

NGUYÊN HÀM

TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 3$.

a) $\int f(x)dx = 3x + C$.

b) $\int [f(x) + x]^2 dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 1$ Thì $F(x) = 3x - 1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1) = 1$ Thì

$$F(1) + F(2) + \dots + F(100) = 14590.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Ta có: $\int 3dx = 3x + C$

b) $\int [f(x) + x]^2 dx = \int (3 + x)^2 dx = \int (x^2 + 6x + 9) dx = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + C$

c) Ta có:

$$F(1) = 1 \Leftrightarrow 3 + C = 1 \Leftrightarrow C = -2 \text{ vậy } F(x) = 3x - 2.$$

d) Ta có: $F(x) = 3x - 2$ nên $F(1) = 1; F(2) = 4; F(3) = 7; \dots; F(100) = 298$. là cấp số cộng với $u_1 = 1; d = 3$.

$$\text{Thì } F(1) + F(2) + \dots + F(100) = \frac{(1 + 298) \cdot 100}{2} = 14950.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^2$.

a) $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + C$.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3) = 1$ Thì $F(4) = \frac{4}{3}$.

c) $\int f(2x+1)dx = \int (2x+1)^2 dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

d) $\int [x \cdot f(x-2)]dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 + C$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Ta có: $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + C$

b) Ta có:

$$F(3) = 1 \Leftrightarrow \frac{3^3}{3} + C = 1 \Leftrightarrow C = -8 \text{ vậy } F(x) = \frac{x^3}{3} - 8 \text{ nên } F(4) = \frac{40}{3}.$$

c) $\int f(2x+1)dx = \int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2 + 4x + 1)dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$

d)

$$\int [x \cdot f(x-2)]dx = \int x \cdot (x-2)^2 dx = \int x \cdot (x^2 - 4x + 4)dx = \int (x^3 - 4x^2 + 4x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$ thỏa $f'(-1) = 0$ và $f(1) = -5$.

a) Ta có $\int f''(x)dx = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + C.$

b) Hàm số $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 12.$

c) Ta có $\int f'(x)dx = x^5 - x^4 + x^3 + 12x + C.$

d) Hàm số $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 12x - 8.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng. Ta có $\int f''(x)dx = \int (20x^3 - 12x^2 + 6x)dx = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + C.$

b) Sai. Ta có $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + C$. Do $f'(-1) = 0$ nên $12 + C = 0 \Leftrightarrow C = -12$.

Vậy $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 12.$

c) Sai. Ta có $\int f'(x)dx = \int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 12)dx = x^5 - x^4 + x^3 - 12x + C.$

d) Sai. Ta có $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 12x + C$. Do $f(1) = -5$ nên $-11 + C = -5 \Leftrightarrow C = 6$.

Vậy $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 12x + 6.$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 2^x$.

a) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2^x \cdot \ln 2$.

b) Mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đều có dạng $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$

c) $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 1$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(1) = 1$.

d) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi đó giá trị

biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2024) + F(2025) = \frac{2^{2026} - 1}{\ln 2}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng: $f'(x) = g(x).$

b) Sai: $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$, C là hằng số.

c) Sai: $F(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$; $F(1) = 1 \Rightarrow \frac{2}{\ln 2} + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{2}{\ln 2} \neq 1$.

d) Đúng:

Ta có $\int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, ta có $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2024) + F(2025)$

$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024} + 2^{2025}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2026} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2026} - 1}{\ln 2}$.

