



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



IV HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (1;6;5)$
- b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;1)$
- c) $(ABC): x - y + z - 4 = 0$
- d) $O \in (ABC)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) $\overrightarrow{AB} = (1;6;5)$.

$$A(1;1;4), B(2;7;9) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;6;5).$$

ĐÚNG.

b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;1)$.

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (14; -14; 14) = 14(1; -1; 1) \text{ nên } (ABC) \text{ có 1 vector pháp tuyến là } \vec{n} = (1; -1; 1).$$

ĐÚNG.

c) $(ABC): x - y + z - 4 = 0$

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n} = (1;-1;1)$ nên có phương trình $x - y + z - 4 = 0$.

ĐÚNG.

d) $O \in (ABC)$.

Tọa độ O không thỏa phương trình (ABC) nên $O \notin (ABC)$.

SAI.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1); B(1;-2;3); C(2;-1;2)$.

- a) Ba điểm A, B, C đã cho thẳng hàng.
- b) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C đã cho.

c) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 3)$.

d) Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; -3; 2); \overrightarrow{AC} = (1; -2; 1)$ và $\frac{0}{1} \neq \frac{-3}{-2} \Rightarrow \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Do đó ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Vậy a) **Sai**.

b) Ta có ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên tồn tại một mặt duy nhất qua ba điểm này. Vậy b) **Sai**.

c) Ta có: VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 2; 3)$. Vậy c) **Đúng**.

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm một vectơ pháp tuyến là: $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$ hay $(ABC): x + y + z - 6 = 0$.

Vậy d) **Đúng**.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là

$(P): x - 2y + 3z + 1 = 0$ và $(Q): 2x - 4y + 6z + 1 = 0$.

a) Các vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng trên cùng phương.

b) Hai mặt phẳng (P) và (Q) đều đi qua điểm $M(1; 1; 2)$.

c) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

$$4x + 8y + 12z - 5 = 0.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Ta có: một VTPT $\vec{n}_P = (1; -2; 3)$, một VTPT $\vec{n}_Q = (2; -4; 6)$ và $\vec{n}_Q = 2\vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_P; \vec{n}_Q$ cùng phương. Vậy a) **Đúng**.

b) Ta có $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow (P) // (Q)$. Do đó hai mặt phẳng (P) và (Q) không có điểm chung.

Vậy b) **Sai**.

c) Ta có $(P) // (Q)$.

$$\text{Lấy điểm } N(1; 1; 0) \in (P) \Rightarrow d((P), (Q)) = d(N, (Q)) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2}} = \frac{\sqrt{14}}{28}.$$

Vậy c) **Sai**.

d) Ta có $(P) // (Q)$. Lấy $N(1; 1; 0) \in (P); P\left(1; 0; -\frac{1}{2}\right) \in (Q)$. Gọi I là trung điểm

$MN \Rightarrow I\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Ycbt $\Rightarrow (R)$ qua I và nhận vectơ $\vec{n}(1; 2; 3)$ làm một vectơ pháp tuyến là:

$$1(x-1) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) + 3\left(z + \frac{1}{4}\right) = 0 \text{ hay } (R): 4x + 8y + 12z - 5 = 0.$$

Vậy d) **Đúng**.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có VTPT $\vec{n} = (4;0;-5)$.

a) Mặt phẳng (P) có phương trình là $4x - 5z + 4 = 0$.

b) Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;5)$.

c) Mặt phẳng $(Q): 4x - 5z + 4 = 0$ song song với (P) .

d) Cho điểm $A(-2;1;3)$. Khi đó $d(A, (P)) = \frac{19}{\sqrt{41}}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

Phương trình mặt phẳng $(P): 4(x+1)+0(y-2)-5(z-0)=0 \Leftrightarrow 4x-5z+4=0$.

b) Sai.

Thay điểm M vào phương trình mặt phẳng $(P): 4x - 5z + 4 = 0$ ta thấy không thỏa mãn

c) sai.

$(Q) \equiv (P)$

d) Đúng.

$$d(A, (P)) = \frac{|4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{19}{\sqrt{41}}$$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-3)$ và các $\vec{u} = (-1;-2;5)$, $\vec{v} = (3;-1;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và nhận $\vec{u}, \vec{v}$ làm cặp vector chỉ phương.

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = (9;13;7)$.

b) Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 9x + 13y + 7z - 2 = 0$.

c) Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;-2;-3)$.

d) Mặt phẳng (R) đi qua M song song với (α) có phương trình $x + 2y + 5z + 18 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

a) Đúng.

Mặt phẳng (α) nhận $\vec{u}, \vec{v}$ làm cặp vector chỉ phương nên (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = [\vec{u}, \vec{v}] = (9;13;7)$.

b) Sai.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): 9(x-2)+13y+7(z+3)=0 \Leftrightarrow 9x+13y+7z+2=0$.

c) Sai.

