

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

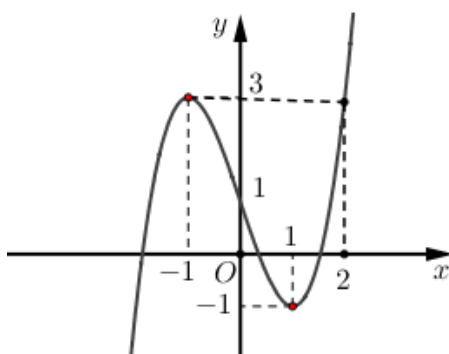
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

- a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 3)$
- b) Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$
- c) Đồ thị trên là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.
- d) Hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2024$ có 2 điểm cực đại.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Dựa vào hình vẽ, đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 3)$.

b) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

c). Hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Đồ thị hàm số qua các điểm $(-1; 3); (0; 1); (1; -1)$ và $(2; 3)$ nên ta có hệ:

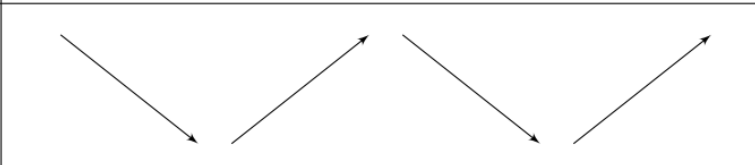
$$\begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ d=1 \\ a+b+c+d=-1 \\ 8a+4b+2c+d=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x+1.$$

d). $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2024$

Ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 1)$.

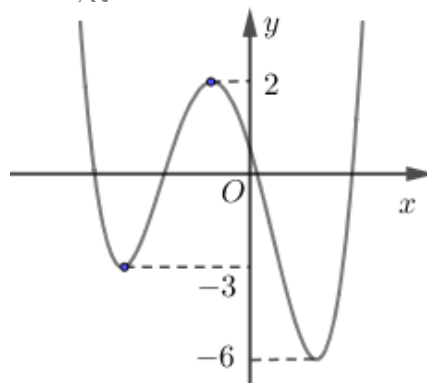
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2024$ có 1 điểm cực đại.

Câu 2: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị.
- b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -6.
- c) Xét hàm số $p(x)$ thỏa $p'(x) = f(x) + 3$. Khi đó hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.
- d) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị là 13.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị.

b) Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng -6 .

c) Xét $p'(x) = f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3$. Phương trình có 1 nghiệm kép và 2 nghiệm đơn nên hàm số có 2 điểm cực trị.

d) Đặt $h(x) = 2f(x-1) + m \Rightarrow g(x) = |h(x)|$.

Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y = h(x)$ + số giao điểm của $y = h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y = h(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y = h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

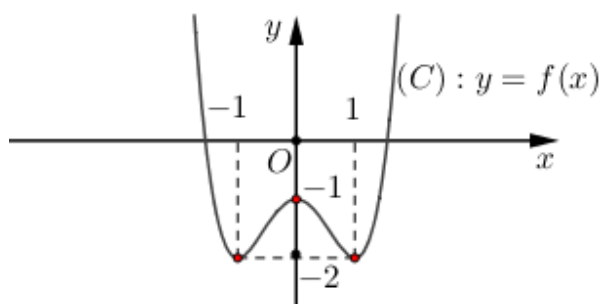
Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\frac{m}{2} \geq 2$ hoặc $-6 < -\frac{m}{2} \leq -3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-12; 12]} \text{có 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Trong các số a, b, c có 2 số dương.

d) Phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Trên khoảng $(-1; 0)$ hàm số đồng biến và trên khoảng $(0; 1)$ hàm số nghịch biến.

c) Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

+ Đồ thị (C) cắt trục tung tại $y_0 = c < 0$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow a.b < 0$, nên $b < 0$

d) Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $f(t) = -\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

với giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 2 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

a) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.

b) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

c) Tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có hệ số góc $k = -1$.

d) có hai giá trị của m để đường thẳng $\Delta: y = -2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (đvdt).

Lời giải

a) đúng	b) Sai	c) Sai	d) đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) (C) có hai đường tiệm cận là $x = -1; y = 2$

b) Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$, nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

c) giao của (C) với trục tung là $A(0;1)$, suy ra tiếp tuyến với (C) tại A có hệ số góc $y'(0) = 1$.

d) Ta có $-2x + m = \frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + (m-4)x + m-1 = 0(1) \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Phương trình (1) có $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi m .