Câu 5: Cho $f(x) = x^2 + 2$ và $\int g(x) dx = \sin x + C$.

a) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$.

b) $\int [f(x) + g(x)] dx = \frac{x^3}{3} + 2x + \sin x + C$.

c) Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = x^2 + 2$, với $F(0) = 1$. Khi đó $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$.

d) $g(x) = -\cos x$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng: $\int f(x) dx = \int (x^2 + 2) dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$.

b) Đúng: $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = \frac{x^3}{3} + 2x + \sin x + C$.

c) Sai: $F(x) = \int f(x) dx = \int (x^2 + 2) dx = \frac{x^3}{3} + 2x + C$. Mà $F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + 1$.

d) Sai: $g(x) = \left(\int g(x) dx \right)' = (\sin x + C)' = \cos x$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2f(x) + e^{3x}$; $f(0) = 1$.

a) $\left[\frac{f(x)}{e^{2x}} \right]' = e^{3x}$.

b) $f(x) = e^{3x} + 3$.

c) $f'(x) \sin 3x = 3e^x \cdot \sin 3x$.

d) $\int f'(x) \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{3x} (\sin 3x - \cos 3x) + C$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Sai: $f'(x) = 2f(x) + e^{3x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)e^{2x} - 2f(x)e^{2x}}{e^{4x}} = e^x \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^{2x}} \right]' = e^x$.

b) Sai: Dễ thấy $\left[\frac{f(x)}{e^{2x}} \right]' = e^x \Rightarrow \int \left[\frac{f(x)}{e^{2x}} \right]' dx = \int e^x dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^{2x}} = e^x + C \Leftrightarrow f(x) = e^{2x}(e^x + C)$.

Do $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0$. Suy ra $f(x) = e^{3x}$.

c) Sai: $f'(x) \sin 3x = (e^{3x})' \cdot \sin 3x = 3e^{3x} \sin 3x$.

d) Đúng: $\int f'(x) \sin 3x dx = \int 3e^{3x} \sin 3x dx = \int e^{3x} \sin 3x d(3x) = e^{3x} \sin 3x - \int e^{3x} \cos 3x d(3x)$
 $= e^{3x} \sin 3x - e^{3x} \cos 3x - \int e^{3x} \sin 3x d(3x) = e^{3x} \sin 3x - e^{3x} \cos 3x - \int f'(x) \sin 3x dx$.

$\Rightarrow \int f'(x) \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{3x} (\sin 3x - \cos 3x) + C$.

Câu 7: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\square$ và

$\int_0^3 f(x) dx = F(3) - G(0) + a, (a > 0)$

a) $G(3) = F(3) + a$,

b) $\int f(x) dx = G(x) + a$.

c) $G'(x) = F'(x)$.

d) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$. Khi $S = 15$ thì $a = 15$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\square$ nên

$G(x) = F(x) + C, \forall x \in \square$, với C là hằng số.

Mặt khác $\int_0^3 f(x) dx = F(3) - F(0)$

Lại có $\int_0^3 f(x) dx = F(3) - G(0) + a$, suy ra $G(0) = F(0) + a$.

Do đó $a = C \Rightarrow G(x) = F(x) + a, \forall x \in \square$

a. Đúng.

b. Sai: $\int f(x) dx = G(x) - a$

c. Đúng.

d. Sai. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 0, x = 3$.

$S = \int_0^3 |G(x) - F(x)| dx \Leftrightarrow 15 = \int_0^3 |a| dx \Leftrightarrow 15 = 3a \Leftrightarrow a = 5$.

Câu 8: Cho hàm số $F(x) = x^3 + x^2 - x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

- a) Nếu hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $G(1)=1$ thì $G(x)=F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Nếu hàm số $H(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $H(1)=-3$ thì $H(x)=F(x)-3$, $x \in \mathbb{R}$.
- c) Nếu hàm số $K(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $K(0)=3$ thì $K(x)=F(x)+3$, $x \in \mathbb{R}$.
- d) Nếu hàm số $M(x)$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $M(-1)=4$ thì $M(x)=F(x)-1$, $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng: Vì $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $G(1)=1$ nên ta có $G(1) = F(1) + C \Leftrightarrow 1 = 1 + C \Leftrightarrow C = 0$.

Vậy $G(x) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Sai: Vì $H(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $H(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $H(1)=-3$ nên ta có $H(1) = F(1) + C \Leftrightarrow -3 = 1 + C \Leftrightarrow C = -4$.

Vậy $H(x) = F(x) - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Đúng: Vì $K(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $K(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $K(0)=3$ nên ta có $K(0) = F(0) + C \Leftrightarrow 3 = 0 + C \Leftrightarrow C = 3$.