Thay điểm $M(1;-2;-3)$ vào phương trình mặt phẳng $(\alpha): 9x+13y+7z+2=0$ ta thấy không thỏa mãn.

d) Sai.

Mặt phẳng có dạng $(R): 9x+13y+7z+d=0 (d \neq 2)$

Vì mặt phẳng qua $M(1;-2;-3)$ nên thay vào ta suy ra $d=38(t/m)$

Vậy phương trình mặt phẳng $(R): 9x+13y+7z+38=0$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt ba trục tọa độ tại các điểm A, B, C khác gốc tọa độ O sao cho tam giác ABC có trục tâm M .

a) Hình chiếu của điểm M trên trục Ox là $H(-2;0;0)$.

b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;3)$.

c) Phương trình mặt phẳng (P) là $2x-y-3z+14=0$

d) Mặt phẳng $(Q): x-y+z-3=0$ vuông góc với (P)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng.

b) Đúng.

Do tứ diện $OABC$ vuông tại O và $H(-2;0;0)$ là trục tâm nên $OH \perp (ABC)$, hay $OH \perp (P)$

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{HO}=(2;-1;3)$.

c) Sai.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-2;1;3)$ có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{HO}=(2;-1;3)$ là:

$$2(x+2)-(y-1)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-3z+14=0$$

d) Đúng.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2=(2;-1;-3)$.

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1.2 + (-1).(-1) + 1.(-3) = 0.$$

$$\Rightarrow (P) \perp (Q)$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt có phương trình là

$(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

b) Điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) có tọa độ là

$M(0; -3; 0)$.

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (a, b, -2)$. Khi đó $a + b = -2$.

d) Phương trình mặt phẳng (R) song song và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\sqrt{3}$ là: $x + y - z + 2 = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có: một VTPT $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$, một VTPT $\vec{n}_Q = (1; -1; 1)$ và $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ hai mặt phẳng (P) và (Q) không vuông góc với nhau.

Vậy a) **Sai**.

b) Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0)$.

Theo giả thiết: $d(M(P)) = d(M(Q)) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -3 \Rightarrow M(0; -3; 0)$.

Vậy b) **Đúng**.

c) Ta có: một VTPT $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$, một VTPT $\vec{n}_Q = (1; -1; 1)$

$$\begin{cases} (\alpha) \perp (P) \\ (\alpha) \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_P \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_Q \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (0; -2; -2) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -2.$$

Vậy c) **Đúng**.

d) Ta có $(R) // (P) \Rightarrow (R): x + y - z + m = 0$, với $m \neq 1$. Lấy $M(0; 0; 1) \in (P)$.

$d((P), (R)) = \sqrt{3} \Rightarrow d(M, (R)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Có hai mặt phẳng (R) thỏa mãn: $(R_1): x + y - z + 4 = 0; (R_2): x + y - z - 2 = 0$.

Vậy d) **Sai**.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 1 = 0$. (P) là mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

a) Mọi mặt phẳng có phương trình dạng $x + 2y - z + m = 0$ (m là tham số thực) đều song song với (α) .

b) (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - 3y - 4z = 0$.

c) (P) có phương trình dạng $ax + by + cz + d = 0$ với $\frac{a}{d} = \frac{1}{5}$.

d) (P) đi qua điểm $M(1; 2; -1)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) **Sai**

Nếu $m = 1$ thì mặt phẳng đó sẽ trùng với mặt phẳng (α) .

b) **Đúng**

+) Do $(P) // (\alpha) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n_p} = (1; 2; -1)$. VTPT $\vec{n_q} = (2; -3; -4)$.

+) Ta có: $\vec{n_p} \cdot \vec{n_q} = 1.2 + 2.(-3) + (-1).(-4) = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$.

c) **Đúng**

Do $(P) // (\alpha) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n_p} = (1; 2; -1)$ và (P) đi qua điểm $A(2; -3; 1)$

$$\Rightarrow (P): 1.(x-2) + 2.(y+3) - 1.(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow (P): x + 2y - z + 5 = 0 \Rightarrow a = 1; d = 5 \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{1}{5}.$$

d) **Sai**

Theo trên ta biết $(P): x + 2y - z + 5 = 0$

Thay tọa độ điểm $M(1; 2; -1)$ vào pt của (P) ta được: $1 + 2.2 - (-1) + 5 = 0$ (vô lý).

Vậy (P) không đi qua M .

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2; 1; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 1 = 0$

a) Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (Oxy) có phương trình dạng $z - 2 = 0$.

b) Mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình dạng $4x - 2y - 3 = 0$

c) Mặt phẳng đi qua A và song song với mp (α) có khoảng cách đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{5}$.