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} d(O, \Delta).AB \Leftrightarrow |m||x_1 - x_2| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m^2 \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right] = 12 \Leftrightarrow m^2 (m^2 + 8) = 48.$$

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Hàm số có tập xác định là $D = \square$

b) Khi $m = 1$ hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$

c) Khi $m = 2$ hàm số đạt GTLN trên đoạn $[-1; 0]$ bằng $\frac{1}{2}$

d) Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$ khi

$0 < m < 1$

Lời giải

a) Sai	b) đúng	c) đúng	d) đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Sai

Vì tập xác định của hàm số là $D = \square \setminus \{-m\}$.

b) Đúng

khi $m = 1$ hàm số trở thành $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = -\infty$

Vậy Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$

c) Đúng

Ta có: khi $m = 2$ thì hàm số trở thành $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2} = x + \frac{1}{x + 2}$

Tập xác định $D = \square \setminus \{-2\}$

$y' = \left(x + \frac{1}{x + 2}\right)' = 1 - \frac{1}{(x + 2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ vì $x \in [-1; 0]$

$y(0) = \frac{1}{2}, y(-1) = 0$

Do đó: hàm số đạt GTLN trên $[-1; 0]$ bằng $\frac{1}{2}$

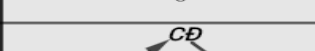
d) Đúng

Tập xác định: $D = \square \setminus \{-m\}$.

Hàm số liên tục trên $[0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{cases}$.

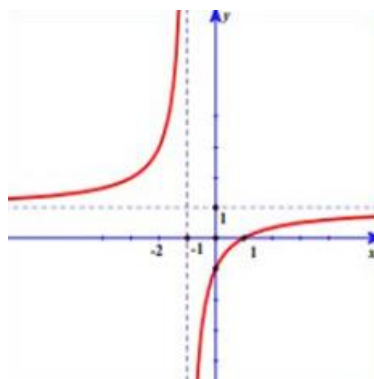
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1			$-m$	0	x_2			2	$+\infty$
y'	+			0	-		-	0	+		
y											

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0; 2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $0 < m < 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{x+b}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$.
- Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = 1$.
- $a + b = 1$.
- (C) cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi $\begin{cases} m < p \\ m > q \end{cases}$. Khi đó $p + q = 4$

Lời giải

a) đúng	b) Sai	c) sai	d) đúng
---------	--------	--------	---------

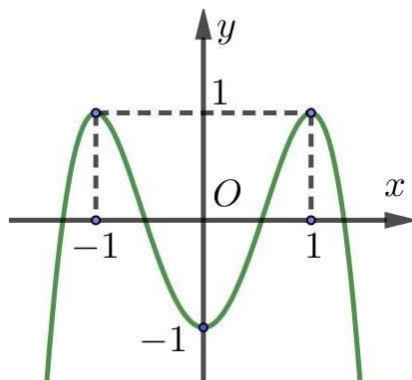
- Từ đồ thị ta có đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$.
- Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = 1$.
- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{x+b}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -b$ và đường tiệm cận ngang là $y = a$.

Theo đồ thị, ta có $\begin{cases} -b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

d. Xét PT hoành độ giao điểm $\frac{x-1}{x+1} = x+m \Leftrightarrow x^2 + mx + m+1 = 0 (*)$, ($x \neq -1$).

PT (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - 2\sqrt{2} \\ m > 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} (**)$

Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực đại.
- b) Hàm số đã cho $y = f(x)$ là một hàm trùng phương.
- c) Tổng các hệ số của hàm số bằng 1.
- d) Phương trình $f(f(x)) = 0$ có 15 nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại là $(-1; 1), (1; 1)$.

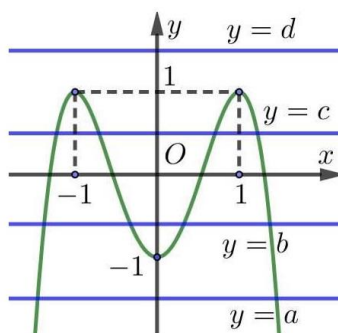
b) Hình đã cho là một đồ thị hàm bậc bốn đối xứng qua trục Oy nên hàm số $y = f(x)$ là một hàm trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$)

c) Ta có: $f(1) = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c = a + b + c = 1$

Do đó tổng các hằng số của hàm số bằng 1.

d) Phương trình $f(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm thực phân biệt.

