$ thì đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0; 1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t = t_0$ với $t_0 \in (0; 1)$.



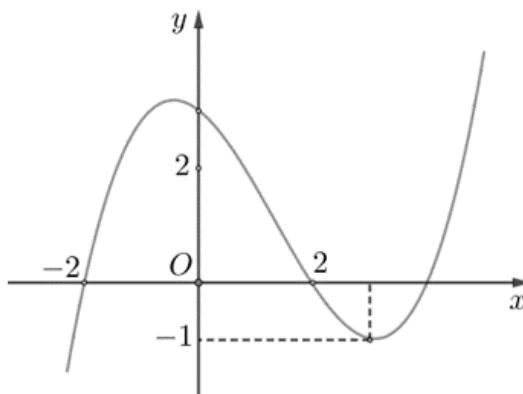
Khi đó, phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2} = t_0$ (2), $t_0 \in (0; 1)$.

Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0 \in (0; 1)$ thì đường thẳng $y = t_0$ cắt đồ thị hàm số $y = t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $f\left(\sqrt{2x-x^2}\right)=3$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ là

Lời giải

ĐS: 9

Xét phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=1$ (1)

Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t = g(x) = x^3 - 3x$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Với mỗi $t_0 > 2$ hoặc $t_0 < -2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có một nghiệm;

+ Với mỗi $-2 < t_0 < 2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $\left|f(t)\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t)=1 \\ f(t)=-1 \end{cases}$

* TH 1: $f(t)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} t=t_1 \in (-2; 0) \\ t=t_2 \in (0; 2) \\ t=t_3 \in (2; +\infty) \end{cases}$

+ Với $t = t_1 \in (-2; 0) \Rightarrow$ Phương trình $t_1 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t = t_2 \in (0; 2) \Rightarrow$ Phương trình $t_2 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t = t_3 \in (2; +\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_3 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;

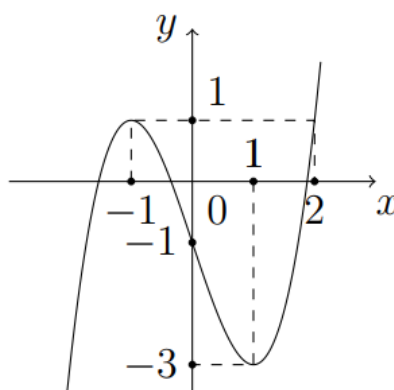
* TH 2: $f(t) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_4 \in (-\infty; -2) \\ t = t_5 \in (2; +\infty) \end{cases}$

+ Với $t = t_4 \in (-\infty; -2) \Rightarrow$ Phương trình $t_4 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;

+ Với $t = t_5 \in (2; +\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_5 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

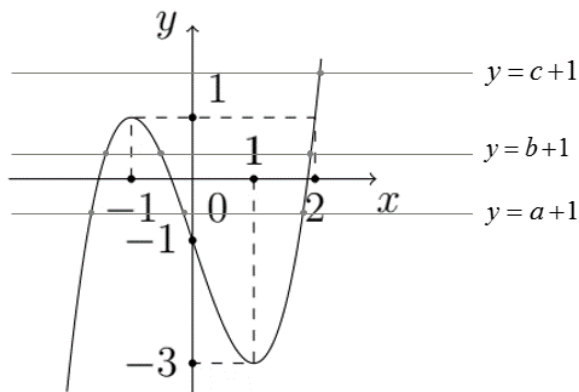
Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt. Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?



Lời giải

ĐS: 4



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f[f(\cos x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(\cos x) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(\cos x) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = a + 1 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) = b + 1 \in (0; 1) \\ f(\cos x) = c + 1 \in (2; 3) \end{cases}$$

• Xét phương trình $f(\cos x) = a + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \alpha_1 < -1 & (1) \\ \cos x = \alpha_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \cos x = \alpha_3 > 1 & (3) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (1), (3) vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