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn OA và song song với (α) . Hình chiếu của điểm A trên mp (P) là điểm $H\left(-1; \frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) **Đúng.**

Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Do $(Q) // (Oxy) \Rightarrow \vec{n_q} = \vec{k} = (0; 0; 1)$

$$\Rightarrow (Q): 0.(x+2) + 0.(y-1) + 1.(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow (Q): z - 2 = 0.$$

b) **Sai.**

Dễ thấy mặt phẳng đã cho song song với (α) nhưng không đi qua điểm A (vì khi thay tọa độ điểm A vào phương trình mặt phẳng thì không thỏa mãn: $4.(-2) - 2.1 - 3 = 0$ (vô lý))

c) **Đúng**

Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm.

+) Do $(R) // (\alpha) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n_r} = (2; -1; 0)$ và (R) đi qua điểm $A(-2; 1; 2)$

$$\Rightarrow (R): 2.(x+2) - 1.(y-1) + 0.(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow (R): 2x - y + 5 = 0.$$

$$+) d(O;(R)) = \frac{|2.0 - 1.0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}.$$

d) Đúng.

$$+) \text{ Trung điểm của } OA \text{ là điểm } I\left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$$

$$+) \text{ Do } (P) // (\alpha) \Rightarrow \vec{n_p} = (2; -1; 0) \text{ và } (P) \text{ qua } I$$

$$\Rightarrow (P): 2.(x+1) - 1.\left(y - \frac{1}{2}\right) + 0.(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow (P): 4x - 2y + 5 = 0$$

$$+) \text{ Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng qua } A \text{ và vuông góc với } (P) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } H \text{ là giao điểm của } \Delta \text{ và } (P). \text{ Xét phương trình: } 4.(-2 + 4t) - 2.(1 - 2t) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Thay } t = \frac{1}{4} \text{ vào phương trình } \Delta \text{ ta được tọa độ điểm } H\left(-1; \frac{1}{2}; 2\right).$$

$$\text{Vậy hình chiếu của điểm } A \text{ trên } (P) \text{ là điểm } H\left(-1; \frac{1}{2}; 2\right).$$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(2; -3; 1)$, $B(1; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$, $D(1; 0; -1)$.

a) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Oxz) có phương trình là $y - 3 = 0$.

b) Mặt phẳng đi qua điểm A và song song với mặt phẳng trung trực của BC có phương trình là $2x + y + 3z - 4 = 0$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trọng tâm của $\triangle ABC$ và song song với mp $(\beta): z - 2 = 0$.

Khoảng cách từ điểm A đến (α) bằng $\frac{1}{3}$.

d) Mặt phẳng đi qua điểm D và song song với mặt phẳng (ABC) có phương trình là $11x - y - 7z - 18 = 0$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai

$$\text{Gọi } (P) \text{ là mp cần tìm. Do } (P) // (Oxz) \Rightarrow \vec{n_p} = \vec{j} = (0; 1; 0)$$

$$\text{Và } (P) \text{ đi qua điểm } A(2; -3; 1) \Rightarrow (P): 0.(x-2) + 1.(y+3) + 0.(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow (P): y + 3 = 0$$

b) Đúng

$$+) \text{ Trung điểm } BC \text{ là } I\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \overline{BC} = (2; 1; 3)$$

$$\Rightarrow \text{mp trung trực của } BC \text{ là } (Q): 2.(x-2)+1.\left(y-\frac{1}{2}\right)+3.\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow (Q): 2x+y+3z-6=0.$$

+) Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm. Do $\Rightarrow (R): 2.(x-2)+1.(y+3)+3.(z-1)=0$

$$\Rightarrow (R): 2x+y+3z-4=0 \text{ dễ thấy } (R) \parallel (Q)$$

c) **Đúng.**

+) Trọng tâm ΔABC là điểm $G\left(2; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

+) Do $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (0; 0; 1)$ và (α) đi qua điểm G

$$\Rightarrow (\alpha): 0.(x-2)+0.\left(y+\frac{2}{3}\right)+1.\left(z-\frac{2}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow (\alpha): 3z-2=0.$$

+) $d(A; (\alpha)) = \frac{|3.1-2|}{\sqrt{0^2+0^2+3^2}} = \frac{1}{3}.$

d) **Sai**

+) $\vec{AB} = (-1; 3; -2), \vec{AC} = (1; 4; 1) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_{ABC} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (11; -1; -7)$

+) Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm. Do $(Q) \parallel (ABC) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_Q = \vec{n}_{ABC} = (11; -1; -7)$ và (Q) đi qua điểm $D(1; 0; -1) \Rightarrow (Q): 11.(x-1)-1.(y-0)-7.(z+1)=0$

$$\Rightarrow (Q): 11x-y-7z-18=0$$

Nhận thấy tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình (Q) (vì: $11.2-1.(-3)-7.1-18=0$) nên mp (Q) chính là mp (ABC) .

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 2; -2)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-1=0, (\beta): x+2y-2z+5=0$.

a) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với (α) . Giao điểm của (P) và trục Ox là $I(8; 0; 0)$.

b) Mặt phẳng song song và cách đều 2 mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình là $(\alpha): x+2y-2z+2=0$.

c) Mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng (β) có phương trình là $x+2y-2z+11=0$.

d) Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (α) . Mặt phẳng đi qua điểm H và song song với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là $9x+7=0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) **Đúng.**

+) $(P): 1.(x-0)+2.(y-2)-2.(z+2)=0 \Leftrightarrow (P): x+2y-2z-8=0$.