Dựa vào đồ thị ta có:



$$f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, & a < -1 \\ f(x) = b, & -1 < b < 0 \\ f(x) = c, & 0 < c < 1 \\ f(x) = d, & d > 1 \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = a$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = b$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = c$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = d$ vô nghiệm (vì đường thẳng $y = d$ không có điểm chung với đồ thị hàm số $f(x)$).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

a) Sai: Đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực đại.

b) Đúng: Hàm số đã cho $y = f(x)$ là một hàm trùng phương.

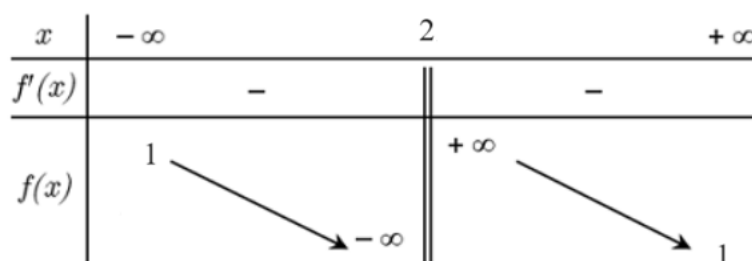
c) Đúng: Tổng các hằng số của hàm số bằng 1.

d) Sai: Phương trình $f(f(x)) = 0$ có 15 nghiệm thực phân biệt.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số là



c) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là hai điểm phân biệt.

d) Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 16.

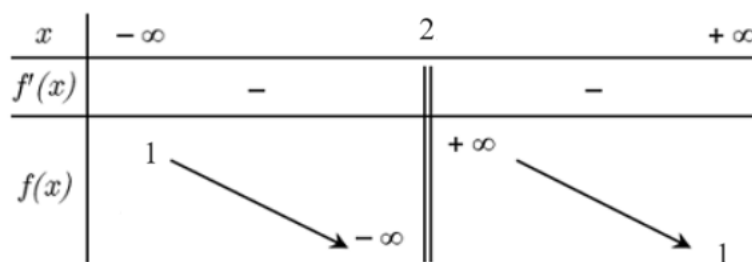
Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hàm số xác định khi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

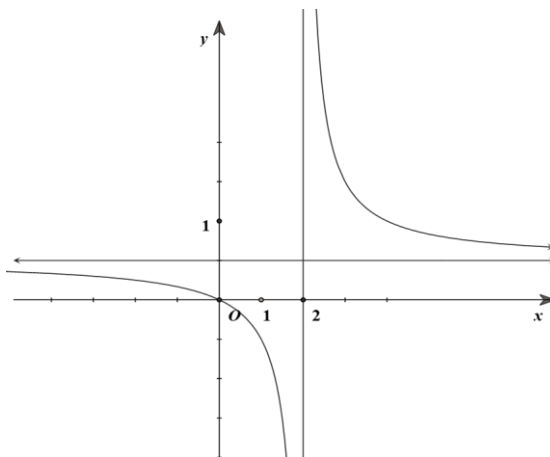
b) Bảng biến thiên của hàm số là



c) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là gốc tọa độ.

Ta có: $f(0) = \frac{0}{0-2} = 0 \Rightarrow$ Đồ thị cắt trục tung tại một điểm duy nhất là gốc tọa độ.

d) Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 4.



Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Gọi $A\left(a; \frac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \frac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) ($a < 2 < b$).

$$\Rightarrow \overline{AB} = \left(b-a; \frac{b}{b-2} - \frac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \frac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$$

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương $(b-2)$ và $(2-a)$ ta có: $(b-2)(2-a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

$$\Rightarrow AB^2 = (b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \geq (b-a)^2 + \frac{64}{(b-a)^2} \geq 16$$

$$\Rightarrow AB \geq 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} b-2=2-a \\ (b-a)^2 = \frac{64}{(b-a)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-\sqrt{2} \\ b=2+\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $AB_{\min} = 4$.

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

b) Đúng: Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

c) Sai: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là hai điểm phân biệt.

d) Sai: Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 16.

Câu 9: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Hàm số có một điểm cực trị.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

d) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ tại 2 điểm phân biệt khi $m \geq 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng: $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Sai: Hàm số không có cực trị

c) Sai: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$.

d) Sai: Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ tại 2 điểm phân biệt khi $m > 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-1; 0)$.