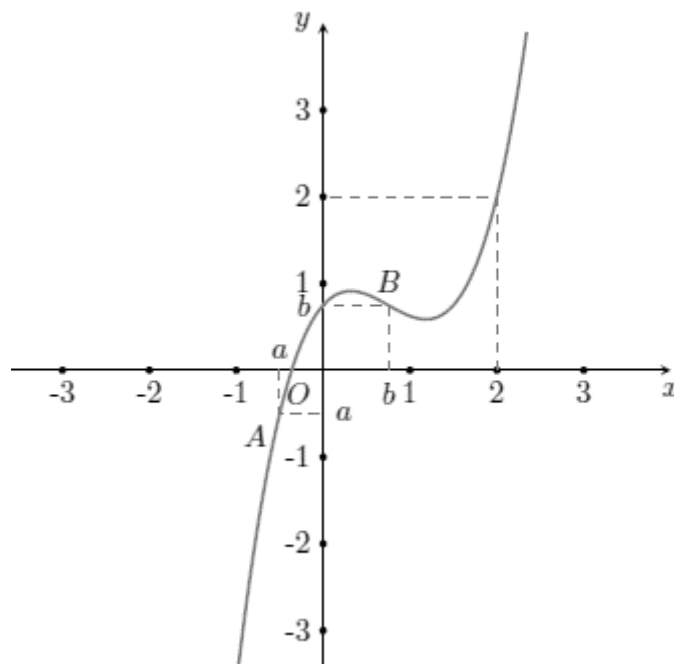
• Xét phương trình $f(\cos x) = b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \beta_1 < -1 & (4) \\ \cos x = \beta_2 \in (-1; 0) & (5) \\ \cos x = \beta_3 > 1 & (6) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (4), (6) vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

• Xét phương trình $f(\cos x) = c + 1 \Leftrightarrow \cos x = t > 2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

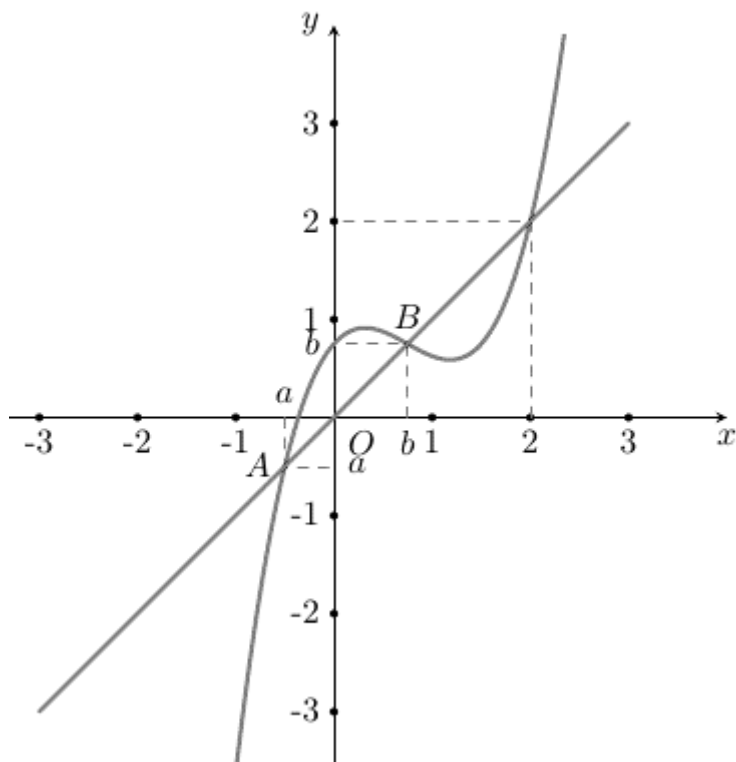
Câu 29: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

Lời giải

ĐS: 5



Từ đồ thị ta có $f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; 0) \\ x = b \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases}$

Do đó $f(\cos x + 1) = \cos x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = a \in (-\infty; 0) \\ \cos x + 1 = b \in (0; 1) \\ \cos x + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a - 1 = t_1 \in (-\infty; -1) \text{ (VN)} \\ \cos x = b - 1 = t_2 \in (-1; 0) \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		0		2	
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
								$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; \ln 2)$ của phương trình $2019 f(1 - e^x) - 2021 = 0$ là

Lời giải

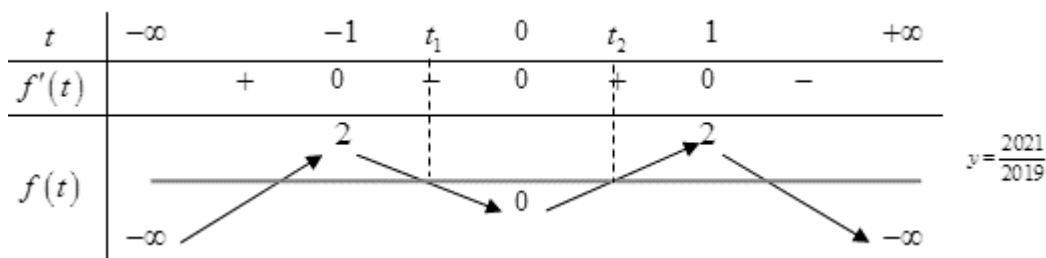
ĐS: 2

Đặt $t = 1 - e^x$; $x \in (-\infty; \ln 2) \Rightarrow t \in (-1; 1)$.