Vậy $K(x) = F(x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

d) Sai: Vì $M(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $M(x) = F(x) + C$, với C là một hằng số. Mà $M(-1)=4$ nên ta có $M(-1) = F(-1) + C \Leftrightarrow 4 = 1 + C \Leftrightarrow C = 3$. Vậy

$M(x) = F(x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(1)=3$.

a) $\int (x^3 - 4x + 5) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C$.

b) Giá trị $F(0) = 2$

c) $\int [f(x) + f'(x)] dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + 9x + C$

d) $\int f(x+1) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Ta có: $\int (x^3 - 4x + 5) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + C$.

b) Ta có:

$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{13}{4} + C = 3 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{4}$ vậy $F(0) = -\frac{1}{4}$.

c) Ta có: $\int [f(x) + f'(x)] dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5x + x^3 - 4x + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2 + x + C$.

$$d) \int f(x+1)dx = \frac{(x+1)^4}{4} - 2(x+1)^2 + 5(x+1) + C = \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C.$$

Câu 10: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x}$.

a) $f(x) = 3x + 5 - \frac{2}{x}$.

b) $\int f(x)dx = 3 + x - 2\ln|x| + C$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 15$. Khi đó tìm được

$$F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 15.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(2) = 1$ và $G(5) + G(-5) = 10$. Khi đó tìm được $G(-10) = a\ln 2 + b\ln 5 + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Vậy $a + b + c = 75$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Sai vì $f(x) = \frac{(x+1)(3x-2)}{x} = \frac{3x^2 + x - 2}{x} = 3x + 1 - \frac{2}{x}$.

b) Sai vì $\int f(x)dx = \int \left(3x + 1 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C$.

c) Sai vì:

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = \int \left(3x + 1 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C.$$

$$\text{Do } F(3) = 15 \Leftrightarrow \frac{27}{2} + 3 - 2\ln 3 + C = 15 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 2\ln 3 - \frac{3}{2}.$$

d) Đúng vì:

$$\text{Ta có: } \int f(x)dx = \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln|x| + C = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln x + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ \frac{3x^2}{2} + x - 2\ln(-x) + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Do } \begin{cases} G(2) = 1 \\ G(5) + G(-5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 + 2 + C_1 = 1 \\ \frac{75}{2} + 5 - 2\ln 5 + C_1 + \frac{75}{2} - 5 - 2\ln 5 + C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -7 \\ C_2 = 4\ln 5 - 65 \end{cases}.$$

$$\text{Nên } G(-10) = 150 - 10 - 2\ln 10 + 4\ln 5 - 65 = 75 - 2\ln 2 + 2\ln 5 = a\ln 2 + b\ln 5 + c.$$

$$\text{Vậy } a + b + c = -2 + 2 + 75 = 75.$$

Câu 11: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3}$.

a) $f(x) = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

b) $\int f(x)dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(-1) = 0$. Khi đó tìm được $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}.$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 0$ và $G(-3) - G(3) = 2$. Khi đó tìm được $G(-2) = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy $a + b + c = 1093$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng vì $f(x) = \frac{3x^5 - 2x^3 + x^2 + 5x + 4}{x^3} = 3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3}.$

b) Đúng vì:

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$

c) Đúng vì:

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(3x^2 - 2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

Do $F(-1) = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}.$

Vậy $F(x) = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{2}.$

d) Sai vì:

Ta có: $\int f(x)dx = x^3 - 2x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C = \begin{cases} x^3 - 2x + \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_1 & \text{khi } x > 0 \\ x^3 - 2x + \ln(-x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$

Do

$\begin{cases} G(1) = 0 \\ G(-3) - G(3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ -27 + 6 + \ln 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + C_2 - 27 + 6 - \ln 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{5}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = \frac{275}{6} \end{cases}.$

Nên $G(-2) = -8 + 4 + \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{275}{6} = \frac{1013}{24} + \frac{1}{\log_2 e} = \frac{a}{b} + \frac{1}{\log_c e}.$

Vậy $a + b + c = 1013 + 24 + 2 = 1039.$

Câu 12: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2.$

a) $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$

b) $\int f(x)dx = x - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn $F(3) = 5$. Khi đó tìm được

$$F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 5.$$

d) Gọi $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết $G(1) = 5$ và $G(2) + G(-4) = 2025$.

