



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$.

- a) Đường kính mặt cầu bằng 8.
- b) Mặt cầu (S) đi qua điểm $A(-1; 3; 0)$.
- c) Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (Oyz) bằng 2.
- d) Mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z - 2 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 0)$ và bán kính $R = 2$.

a) Sai.

Đường kính mặt cầu bằng $2R = 4$.

b) Sai.

Ta có: $IA = \sqrt{(-1+2)^2 + (3-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5} > R$ nên mặt cầu (S) không đi qua điểm A .

c) Đúng.

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x = 0$.

Khi đó $d(I; (Oyz)) = |-2| = 2$

d) Sai.

Ta có: $d(I; (P)) = \frac{|-2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3} < R$

nên mặt phẳng (P) không tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10; 20; 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$.

b) Người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng.

Mặt cầu (S) tâm $I(10; 20; 30)$, bán kính $R = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$ có phương trình

$$(x-10)^2 + (y-20)^2 + (z-30)^2 = 3000^2$$

b) Đúng.

Ta có $\overline{IA} = (40; 0; -30) \Rightarrow IA = \sqrt{40^2 + 0^2 + 30^2} = 50 \text{ m} < R = 3000 \text{ m}$ nên điểm A nằm trong mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

c) Sai.

Ta có $\overline{IB} = (4020; 30; 10) \Rightarrow IB = \sqrt{4020^2 + 30^2 + 10^2} \approx 4020,12 \text{ m} > R = 3000 \text{ m}$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu (S) nên người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ không nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d) Đúng.

Vì bán kính phủ sáng là 3 km nên đường kính phủ sáng là 6 km nên nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì hai người đó nằm trong mặt cầu, do đó khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; 2), B(1; 0; 3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Ox và đi qua hai điểm A, B .

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) có dạng $I(a; 0; 0)$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là $R = 9$.

c) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

d) Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $P = MA^2 + MB^2 + MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức $T = x + y + z = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng.

Vì tâm $I \in Ox$ nên tọa độ điểm $I(a; 0; 0)$.

b) Sai.

Vì $A \in (S), B \in (S)$ nên ta có:

$$IA = IB \Leftrightarrow (3-a)^2 + 1 + 4 = (1-a)^2 + 0 + 9 \Leftrightarrow 9 - 6a + a^2 + 5 = 1 - 2a + a^2 + 9 \Leftrightarrow a = 1.$$

Ta có bán kính $R = IB = \sqrt{9} = 3$.

c) Đúng.

Vì $A \in (S), B \in (S)$ nên ta có: $IA = IB \Leftrightarrow (3-a)^2 + 1 + 4 = (1-a)^2 + 0 + 9 \Leftrightarrow a = 1$.

$\Rightarrow R = IA = IB = 3$, tâm $I(1; 0; 0)$,

Ta có mặt cầu (S) có phương trình là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$

d) Đúng.

Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KI} = \vec{0} \Leftrightarrow K\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$

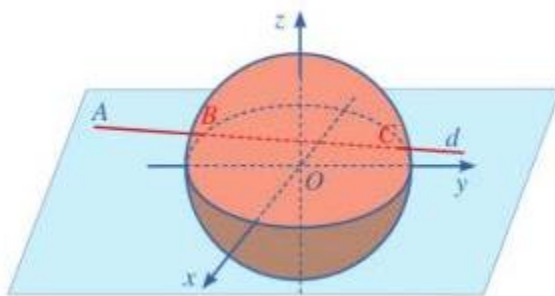
$$\begin{aligned} P &= MA^2 + MB^2 + MI^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 = (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})^2 + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB})^2 + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KI})^2 \\ &= 3MK^2 + KA^2 + KB^2 + KI^2 + 2\overrightarrow{MK}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KI}) = 3MK^2 + KA^2 + KB^2 + KI^2 \end{aligned}$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của K lên mặt phẳng

$$(Oyz) \Rightarrow M\left(0; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right). \text{ Vậy } T = 0 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2.$$

Câu 4: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600km . Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900km/h theo đường thẳng d có phương

$$\text{trình } \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).}$$



- a) Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 300 km .
- b) Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$.
- c) Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M(-500; 100; 100\sqrt{11})$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.
- d) Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện máy bay đến khi máy ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai.

Vì đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km nên ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 600 km .

b) Đúng.

Ranh giới vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ có bán kính bằng $R = 600$ có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$

c) Đúng.