Nhận xét: $x = \ln(1-t) \Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t \in (-1; 1)$ ta được một giá trị của $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Phương trình tương đương: $f(t) = \frac{2021}{2019}$.

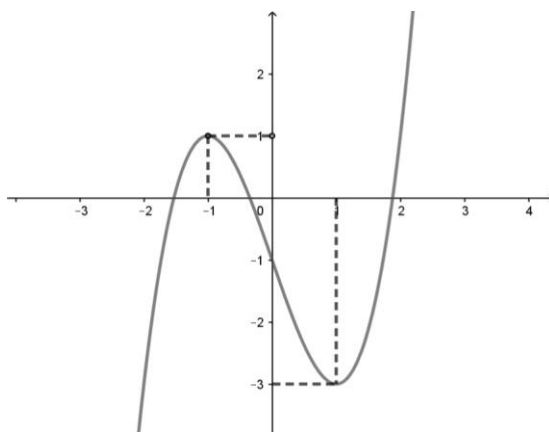
Sử dụng bảng biến thiên của $f(x)$ cho $f(t)$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = \frac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1, t_2 \in (-1; 1)$.

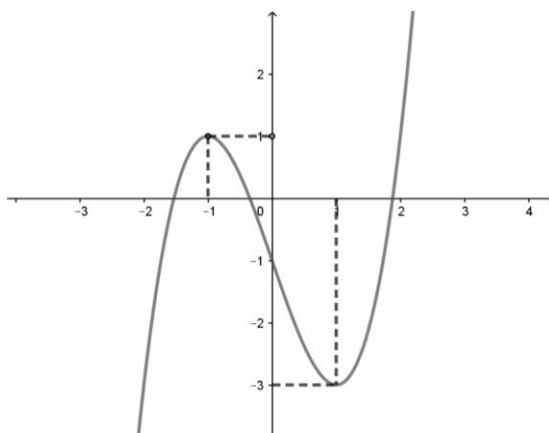
Vậy phương trình $2019f(1 - e^x) - 2021 = 0$ có 2 nghiệm $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Câu 31: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?



Lời giải

ĐS: 6



Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Với $t = 1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $t = -1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $-1 < t < 1$, phương trình $t = \cos x$ có ba nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Thay $t = \cos x$ vào phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$, ta được phương trình:

$$f(f(t) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(t) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(t) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = a + 1 \in (-1; 0) & (1) \\ f(t) = b + 1 \in (0; 1) & (2) \\ f(t) = c + 1 \in (2; 3) & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t > 1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

Phương trình $|f(3x+1) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

ĐS: 3

$$\text{Ta có } |f(3x+1) - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1) - 2 = 5 \\ f(3x+1) - 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1) = 7 & (1) \\ f(3x+1) = -3 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên,

+ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x+1 = a > 3 \Leftrightarrow x = \frac{a-1}{3} > \frac{2}{3}$.

+ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} 3x_1 + 1 = 3 \\ 3x_2 + 1 = b < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{b-1}{3} < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3		$+\infty$
		1			2	

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0$ là:

Lời giải

ĐS: 5

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1]$$

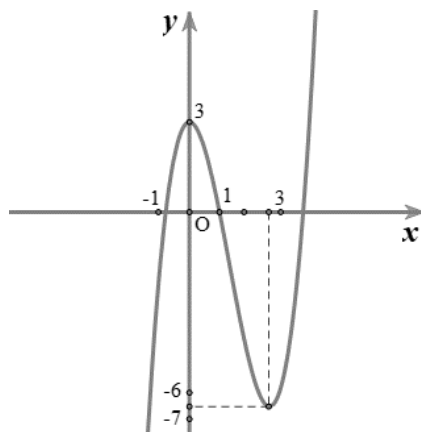
$$3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1; 0) \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0; 1) \end{cases}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1; 0) \text{ có 2 nghiệm.}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0; 1) \text{ có 3 nghiệm.}$$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