Khi đó tìm được $F(-8) = \frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Vậy

$$a + b = 16123.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng vì $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$

b) Sai vì:

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

c) Sai vì:

Ta có $\int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

Do $F(3) = 5 \Leftrightarrow 3 - 2\ln 3 - \frac{1}{3} + C = 5 \Leftrightarrow C = 2\ln 3 + \frac{7}{3}.$

Vậy $F(x) = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln 3 + \frac{7}{3}.$

d) Đúng vì:

Ta có: $\int f(x)dx = x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C = \begin{cases} x - 2\ln x - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x > 0. \\ x - 2\ln(-x) - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Do

$$\begin{cases} G(1) = 5 \\ G(2) + G(-4) = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ 2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2} + 5 - 4 - 4\ln 2 + \frac{1}{4} + C_2 = 2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 6\ln 2 + \frac{8089}{4} \end{cases}$$

Nên $G(-8) = -8 - 6\ln 2 + \frac{1}{8} + 6\ln 2 + \frac{8089}{4} = \frac{16115}{8}.$

Suy ra: $a = 16115; b = 8.$

Vậy $a + b = 16115 + 8 = 16123.$

Câu 13: Cho $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = \frac{4}{3}.$

a) $F'(x) = f(x)$

b) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{3}$

c) $F(4) = 10$

d) Phương trình $F(x) = x + 1$ có 2 nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng theo định nghĩa nguyên hàm

$$b) \text{ Sai vì } F(x) = \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C$$

$$\text{Mà } F(0) = \frac{4}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + 1$$

$$c) \text{ Đúng vì } F(x) = \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + 1 \Rightarrow F(4) = 10$$

$$d) \text{ Sai vì } F(x) = x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{2x+1} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^3} = 3x \quad (\text{ĐK: } x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 = 9x^2 \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 9x^2 \Leftrightarrow 8x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \text{có 1 nghiệm } x > 0$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} + 2}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ sao cho $F(0) = 1$.

$$a) \int f^2(x) dx = e^x - e^{-x} + 2x$$

$$b) F(1) = 2\sqrt{e} + 1$$

$$c) F(x) = \sqrt{e^x - e^{-x} + 2x} + 1$$

d) Phương trình $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 3$ có nghiệm duy nhất $x = -2 \ln 2$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

$$a) \text{ Sai vì } \int f^2(x) dx = \int (e^x + e^{-x} + 2) dx = e^x - e^{-x} + 2x + C$$

$$b) \text{ Sai vì } F(x) = \int \sqrt{e^x + e^{-x} + 2} dx = \int \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2} dx = \int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx = 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + C$$

$$\text{Mà } F(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + 1 \Rightarrow F(1) = 2\sqrt{e} - \frac{2}{\sqrt{e}} + 1$$

$$c) \text{ Sai vì } F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + 1$$

$$d) \text{ Đúng vì } F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 3 \Leftrightarrow 2e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} + 1 = 2e^{\frac{x}{2}} - 3 \Leftrightarrow 2e^{-\frac{x}{2}} = 4 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = -2 \ln 2.$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \sin x$.

a) Ta có $\int f(x) dx = -\cos x + C$, với C là hằng số.

b) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(\pi) = 1$. Khi đó, $F(0) = -1$.

c) Ta có $\int F(x) dx = \sin x + C_1$, với C_1 là hằng số.

d) Phương trình $F(x) = f(x)$ có đúng 4 nghiệm trên đoạn $[0; 4\pi]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Ta có $\int f(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$.

b) Từ giả thiết, ta được $-\cos \pi + C = 1 \Leftrightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$ nên $F(x) = -\cos x \Rightarrow F(0) = -1$.