Ta có $OM = \sqrt{(-500)^2 + (100)^2 + (100\sqrt{11})^2} \approx 608 > 600 = R$.

Vậy, tại vị trí điểm $M(-500; 100; 100\sqrt{11})$ máy bay nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.

d) Sai.

Thay $d: \begin{cases} x = -1000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ vào phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 360000$, ta có:

$$(100t - 1000)^2 + (80t - 300)^2 + (100\sqrt{11})^2 = 360000$$

$$\Leftrightarrow 164t^2 - 2480t + 8400 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \Rightarrow B(0; 500; 100\sqrt{11}) \\ t = \frac{210}{41} \Rightarrow C\left(-\frac{20000}{41}; \frac{4500}{41}; 100\sqrt{11}\right) \end{cases}$$

Quãng đường máy bay di chuyển trong vùng kiểm soát không lưu là:

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{20000}{41}\right)^2 + \left(\frac{4500}{41} - 500\right)^2 + (100\sqrt{11} - 100\sqrt{11})^2} \approx 625\text{ km}.$$

Vậy thời gian máy bay di chuyển theo đường thẳng d và trong phạm vi kiểm soát không lưu của sân bay là: $\frac{625}{900} = \frac{25}{36}$ giờ.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$.

a) Điểm $A(1; 2; -1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

b) Điểm $B(0; 0; 1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .

c) Điểm $C(0; 2; 1)$ nằm trên mặt cầu (C) .

d) Với điểm $D(2; 1; -1)$, ta có $ID < 4$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Điểm $A(1; 2; -1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

Tâm $I(1; -2; 0)$.

Ta có $(1-1)^2 + (2+2)^2 + (-1)^2 = 17 > 16 \Rightarrow$ điểm $A(1; 2; -1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

Đúng.

b) Điểm $B(0; 0; 1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .

Ta có $(0-1)^2 + (0+2)^2 + 1^2 = 6 < 16 \Rightarrow$ điểm $B(0; 0; 1)$ nằm bên trong mặt cầu (C) .

Đúng.

c) Điểm $C(0; 2; 1)$ nằm trên mặt cầu (C) .

Ta có $(0-1)^2 + (2+2)^2 + 1^2 = 18 > 16 \Rightarrow$ điểm $C(0; 2; 1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C) .

Sai.

d) Với điểm $D(2; 1; -1)$, ta có $ID < 4$.

Ta có $ID = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11} < 4$.

Đúng.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm I và bán kính R .

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 3$.

b) Điểm $A(0; 2; -3)$ nằm trong mặt cầu.

c) Điểm $J(1; 2; 3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 3$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 3$ là $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

Sai.

b) Điểm $A(0; 2; -3)$ nằm trong mặt cầu.

Ta có: $(0+1)^2 + (2-1)^2 + (-3+2)^2 = 3 = R = 3$, do đó điểm A nằm trên mặt cầu.

Sai.

c) Điểm $J(1; 2; 3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

Ta có: $(1+1)^2 + (2-1)^2 + (3+2)^2 = 30 > R = 3$, do đó điểm J nằm ngoài mặt cầu.

Và $\vec{IJ} = (0; 3; 1) \Rightarrow |\vec{IJ}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Đúng.

d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu (S') : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$ bằng $\sqrt{2}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$,

Mặt cầu (S') có tâm $K(0; 0; 1)$,

Khi đó $\vec{IK} = (-1; 1; -1) \Rightarrow |\vec{IK}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \neq \sqrt{2}$

Sai.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R .

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1; 1; 2)$.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0; 1; -2)$ và $B(2; -1; -4)$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + y - z - 2 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có $a = 1, b = -2, c = 0, d = 1$

$\Rightarrow$ tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 2$.

Đúng.

b) Bán kính của mặt cầu (S) là đoạn IM với điểm $M(1; 1; 2)$.

Xét $M(1; 1; 2): 1^2 + 1^2 + 2^2 - 2.1 + 4.1 + 1 = 9$ do đó M không nằm trên (S)

Vậy bán kính mặt cầu (S) không là đoạn IM .

Sai.

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(0; 1; -2)$ và $B(2; -1; -4)$.

Mặt cầu (S) nhận AB làm đường kính thì $\frac{AB}{2} = R$ và tâm I là trung điểm của AB .