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = mx + 2$ tại ba điểm phân biệt khi $m > \frac{-9}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Sai: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

$$y' = 3x^2 - 6x. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến

Trên khoảng $(0; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến

b) Đúng: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						
	$-\infty$		2		-2	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

c) Sai:

$$\text{Ta có } x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{đồ thị hàm số qua điểm } B(1; 0).$$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $A(0; 2)$.

d) Sai: Ta có: $x^3 - 3x^2 + 2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - m) = 0$

$$\text{Đồ thị hàm số cắt đường thẳng } y = mx + 2 \text{ tại ba điểm phân biệt khi } \begin{cases} 9 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 + mx + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Khi $m = -3$ hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ khi $m = -12$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng: Khi $m = 1$ thì $y' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Sai: Khi $m = -3$ thì $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		-1		$+\infty$
	$-\infty$						

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

c) Sai: Đồ thị luôn cắt trục tung tại điểm $A(0; 1)$.

d) Đúng: Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ khi $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} 12 + m = 0 \\ -12 < 0 \end{cases} \hat{=} m = -12$.

Câu 12: Một cốc chứa 50 gam dung dịch NaOH (natri hydroxide) với nồng độ 8%. Một bình chứa dung dịch NaOH khác với nồng độ 20% được trộn vào cốc. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $4 + 0,2x$ (gam).

b) Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{4 + 0,2x}{50}$ ($x > 0$)

c) Hàm số $C(x)$ không có cực trị.

d) Nồng độ NaOH giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 200 mg/ml

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $4 + 0,2x$ (gam).

Trong 50 gam dung dịch NaOH 8% có $m_{NaOH 8\%} = 50.8\% = 4$ (gam).

Trong x gam dung dịch NaOH 20% có $m_{NaOH 20\%} = x.20\% = 0,2x$ (gam).

Do đó sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $m_{NaOH} = 4 + 0,2x$ (gam).

b) Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{4 + 0,2x}{50 + x}$ ($x > 0$)

Khối lượng dung dịch sau khi trộn là: $m_{dd} = 50 + x$ (gam)

Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{m_{NaOH}}{m_{dd}} = \frac{4 + 0,2x}{50 + x}$ ($x > 0$)

c) Hàm số $C(x)$ không có cực trị.

d) Nồng độ NaOH tăng theo x nhưng luôn nhỏ hơn 200 mg/ml.

$$\text{Vì } C'(x) = \frac{6}{(50 + x)^2} > 0 \forall x > 0$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 0,2x}{50 + x} = 0,2$$

Nên nồng độ NaOH tăng theo x nhưng luôn nhỏ hơn 0,2 g/ml hay 200 mg/ml.

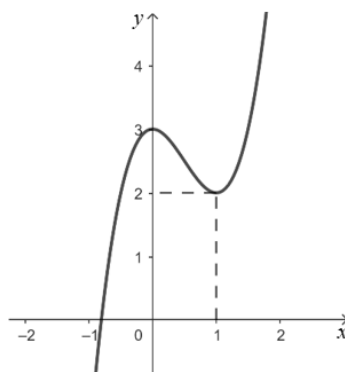
a) Đúng: Sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $4 + 0,2x$ (gam).

a) Sai: Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{4 + 0,2x}{50}$ ($x > 0$)

c) Đúng: Hàm số $C(x)$ không có cực trị.

d) Sai: Nồng độ NaOH tăng theo x nhưng luôn lớn hơn 200 mg/ml

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

d) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. ✓

b) Hàm số $f(x)$ không đạt cực tiểu tại $x = 0$. ✗

c) Hàm số $f(x)$ không đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. ✗

d) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. ✓

Câu 14: Xét đường thẳng $d: y = 4 - 2x$ và đường cong $(C): y = \frac{2x+4}{x+1}$.

a) Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong (C) .

b) (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.

c) (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

d) Đường thẳng d cắt đường cong (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

Điều kiện: $x \neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong:

$$\frac{2x+4}{x+1} = 4-2x \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy đường thẳng có 1 điểm chung với (C) .

Với $x = 0 \Rightarrow y = 4$ suy ra (C) cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$.

Với $y = 0 \Rightarrow x = -2$ suy ra (C) cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$.

a) Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong (C) . ✓

b) (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương. ✗

c) (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. ✓

d) Đường thẳng d cắt đường cong (C) tại hai điểm phân biệt. ✗

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-2	3	-2	$-\infty$

a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

c) Phương trình $f(x) + 3 = 0$ vô nghiệm.

d) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

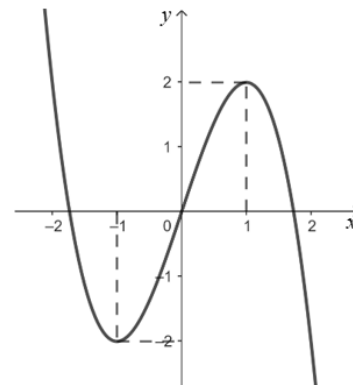
a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, suy ra nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. ✓

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, suy ra không đồng biến khoảng $(-2; +\infty)$. ✗

c) Do $f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3$ vô nghiệm. ✓

d) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị. ✓

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- c) Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2024}$ là 3.
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 2024$ tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$. ✗
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$. ✓
- c) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = \frac{1}{2024}$ có đúng 3 nghiệm phân biệt. ✓
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 2024$ tại 1 điểm. ✗

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2024}{x - 1}$ có đồ thị (C) .