c) Ta có $\int F(x) dx = -\int \cos x dx = -\sin x + C_1$.

d) Ta có $F(x) = f(x) \Leftrightarrow -\cos x = \sin x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta xét $0 \leq \frac{-\pi}{4} + k\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{17}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Tức là, phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0; 4\pi]$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$.

a) Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \sin x - \cos x + C$, với C là hằng số.

b) Biết rằng, $F(0) = -1$. Khi đó, $F(x) = \sin x - \cos x$.

c) Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Hàm số $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là -2 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$.

b) Từ giả thiết, ta được $\sin 0 - \cos 0 + C = -1 \Leftrightarrow C = 0$ nên $F(x) = \sin x - \cos x$.

c) Ta có $F'(x) = \sin x + \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $F(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Ta thấy $\begin{cases} \sin x \geq -1 \\ -\cos x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \sin x - \cos x \geq -2$.

Trong đó, có $F(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 2 \neq 1$.

Từ đó, suy ra hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất là -2 .

Câu 17: Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

Phát biểu	Đúng	Sai
a) $F'(x) = (ax^2 + 2ax + 2bx + c)e^x$		
b) Tìm được $a = 1, b = -1, c = 2$.		
c) Giá trị $F(0) = 2$.		
d) $\int F(x).e^{x^3-3x^2+5x} dx = 2e^{x^3-3x^2+6x} + C$		

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) Ta có

$$F'(x) = \left[(ax^2 + bx + c)e^x \right]' = (ax^2 + 2ax + bx + b + c)e^x.$$

b) Theo bài ra ta có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^x$ nên $F'(x) = f(x)$ đồng nhất hệ số ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

c) Ta có $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.

Do đó $F(0) = (0^2 - 2 \cdot 0 + 2)e^0 = 2$.

d) Ta có $F(x) \cdot e^{x^3 - 3x^2 + 5x} = (x^2 - 2x + 2)e^x \cdot e^{x^3 - 3x^2 + 5x} = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^{x^3 - 3x^2 + 6x}$.

Do đó $\int F(x) \cdot e^{x^3 - 3x^2 + 5x} dx = \int (x^2 - 2x + 2) \cdot e^{x^3 - 3x^2 + 6x} dx$

$$= \frac{1}{3} \int e^{x^3 - 3x^2 + 6x} d(x^3 - 3x^2 + 6x)$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3 - 3x^2 + 6x} + C.$$

Câu 18: Một quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5 m với vận tốc được tính theo công thức $v(t) = -9,8t + 19,6$ (m/s).

a) Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t thì $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$.

b) Công thức tính độ cao quả bóng theo thời gian t là $h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

c) Khi quả bóng chạm đất thì $v(t) = 0$.

d) Sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng. Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t thì $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$.

b) Sai. Ta có $\int v(t) dt = \int (-9,8t + 19,6) dt = -4,9t^2 + 19,6t + C$.

Do đó $h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + C$.

Mà quả bóng được ném lên từ độ cao 24,5 m tức là tại thời điểm $t = 0$ thì $h(t) = 24,5$ nên $h(0) = 24,5 \Leftrightarrow C = 24,5$.

Vậy công thức tính độ cao $h(t)$ của quả bóng theo thời gian t là:

$$h(t) = -4,9t^2 + 19,6t + 24,5 \text{ (m)}.$$

c) Sai. Khi quả bóng chạm đất thì $h(t) = 0$.

d) Đúng. Ta có

$$-4,9t^2 + 19,6t + 24,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 5. \end{cases}$$

Mà $t > 0$ nên $t = 5$.

Vậy sau 5 giây kể từ khi được ném lên thì quả bóng chạm đất.

Câu 19: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $A'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ ($0 \leq t \leq 15$) trong đó t tính bằng giờ và $A'(t)$ tính bằng khách/ giờ.