Ta có $\overline{AB} = (2; -2; -2) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{AB}{2} = \sqrt{3} \neq R = 2$

Sai.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x + y - z - 2 = 0$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x + y - z - 2 = 0 \Leftrightarrow R = d(I, (P))$.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|1 + (-2) - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \neq R = 2$.

Sai.

Câu 8: Trong không gian Oxyz cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Khi đó

a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R = 3$ có phương trình là $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$.

b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = \frac{13}{4}$.

d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R = OG$ với G là trọng tâm DABC, có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R = 3$ có phương trình là $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$.

Mặt cầu tâm B, bán kính $R = 3$ có phương trình là $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$.

Sai.

b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Ta có bán kính mặt cầu là $R = AB = \sqrt{5}$, nên phương trình mặt cầu là $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Đúng.

c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = \frac{13}{4}$.

Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow I\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$, $BC = \sqrt{13} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu đường kính BC là $x^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$.

Sai.

d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R = OG$ với G là trọng tâm DABC, có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Ta có $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right) \Rightarrow OG = \frac{\sqrt{14}}{3}$ nên phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{14}{9}$.

Đúng.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I(25;30;50)$. Mặt cầu (S) mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R = 5$ km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- a) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 25$.
- b) Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S) .
- c) Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.
- d) Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 25$.

Ta có mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R = 5 \text{ km} = 5000 \text{ m}$, có phương trình là $(x-25)^2 + (y-30)^2 + (z-50)^2 = 5000^2$.

Sai.

b) Điểm $A(1025;30;50)$ nằm bên trong mặt cầu (S) .

Ta có $IA = \sqrt{(1025-25)^2} = 1000 < 5000 = R$. Suy ra điểm A nằm bên trong mặt cầu (S) .

Đúng.

c) Một người đi biển ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Ta có $IM = \sqrt{20^2 + 30^2} = 10\sqrt{13} < 5000 = R$, suy ra điểm M nằm bên trong mặt cầu (S) .

Do đó người ở vị trí $M(45;60;50)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Đúng.

d) Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Ta có $IN = \sqrt{5100^2 + (-50)^2} > 5000 = R$, suy ra điểm N nằm bên ngoài mặt cầu (S) .

Do đó người ở vị trí $N(5125; 30; 0)$ thì không thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Đúng.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $O'(0; 0; 4)$. Ta có

a) Mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

b) Mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

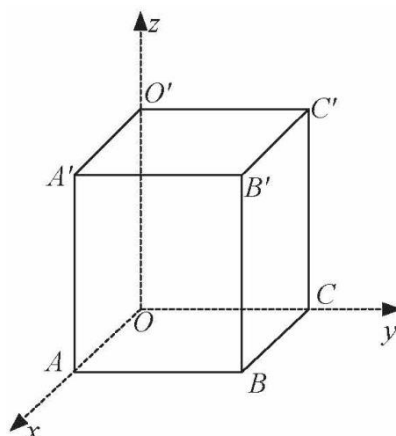
c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO') , mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{12}{61}$.

d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

Gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, ta có tọa độ các đỉnh của hình hộp



$O(0; 0; 0), A(2; 0; 0); B(2; 3; 0), C(0; 3; 0), O'(0; 0; 4), A'(2; 0; 4); B'(2; 3; 4), C'(0; 3; 4)$

a) Mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Ta có $OA = 2$, mặt cầu tâm O , bán kính OA có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Sai.

b) Mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Ta có $AC^2 = OA^2 + OC^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow$ mặt cầu tâm A , đi qua C có phương trình là $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Đúng.

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO') , mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{12}{61}$.

Ta có $(ACO') : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

$R = d(O, (ACO')) = \frac{|-12|}{\sqrt{36+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}$. Vậy phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{144}{61}$

Sai.

d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là $(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có tâm I là trung điểm của $OB' \Rightarrow I\left(1; \frac{3}{2}; 2\right)$ và có bán

kinh $R = \frac{OB'}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

Đúng.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x + y - z - 5 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r = 5$.

a) Mặt phẳng $(P) : 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t; -1+2t; -2-t)$.

c) $d(I, (P)) = 3$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Mặt phẳng $(P) : 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

$(P) : 3x + y - z - 5 = 0$ có VTPT là $\vec{n} = (3; 1; -1)$.

Đúng.

b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t; -1+2t; -2-t)$.

Ta có: $d : x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow d : \begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \\ z = 2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad I \in d \Rightarrow I(t; 1+2t; 2-t)$

Sai.

c) $d(I, (P)) = 3$.