+) Thay $y=0, z=0$ vào phương trình $(P) \Rightarrow x=8$. Vậy (P) cắt trục Ox tại $I(8; 0; 0)$.

b) **Đúng.**

+) Trên (α) lấy điểm $M(1;0;0)$, trên (β) lấy điểm $N(-5;0;0)$. Trung điểm MN là $E(-2;0;0)$.

+) Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm $\Rightarrow (P)$ đi qua E và song song với (α)

$$\Rightarrow (P): 1 \cdot (x+2) + 2 \cdot (y-0) - 2 \cdot (z-0) = 0$$

$$\Rightarrow (P): x + 2y - 2z + 2 = 0.$$

c) **Đúng.**

+) Trên (α) lấy điểm $M(1;0;0)$, trên (β) lấy điểm $N(-5;0;0)$. Gọi F là điểm đối xứng với M qua $N \Rightarrow F(-11;0;0)$.

+) Gọi (Q) là mặt phẳng đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng $(\beta) \Rightarrow (Q)$ đi qua F

$$\text{và song song với } (\alpha) \Rightarrow (Q): 1 \cdot (x+11) + 2 \cdot (y-0) - 2 \cdot (z-0) = 0$$

$$\Rightarrow (Q): x + 2y - 2z + 11 = 0.$$

d) **Đúng.**

$$+) \text{ Gọi } \Delta \text{ là đường thẳng đi qua điểm } A \text{ và vuông góc với } (\alpha) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 - 2t \end{cases}.$$

$$+) \text{ Ta có } H = \Delta \cap (\alpha). \text{ Xét phương trình: } t + 2 \cdot (2 + 2t) - 2 \cdot (-2 - 2t) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{7}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; -\frac{4}{9}\right).$$

$$+) \text{ Gọi } (R) \text{ là mặt phẳng đi qua điểm } H \text{ và song song với mặt phẳng } (Oyz) \Rightarrow \vec{n}_R = \vec{i} = (1;0;0)$$

$$\Rightarrow (R): 1 \cdot \left(x + \frac{7}{9}\right) + 0 \cdot \left(y - \frac{4}{9}\right) + 0 \cdot \left(z + \frac{4}{9}\right) = 0 \Rightarrow (R): 9x + 7 = 0.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$
 $(Q): 3x - y + z - 5 = 0$ và $(R): 2x + 4y - mz - 2 = 0$.

a) $(P) // (Q)$

b) (a) qua O và song song (P) có phương trình là $(a): x + 2y - z = 0$

c) $(P) // (R)$ khi và chỉ khi $m = 2$

d) $(P) \perp (R)$ khi và chỉ khi $m = -10$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) $(P) // (Q)$

$$(P) \text{ có VTPT } \vec{n}_1 = (1; 2; -1), (Q) \text{ có VTPT } \vec{n}_2 = (3; -1; 1)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{ nên } (P) \perp (Q).$$

SAI.

b) (a) qua O và song song (P) có phương trình là $(a): x + 2y - z = 0$.

$(a) // (P)$ nên $(a): x + 2y - z + D = 0$.

$O \in (a) \Rightarrow D = 0$. Vậy $(a): x + 2y - z = 0$

ĐÚNG.

c) $(P) // (R)$ khi $m = 2$.

(R) có VTPT $\vec{n}_3 = (2; 4; -m)$.

$$(P) // (R) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_3 \\ -1 \neq k(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = \frac{1}{2} \text{ (vô lý)} \\ k \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy không có giá trị của m .

SAI.

d) $(P) \perp (R)$ khi $m = -10$.

$$(P) \perp (R) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-m) = 0 \Leftrightarrow m = -10.$$

ĐÚNG.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho $M(-2; -4; 3)$ và $(P): 2xy + 2z3 = 0$, $(Q): 2xy + 2z6 = 0$.

a) $d(M, (P)) = 2$

b) M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q)

c) $d((P), (Q)) = 1$

d) (a) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(a): 2x - y + 2z - 9 = 0$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

a) $d(M, (P)) = 2$

$$d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

SAI.

b) M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$d(M, (Q)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 0 \Rightarrow M \in (Q)$$

SAI.

c) $d((P), (Q)) = 1$.

$$d((P), (Q)) = d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

ĐÚNG.

d) (a) song song và cách (Q) một khoảng bằng 2 có phương trình là $(a): 2x - y + 2z - 9 = 0$.

$(a) // (Q)$ nên $(a): 2x - y + 2z + D = 0$.

$$d((a), (Q)) = 2 \Leftrightarrow d(M, (a)) \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-2) + 4 + 2 \cdot 3 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2 \Leftrightarrow D = 0$$

Vậy $(a): (P): 2x - y + 2z = 0$

SAI.