Lời giải

ĐS: 8

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = m \in (1; 3) \end{cases}.$$

Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x) = m \in (1; 3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	2	-2	$+\infty$		

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Ta có } f(2\sin x + 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x + 1 = -1 \\ 2\sin x + 1 = a \in (1; 3) \\ 2\sin x + 1 = b \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 & (1) \\ \sin x = \frac{a-1}{2} \in (0; 1) & (2) \\ \sin x = \frac{b-1}{2} \in (1; +\infty) & (3) \end{cases}$$

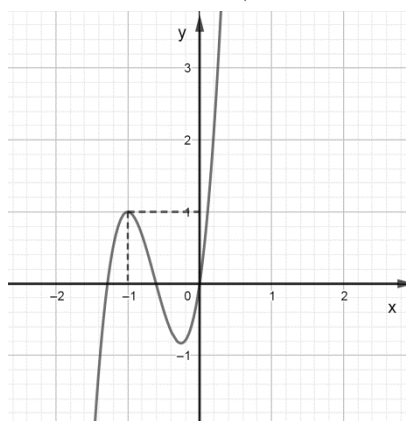
(1) có 2 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

(2) có 5 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

(3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)}\right) - f(1) = 0$ là



Lời giải

ĐS: 3

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f\left(f(t) + t^2 + 2t\right) - f(1) = 0$ (*).

Xét $t = 0$: (*) $\Leftrightarrow f(0) - f(1) = 0$ (không thỏa).

Xét $t > 0$: Ta có $f(t) > 0$ và $f(t) + t^2 + 2t > 0$

Theo đồ thị, hàm $f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

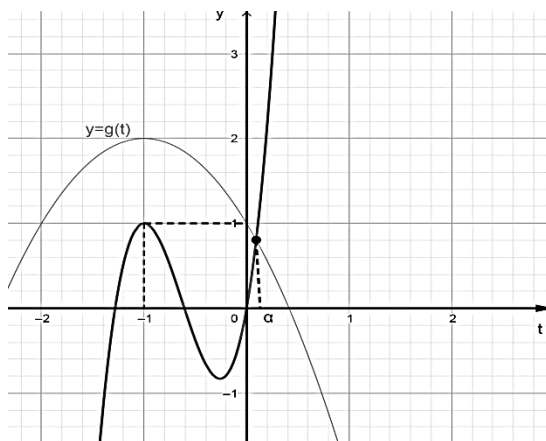
$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow f(f(t) + t^2 + 2t) = f(1) \Leftrightarrow f(t) + t^2 + 2t = 1$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 1 - t^2 - 2t$$

$$\Leftrightarrow f(t) = g(t) (**) \text{ (với } g(t) = 1 - t^2 - 2t, t > 0 \text{)}$$

Vì hàm $f(t)$ đồng biến và $g(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình $(**)$ có nghiệm duy nhất $t = \alpha$

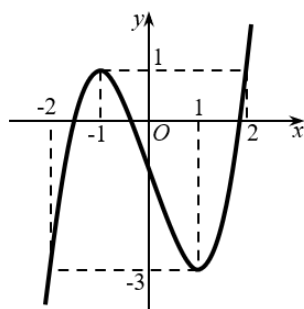
Theo đồ thị hàm $f(t), g(t)$ ta có $\alpha \in (0; 1)$.



Khi đó, $t = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha^2, \alpha^2 \in (0; 1) (***)$.

Vì đồ thị hàm $f(x)$ cắt đường thẳng $y = \alpha^2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $(***)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



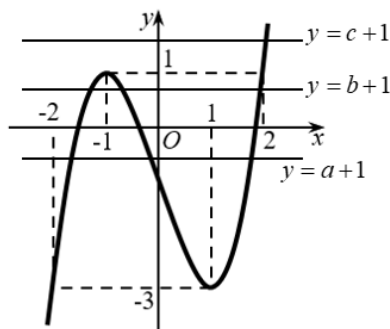
Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Từ đồ thị của hàm số } y = f(x) \text{ suy ra } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = a \\ f(x) - 1 = b \\ f(x) - 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a + 1 \\ f(x) = b + 1 \\ f(x) = c + 1 \end{cases}$$

- + Do $a \in (-2; -1) \Rightarrow a+1 \in (-1; 0) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = a+1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- + Do $b \in (-1; 0) \Rightarrow b+1 \in (0; 1) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = b+1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- + Do $c \in (1; 2) \Rightarrow c+1 \in (2; 3) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = c+1$ có 1 nghiệm.