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.
- c) (C) có 2 trục đối xứng.
- d) Trên (C) có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2024}{x - 1} = x - 1 + \frac{2023}{x - 1}; D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$. ✓
- b) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x - 1$. ✗
- c) (C) có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường tiệm cận. ✓
- d) $M(x; y) \in (C)$ có tọa độ nguyên khi $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 2023 : (x - 1) \end{cases}$ 2023 có 4 ước số nên có 4 điểm. ✓

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	4	$\nearrow$	$-\infty$

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

d) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y = 2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. ✗

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$. ✓

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$. ✗

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất. ✗

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4.

b) Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$g(x) = f(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1) = 2x(x^2 - 1) \left[(x^2 - 1) - 1 \right] \left[(x^2 - 1) + 4 \right]^3$$

$$= 2x(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 + 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$g(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu suy ra

a) Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4. ✗

b) Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2. ✓

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. ✓

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$. ✓

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C) .

a) (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

$$(C): y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024; D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 - 3m^2$$

$$y'' = 6x; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2024$$

$$y = \frac{1}{3}x \cdot y' + (-2m^2 + 2024)$$

Tại các điểm cực trị, $y' = 0$ nên đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số có phương trình

$$y = -2m^2x + 2024$$

$$\Rightarrow a = -2m^2; b = 2024$$

$$\Rightarrow S = a + b = -2m^2 + 2024 < 2024$$

Lưu ý khi $m = 0$ thì hàm số không có cực trị.

a) (C) luôn có hai điểm cực trị. ✗

b) Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định. ✓

c) Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. ✓ (hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm)

d) Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$. ✗ (dấu “=” không xảy ra)

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x$ có đồ thị (C) .

a) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 + 3$.

c) Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$y' = 3x^2 + 3$, suy ra hàm số không có cực trị vì $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4

$$\Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow x_0^3 + 3x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow f'(x_0) = 6$$

a) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6. ✓

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 + 3$. ✓

c) Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị. ✗

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$. ✗

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C) .

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.

b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2; -1)$.

d) $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$y = \frac{1-2x}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

Tiệm cận đứng: $x = -1$.

Tiệm cận ngang: $y = -2$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(-1; -2)$

$$M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; -2 + \frac{3}{x_0+1}\right)$$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng: $d_1 = |x_0 + 1|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang: $d_2 = |y_0 + 2| = \left| -2 + \frac{3}{x_0+1} + 2 \right| = \frac{3}{|x_0+1|}$.

$$d_1 \cdot d_2 = 3.$$

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$. ✓

b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$. ✗

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2; -1)$. ✗

d) $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3. ✓

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^{2025}(x-3)^{2024}, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

c) Biết $f(0) = 0$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm, nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm.

$$g(x) = f(x^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(x) &= 2x \cdot f'(x^2 - 1) = 2x(x^2 - 1) \left[(x^2 - 1) + 1 \right]^{2025} \left[(x^2 - 1) - 3 \right]^{2024} \\ &= 2x^{4051} (x^2 - 1) [x^2 - 4]^{2024} \end{aligned}$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ và 2 nghiệm bội chẵn nên có 3 cực trị.

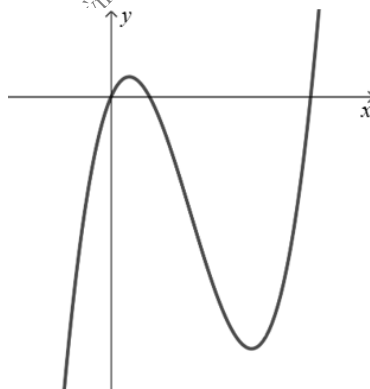
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$. ✓

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$. ✗

c) Biết $f(0) = 0$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. ✗

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có 3 điểm cực trị. ✓

Câu 24: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

“Nhánh bên phải” hướng lên $\Rightarrow a > 0$

Đồ thị qua gốc tọa độ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = d = 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ các cực trị

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$$

- a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu. ✗
- b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm. ✓
- c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt. ✓
- d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương. ✓