Câu 14: Cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$; $(Q): 4x - 2y + 4z + 1 - m = 0$ và điểm $M(2; 1; 5)$.

a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.

b) Khi $m = 0$, khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.

c) Khi $m = 3$, khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.

d) Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến mặt phẳng } (P): d(M; (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{8}{3}.$$

ĐÚNG.

b) Với $m = 0$ thì khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.

Với $m = 0$ thì $(Q): 4x - 2y + 4z + 1 = 0$.

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến mặt phẳng } (Q): d(M; (Q)) = \frac{|4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{9}{2}.$$

ĐÚNG.

c) Với $m = 3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.

Với $m = 3$ thì $(Q): 4x - 2y + 4z - 2 = 0 \Leftrightarrow (Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$.

$$\text{Chọn } N(0; -5; 0) \in (P). \text{ Vì } (P) // (Q) \text{ nên } d((P); (Q)) = d(N; (Q)) = \frac{|2 \cdot 0 - (-5) + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}.$$

SAI.

d) Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.

$$\text{khoảng cách từ } M \text{ đến mặt phẳng } (Q) \text{ bằng } 1 \Leftrightarrow d(M; (Q)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|4.2 - 2.1 + 4.5 + 1 - m|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|27 - m|}{6} = 1 \Leftrightarrow |27 - m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 27 - m = 6 \\ 27 - m = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21 \\ m = 33 \end{cases}.$$

Vậy tổng các giá trị của m bằng $21 + 33 = 54$.

SAI.

Câu 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 6 = 0$.

a) Véc tơ $\vec{n} = (1; 2; 2)$ là một vector pháp tuyến của (α) .

b) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y + 2z + 15 = 0$

c) Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y = 0$.

d) Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng thì tọa độ $M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng.

Theo định nghĩa véc tơ $\vec{n} = (1; 2; 2)$ là một vector pháp tuyến của (α) .

b) Sai.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) nên:

$$\vec{n}_\beta = (1; 2; 2), \text{ do đó } (\beta) \text{ có phương trình: } x - 1 + 2(y - 2) + 2(z - 5) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 15 = 0.$$

c) Đúng.

Phương trình mặt phẳng (γ) đi qua hai điểm O và A đồng thời vuông góc với mặt phẳng (α)

$$\text{nên } \begin{cases} \vec{n}_\beta \perp \vec{OA} = (1; 2; 5) \\ \vec{n}_\beta \perp \vec{n} = (1; 2; 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\beta = [\vec{OA}, \vec{n}] = (-6; 3; 0) = -3(2; -1; 0), \text{ do đó } (\beta) \text{ có phương trình:}$$

$$2x - y = 0.$$

d) Đúng.

Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho A, O, M thẳng hàng

$$\text{Do } M \in (\alpha): x = 6 - 2y - 2z \Rightarrow M(6 - 2b - 2c; b; c)$$

Vì A, O, M thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{OM}(6-2b-2c; b; c) = k \cdot \overrightarrow{OA} = (k; 2k; 5k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2b-2c = k \\ b = 2k \\ c = 5k \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{5} \\ c = 2 \Rightarrow M\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; 2\right) \\ k = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -2); B(2; 1; 2); C(3; -2; 1)$.

a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

b) Phương trình mặt phẳng (P) là $13x + 5y - 2z + 27 = 0$.

c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và nhận $\overrightarrow{BC}$ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: $1(x+1)x - 3(y+2) - 1(z-2) = 0$.

d) Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $E; F; K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên trục $Ox; Oy; Oz$ có phương trình $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng.

$$\text{Vì } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 4) \\ \overrightarrow{AC} = (2; -4; 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}_p = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (13; 5; -2).$$

b) Sai.

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (P) \text{ là } 13(x-1) + 5(y-2) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 13x + 5y - 2z - 27 = 0.$$

c) Sai.

$$\text{Phương trình mặt phẳng đi qua điểm } A(1; 2; -2) \text{ và nhận } \overrightarrow{BC} = (1; -3; -1) \text{ làm véc tơ pháp tuyến có dạng: } 1(x-1)x - 3(y-2) - 1(z+2) = 0.$$

d) Đúng.

$$\text{Tọa độ ba điểm } E(1; 0; 0); F(0; 2; 0); K(0; 0; -2) \text{ lần lượt là hình chiếu vuông góc của } A(1; 2; -2)$$

$$\text{lên trục, nên mặt phẳng } (EFK) \text{ có phương trình } \frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1.$$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; 3), B(3; 0; 2), C(0; -2; 1)$.

a) Các điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{a} = (1; 4; 5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) chứa điểm $M(1; 2; 2)$.

d) Mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách C một khoảng lớn nhất có phương trình $3x + 2y + z - 11 = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1), \overrightarrow{AC} = (-2; -3; -2)$.

Vì $\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC}$.

Suy ra các điểm A, B, C không thẳng hàng.