Vậy phương trình $f(f(x)-1) = 0$ có $3+3+1=7$ nghiệm.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2020		$-\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -2020 $-\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x+2019) - 2020| = 2021$ là

Lời giải

ĐS: 4

Ta có :

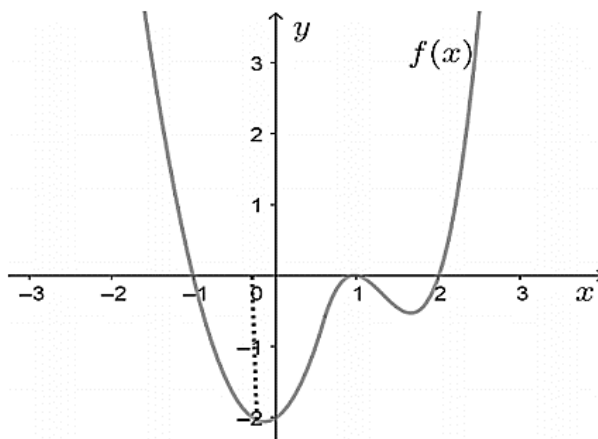
$$|f(x+2019) - 2020| = 2021 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+2019) - 2020 = -2021 \\ f(x+2019) - 2020 = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+2019) = -1 \\ f(x+2019) = 4041 \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên suy ra:

- +) Phương trình: $f(x+2019) = -1$ có 3 nghiệm.
- +) Phương trình: $f(x+2019) = 4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

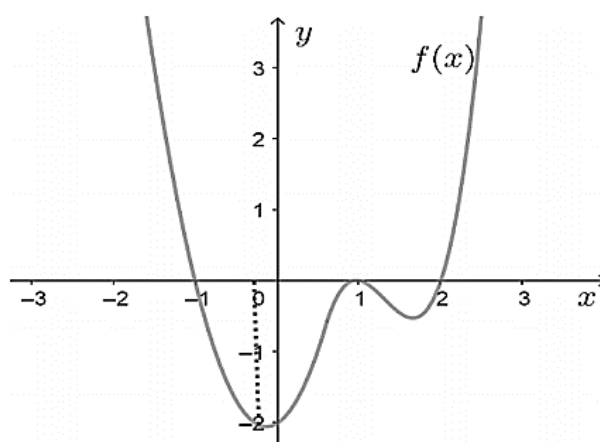
Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

Lời giải

ĐS: 9



Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) - 1) = 0 \end{cases}$$

$$+) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 (a_1 \in (-1; 0)) \\ x = 1 \\ x = a_2 (a_2 \in (1; 2)) \end{cases}$$

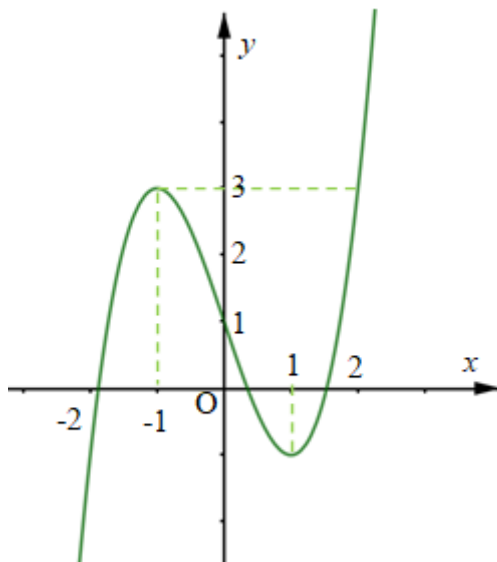
$$+) f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = a_1 \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a_1 + 1 \in (0; 1) & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \\ f(x) = a_2 + 1 \in (2; 3) & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị suy ra

- ☐ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1 \in (-2; -1); b_2 \in (2; 3)$
- ☐ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1 \in (-2; b_1); c_2 \in (b_2; 3)$
- ☐ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1 \in (-2; c_1); d_2 \in (c_2; 3)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 0$ là

Lời giải

ĐS: 5

Đặt $f(\cos x) = t$ ta được phương trình $f(t) = 0$.