Sau một giờ, 500 người có mặt tại lễ hội.

a) Công thức biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội là

$$A(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95 \quad (0 \leq t \leq 15).$$

b) Sau 3 giờ số lượng khách tham dự là 2205 người.

c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 người.

d) Tại thời điểm $t = 2$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng: Ta có $A(t) = \int A'(t) dt = \int (20t^3 - 300t^2 + 1000t) dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$

Mà $F(1) = 500 \Rightarrow C = 95$.

b) Sai: Sau 3 giờ số lượng khách tham dự là $A(3) = 2300$ người.

c) Đúng: Ta có $A'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5; t = 10 \in [1; 15]$

$$A(1) = 500; A(5) = 3220; A(10) = 95; A(15) = 28220$$

Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 người.

d) Sai: Ta có $A''(t) = 60t^2 - 600t + 1000 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{3} \in [1; 15]$

$$A'(1) = 720; A'(15) = 15000; A'\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{3}\right) = -962,25; A'\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{3}\right) = 962,25$$

Tại thời điểm $t = 15$ giờ thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất.

Câu 20: Một xe ô tô đang chạy với tốc độ 65 km/h thì người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m . Người lái xe phản ứng một giây, sau đó đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh, $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong khoảng thời gian $t(s)$ kể từ lúc đạp phanh.

a) Quãng đường ô tô đi được trong thời gian $t(s)$ là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.

b) $s(t) = -5t^2 + 20t$.

c) Thời gian từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là 20 giây.

d) Xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật trên đường.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng.

b) Đúng: $s(t) = \int v(t) dt = -5t^2 + 20t + C$

Lại có $s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = -5t^2 + 20t$.

c) Sai: Khi ô tô dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow -10t + 20 = 0 \Rightarrow t = 2(s)$.

d) Đúng: Quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là

$$s(t) = \int_0^2 (-10t + 20) dt = 20(m)$$

Quãng đường xe ô tô đi được từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật đến khi dừng hẳn là $65 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{3600} + 20 = 38,0(5)m < 50m$. Vậy xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật trên đường.

Câu 21: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 4\cos t$ (m/s²). Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0.

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 4\cos t$ (m/s).

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là 2 m/s.

c) Tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2}$ m/s

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) là $2\sqrt{2}$ (m/s²)

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai: Ta có $v(t) = \int a(t)dt = \int 4\cos t dt = 4\sin t + C$. Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 0$ hay $C = 0$. Vậy $v(t) = 4\sin t$.

b) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sin \frac{\pi}{6} = 2$ (m/s).

c) Sai: Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ (m/s).

d) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s) là: $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$ (m/s²).

Câu 22: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15m/s$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3 m/s^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai.

$$v(t) = \int a(t) dt$$

b) Đúng.

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

c) Sai.

$$v(t) = \int a(t) dt = \int -3dt = -3t + C.$$

$$v(0) = -3.0 + C = 15 \Rightarrow C = 15. \text{ Suy ra } v(t) = -3t + 15.$$

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$ giây.

d) Đúng.

$$s(t) = \int v(t) dt = \int -3t + 15 dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C.$$

$$s(0) = -\frac{3}{2}0^2 + 15.0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$s(5) = 37,5 \text{ mét.}$$

Câu 23: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ).

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3} - 8t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai.

$$\text{Ta có: } \int (t^2 - 8t) dt = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C.$$

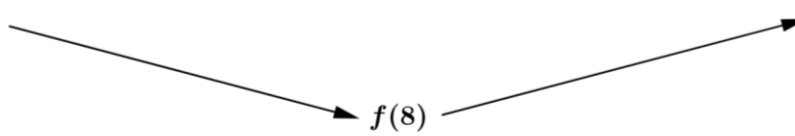
b) Sai.

$$\text{Ta có: } f'(t) > 0 \text{ khi } 8 < t < 10 \text{ và } f'(t) < 0 \text{ khi } 3 < t < 8.$$

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng.

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3	8	10
$f'(t)$	–	0	+
$f(t)$			

d) Đúng.

$$f(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C. \text{ Do } f(3) = 50 \Rightarrow \frac{3^3}{3} - 4.3^2 + C = 50 \Rightarrow C = 77.$$

Suy ra $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 77 \Rightarrow f(6) = 5$.