Đúng.

b) Ta có một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-1; 4; -5)$.

Vì $\vec{n}$ không cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{a} = (1; 4; 5)$ không là vector pháp tuyến của (ABC) .

Sai.

c) Ta có mặt phẳng (ABC) qua điểm $A(2; 1; 3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 4; -5)$ nên có phương trình $x - 4y + 5z - 13 = 0$.

Vì $1 - 4.2 + 5.2 - 13 = -10 \neq 0$ nên $M \notin (ABC)$.

Sai.

d) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên mặt phẳng (P) và đường thẳng AB .

Ta có $CH = d(C, (P)) \leq CK \Rightarrow d(C, (P))$ lớn nhất khi $H \equiv K$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

Ta có $\vec{n}_P = [\vec{n}, \overrightarrow{AB}] = (-9; -6; -3)$

Suy ra $(P): 3x + 2y + z - 11 = 0$.

Đúng.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 2; 1), B(-2; 1; 3), C(2; -1; 1)$ và $D(0; 3; 1)$.

a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x + y + 5z - 10 = 0$.

b) Bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện.

c) Mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vector pháp tuyến là $\vec{a} = (4; -2; 7)$.

d) Có 2 mặt phẳng đi qua 2 điểm A, B sao cho khoảng cách từ C và D đến mặt phẳng đó bằng nhau. Cả 2 mặt phẳng này đều đi qua điểm $M(1; 2; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -3; 0)$ suy ra $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6; 2; 10)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $3x + y + 5z - 10 = 0$.

Đúng.

b) Ta có $3.0 + 3 + 5.1 - 10 = -2 \neq 0$ nên $D \notin (ABC)$.

Do đó bốn điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện.

Đúng.

c) Ta có mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-8; -4; -14)$.

Vì $\vec{n}$ không cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{a} = (4; -2; 7)$ không là vectơ pháp tuyến của (P) .

Sai.

d) Trường hợp 1: (P) qua hai điểm A, B và song song với CD , khi đó:

(P) có vectơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-8; -4; -14)$ và $A \in (P) \Rightarrow (P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0$.

Vì $4.1 + 2.2 + 7.1 - 15 = 0$ nên $M \in (P)$.

Trường hợp 2: (Q) qua hai điểm A, B cắt CD tại trung điểm I của đoạn CD .

Ta có $I(1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (0; -1; 0)$, vectơ pháp tuyến của (Q) là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (2; 0; 3)$ nên phương trình $(Q): 2x + 3z - 5 = 0$.

Vì $2.1 + 3.1 - 5 = 0$ nên $M \in (Q)$.

Đúng.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$.

a) Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$ và đi qua A .

b) Phương trình mặt phẳng qua A và song song (P) là $2x + y - 2z + 6 = 0$.

c) Mặt phẳng qua gốc toạ độ O , điểm A và vuông góc (P) có phương trình là $2x - 2y + z = 0$.

d) Có tất cả hai mặt phẳng song song với (P) và có khoảng cách đến A bằng 2.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Thay toạ độ điểm $A(-1; 0; 2)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $-2 - 4 = 0$ (vô lý).

Vậy a) **SAI**.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song (P) , suy ra (α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -2)$.

Phương trình (α) là: $2(x+1) + 1(y-0) - 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 6 = 0$.

Vậy b) **ĐÚNG**.

c) Gọi (β) là mặt phẳng qua O, A và vuông góc (P) . Ta có $\vec{n}_p = (2; 1; -2), \overrightarrow{OA} = (-1; 0; 2)$.

(β) có VTPT là $\vec{n}_\beta = [\vec{n}_p, \overrightarrow{OA}] = (2; -2; 1)$.

Phương trình của (β) là: $2(x-0) - 2(y-0) + 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z = 0$.

Vậy c) **ĐÚNG**.

d) Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng $2x + y - 2z + d = 0$.

$$\text{Ta có } d(A, (Q)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2(-1) + 0 - 2.2 + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow |d - 6| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} d - 6 = 6 \\ d - 6 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 12 \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy có đúng một mặt phẳng thoả ycbt, suy ra d) **SAI**.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3)$

a) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (3; 3; 2)$.

- b) Mặt phẳng đi qua C và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là $x - y = 0$.
- c) Mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có phương trình là $x + y - 3z + 2 = 0$.
- d) Gọi $M(a; b; c) \in (Oyz)$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất, khi đó $3(a + b) + c = 5$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Suy ra một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (3; 3; 2)$.

Vậy a) **ĐÚNG**.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua C và vuông góc với AB .

(α) có VTPT là $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0) = -2(1; -1; 0)$.

Phương trình của (α) là $1(x - 0) - 1(y - 0) + 0(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$.

Vậy b) **ĐÚNG**.

c) Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (ABC) có VTPT của (β) là: $\vec{n}_\beta = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = (4; 4; -12) = 4(1; 1; -3)$.