Quan sát đồ thị $y = f(x)$ ta suy ra $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (-2; -1) \\ t = t_2 \in (0; 1) \\ t = t_3 \in (1; 2) \end{cases}$.

* Với $t = t_1$ ta có $f(\cos x) = t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = t_1 \in (-2; -1) \Rightarrow f(\cos x) = t_1 \Leftrightarrow \cos x = x_1 < -1$ nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t = t_2$ ta có $f(\cos x) = t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và

$$y = t_2 \in (0; 1) \Rightarrow f(\cos x) = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = x_2 < -1 \\ \cos x = x_3 \in (0; 1) \\ \cos x = x_4 \in (1; 2) \end{cases}$$

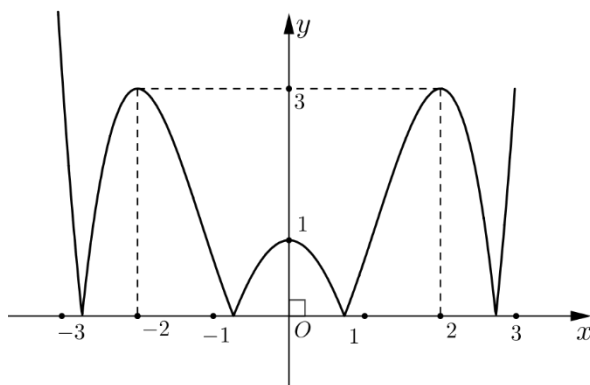
Chỉ có $\cos x = x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x \in \left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_3$.

* Với $t = t_3$ tương tự ta có $\begin{cases} \cos x = x_5 < -1 \\ \cos x = x_6 \in (-1; 0) \\ \cos x = x_7 > 1 \end{cases}$.

Chỉ có $\cos x = x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x \in \left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$.

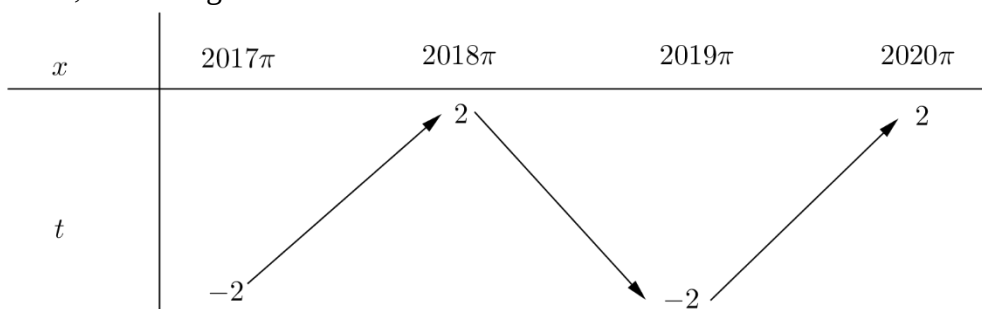
Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.



Lời giải

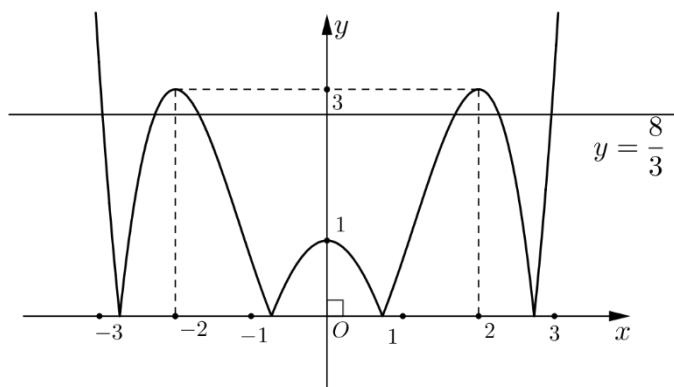
ĐS: 6

Đặt $t = 2 \cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó $3f(2 \cos x) = 8 \Leftrightarrow f(t) = \frac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ trên đồ thị $y = f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2; 2]$, đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1 \in (-2; -1)$ và $t_2 \in (1; 2)$.

Từ bảng biến thiên của t , ứng với giá trị t_1 , ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2 \cos x = t_1$, tương tự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2 \cos x = t_2$.

Vậy phương trình $3f(2 \cos x) = 8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$