Phương trình của (β) là: $1(x - 2) + 1(y - 0) - 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z - 2 = 0$.

Vậy c) **SAI**.

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$.

Vì $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}|$, suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}|_{\min}$.

Mà $M \in Oyz \Rightarrow M$ phải là hình chiếu của G lên $Oyz \Rightarrow M\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$.

$\Rightarrow 3(a + b) + c = 2 + 1 = 3$.

Vậy d) **SAI**.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): (4 - a)x - (a + 3)y + z + 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 3x - 4y + z + 3 = 0$.

- a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) song song với nhau khi $a = 1$.
- b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc với nhau khi $a = 2$.
- c) Không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.
- d) Mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng trên có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; -7)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Khi $a = 1$, ta có $\vec{n}_P = (3; -4; 1)$ và $\vec{n}_Q = (3; -4; 1)$. Vì $\vec{n}_P = \vec{n}_Q$ và $1 \neq 0$ nên $(P) // (Q)$.

b) Khi $a = 2$, ta có $\vec{n}_P = (2; -5; 1)$ và $\vec{n}_Q = (3; -4; 1)$. Vì $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 2 \cdot 3 + (-5) \cdot (-4) + 1 \cdot 1 = 27 \neq 0$ nên (P) và (Q) không vuông góc với nhau.

c) Hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau khi $\frac{4-a}{3} = \frac{-(a+3)}{-4} = \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$. Vì $1 \neq \frac{1}{3}$ nên không có giá trị nào của a để hai mặt phẳng trên trùng nhau.

d) Ta có: $\vec{n}_p \cdot \vec{n} = (4-a) \cdot 1 + (a+3) \cdot 1 - 7 = 0$ và $\vec{n}_q \cdot \vec{n} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 7 = 0$. Vậy $\vec{n} = (1; -1; -7)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 3; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 5 = 0$.

a, Mặt phẳng (β) có phương trình $2x + y + z - 3 = 0$ đi qua điểm M và song song mặt phẳng (α) .

b, Mặt phẳng (γ) có phương trình $x - 3y - z + 2024 = 0$ vuông góc với mặt phẳng (α) .

c, Mặt phẳng (P) đi qua điểm M , song song trục Ox và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình là $y + z - 1 = 0$.

d, Có hai mặt phẳng song song mặt phẳng (α) và cách điểm M một khoảng bằng $2\sqrt{6}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a, Sai

Mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) có phương trình dạng: $2x + y - z + d = 0$ ($d \neq 5$)

Do mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1; 3; -2)$ nên ta có: $2 + 3 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$

Vậy mặt phẳng (β) cần tìm là $2x + y - z - 7 = 0$

b, Đúng

Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -1)$

Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (γ) là $\vec{n}_\gamma = (1; -3; -1)$

Ta có $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) = 0$ nên $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\gamma$

Vậy mặt phẳng (γ) vuông góc với mặt phẳng (α) .

c, Đúng

Mặt phẳng (P) song song trục Ox và vuông góc với mặt phẳng (α) nên có cặp vector chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$ và $\vec{n}_\alpha = (2; 1; -1)$.

Do đó mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = [\vec{i}, \vec{n}_\alpha] = (0; 1; 1)$

Mặt phẳng (P) qua điểm $M(1; 3; -2)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (0; 1; 1)$ nên có phương trình là: $0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-3) + 1 \cdot (z+2) = 0 \Leftrightarrow y + z - 1 = 0$.

d, Sai

Gọi mặt phẳng song song mặt phẳng (α) và cách điểm M một khoảng bằng $2\sqrt{6}$ là mặt phẳng (Q) .

Phương trình mặt phẳng (Q) song song mặt phẳng (α) có dạng: $2x + y - z + e = 0$ ($e \neq 5$)

Mặt phẳng (Q) cách điểm M một khoảng bằng $2\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow d(M, mp(Q)) = 2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 3 + 2 + e|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow |7 + e| = 12$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 + e = 12 \\ 7 + e = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = 5 \\ e = -19 \end{cases}$$

Với $e = 5$ loại

Với $e = -19$ nhận

Vậy chỉ có một mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): -2x + y + 4z - 3 = 0$

a, Mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q) .

b, Mặt phẳng (R) có phương trình $14x + 8y + 5z - 2 = 0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

c, Mặt phẳng $(\alpha): 2x - 6y + 4z - 9 = 0$ song song mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$ và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 1.

d, Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1;0;1)$, $B(2;-2;1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = (8;4;3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a, Sai

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1; -3; 2)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_q = (-2; 1; 4)$

Vì hai vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -3; 2)$ và $\vec{n}_q = (-2; 1; 4)$ của hai mặt phẳng (P) và (Q) không cùng phương. Do đó mặt phẳng (P) không song song mặt phẳng (Q) .

b, Đúng

Mặt phẳng (R) cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{n}_p = (1; -3; 2)$ và $\vec{n}_q = (-2; 1; 4)$

Do đó mặt phẳng (R) có một vector pháp tuyến là $[\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (-14; -8; -5)$ hay chọn $\vec{n}_R = (14; 8; 5)$

Vậy mặt phẳng (R) có phương trình $14x + 8y + 5z - 2 = 0$ cùng vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) .

c, Sai

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_p = (1; -3; 2)$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = (2; -6; 4)$

Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_\alpha = 2.\vec{n}_p \\ -9 \neq 2.(-1) \end{cases}$ nên mặt phẳng (α) song song mặt phẳng (P)

Lấy điểm $M(1; 0; 0)$ thuộc mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$.

$$\text{Lại có } d(M, mp(\alpha)) = \frac{|2.1 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

Nên mặt phẳng (α) cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d, Đúng

Ta có: $\vec{AB} = (1; -2; 0)$ và vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $\vec{n}_Q = (-2; 1; 4)$

Mặt phẳng (β) qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(2; -2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) nên có cặp vector chỉ phương là $\vec{AB}$ và $\vec{n}_Q$. Do đó mặt phẳng (β) có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = [\vec{n}_Q, \vec{AB}] = (8; 4; 3)$.

Câu 24: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 1; 1)$ và hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$, $(Q): -x + 2y - 2z + 1 = 0$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Điểm A thuộc mặt phẳng (P) .

b) Khoảng cách $d(A, (Q)) = 2$.

c) Gọi điểm $B(x_0; y_0; z_0) \in (Q)$ sao cho khoảng cách AB ngắn nhất, khi đó ta có $x_0 + y_0 + z_0 = 43$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng

Ta có $\vec{n}_1(1; -2; 2)$ và $\vec{n}_2(-1; 2; -2)$ là các vector pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng. Rõ ràng chúng cùng phương nhau (vì $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$).

Mặt khác ta có $(-3) \neq -1.1$ là các hệ số tự do của phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng tương ứng.

Từ đó ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Đúng

Thay tọa độ điểm A vào phương trình của (P) ta thấy thỏa mãn $3 - 2 + 2 - 3 = 0$, nên A thuộc (P) .

c) Sai

Ta có: $d(A, (Q)) = \frac{|-1.3 + 2.1 - 2.1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{2}{3}$.

d) Sai

Do $B(x_0; y_0; z_0) \in (Q)$ sao cho khoảng cách AB ngắn nhất nên B chính là hình chiếu vuông góc của A trên (Q) .

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(3;1;1)$ và vuông góc với (Q) , ta có phương trình tham số của d là:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Giao điểm B của d và (Q) có tham số t thỏa mãn:

$$-(3-t) + 2(1+2t) - 2(1-2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{9}. \text{ Khi đó ta được } B\left(\frac{25}{9}; \frac{13}{9}; \frac{5}{9}\right).$$

$$\text{Vậy } x_0 + y_0 + z_0 = \frac{25+13+5}{9} = \frac{43}{9}.$$

Câu 25: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - 2y + z - 5 = 0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(2;0;1)$.

a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Khoảng cách $d(A, (Q)) = 4$.

c) Khoảng cách $d(P, (Q)) = 6$.

d) Cho biết điểm $C \in (P)$ và đường thẳng BC tạo với mặt phẳng (P) góc 30° . Khi đó ta có khoảng cách $BC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

a) Đúng

Ta có $\vec{n}_1(2; -2; 1)$ và $\vec{n}_2(2; -2; 1)$ là các véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng. Rõ ràng chúng cùng phương nhau (vì $\vec{n}_1 = \vec{n}_2$).

Mặt khác ta có $1 \neq -5$ là các hệ số tự do của phương trình tổng quát của 2 mặt phẳng tương ứng. Từ đó ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

b) Sai

$$\text{Ta có: } d(A, (Q)) = \frac{|0 - 2 + 1 - 5|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2.$$

c) Sai

Ta thấy $A(0;1;1)$ thuộc (P) vì tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) : $2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 = 0$.

Vậy có $(P) \parallel (Q)$ và $A \in (P)$ nên $d(P, (Q)) = d(A, (Q)) = 2$.

d) Sai

Ta thấy $B(2;0;1)$ thuộc (Q) vì tọa độ điểm B thỏa mãn phương trình mặt phẳng (Q) : $2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 5 = 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P) , ta có $BH = d(B, (P)) = d(A, (Q)) = 2$.

Vì góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (P) bằng 30° nên suy ra góc $BCH = 30^\circ$.

Do $C \in (P)$ nên xét tam giác BHC vuông tại H có $BH = 2$, $BCH = 30^\circ$, do đó ta có

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{BH}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{0,5} = 4.$$

Tài liệu, giáo án, đề thi cập nhật liên tục tại: <https://hoangquy.net/tailieu>

Google Meet không giới hạn thời gian có Khuyến Mại Tại: HoangQuy.Net

Cộng đồng facebook chia sẻ tài liệu, đề thi:

<https://www.facebook.com/groups/993194497531060>