Do giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn lớn nên $I \in (P) \Rightarrow d(I, (P)) = 0$.

Sai.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Ta có $I \in d \Rightarrow I(t; 1+2t; 2-t)$

Theo giả thiết $I = d \cap (P)$ nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

Thay tọa độ điểm I vào (P) ta có :

$$3t + (1+2t) - (2-t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 3; 1)$$

Vì $(S) \cap (P)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính $r = 5$ nên ta có bán kính mặt cầu (S) là $R = r = 5$.

Vậy mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Đúng

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz (đơn vị trên mỗi trục là km), một trạm thu phát sóng điện thoại di động (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(2; 1; -3)$. Trạm thu phát được thiết kế bán kính phủ sóng là 3km.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài vùng phủ sóng trong không gian là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.
- Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0; 1; -2)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- Người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6; -3; -1)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.
- Có một người đi từ vị trí $I(2; 1; -3)$ đến vị trí $B(6; -3; -1)$ theo một đường thẳng, vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm này là $C(x; y; z)$ với $x + y + z = -1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng

Mặt cầu có tâm $I(2; 1; -3)$ và bán kính 3km có phương trình là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$

.

b) Sai

Ta có $\overline{IA}(-2; 0; 1)$ nên $IA = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 3$

Vì $IA < R$ nên người dùng điện thoại đứng ở vị trí $A(0;1;-2)$ sử dụng được dịch vụ của trạm này.

c) Sai

Ta có $\overline{IB}(4;-4;2)$ nên $IB = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6 > 3$. Vì $IB > R$ nên người dùng điện thoại đứng ở vị trí $B(6;-3;-1)$ không sử dụng được dịch vụ của trạm này.

d) Sai

Theo phần c, vì $IB > R$ nên người đó đứng ở ngoài vùng phủ sóng. Giả sử đường thẳng IB cắt mặt cầu tại điểm C khi đó C là vị trí cuối cùng trên đoạn thẳng IB để người đó có thể sử dụng được dịch vụ. Khi đó $IC = \frac{1}{2}IB$ hay C là trung điểm của IB suy ra $C(4;-1;-2)$ nên $4-1-2=1$

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), một ngọn hải đăng (Hình bên) được đặt ở vị trí $I(-2;1;3)$. Ngọn hải đăng được thiết kế bán kính phủ sáng là $5km$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

b) Người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Người đi biển đứng ở vị trí $B(-2;-5;6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Một người đi biển đang ở vị trí $C(5;3;-2)$. Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng là 73 .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Đúng

Mặt cầu có tâm $I(-2;1;3)$ và bán kính $5km$ có phương trình là $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

b) Đúng

Ta có $\overline{IA}(4;2;-2)$ nên $IA = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} < 5$

Vì $IA < R$ nên người đi biển đứng ở vị trí $A(2;3;1)$ có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

c) Đúng

Ta có $\overline{IB}(0; -6; 3)$ nên $IB = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} > 5$

Vì $IB > R$ nên người đi biển đứng ở vị trí $B(-2; -5; 6)$ không thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

d) Sai

Ta có $\overline{IC}(7; 2; -5)$ nên $IC = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{78} > 5$ nên người đó đứng ở ngoài vùng phủ sáng. Giả sử đoạn thẳng IC cắt mặt cầu tại điểm D khi đó CD là khoảng cách ngắn nhất người đó phải di chuyển để có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng.

Ta có $CD = IC - R = \sqrt{78} - 5$.

Câu 14: Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian (Hình minh hoạ).



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Như vậy điểm M là giao điểm của bốn mặt cầu với tâm lần lượt là bốn vệ tinh đã cho.

Ta xét ví một ví dụ cụ thể sau: Cho bốn vệ tinh $A(1; -1; 2), B(2; 1; 3); C(-1; 4; 0); D(2; 3; 1)$. Một chiếc máy bay quân sự đang ở vị trí M với $MA = 3; MB = \sqrt{5}; MC = \sqrt{26}; MD = \sqrt{5}$.

a) Mặt cầu tâm A đi qua điểm M có bán kính là 3.

b) Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$.

c) Phương trình mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và $S(B, MB)$ là $x + 2y + z - 6 = 0$.

d) Tọa độ của máy bay quân sự là $M(x; y; z)$ với $x + y + z = 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng

Mặt cầu có tâm A và đi qua điểm M có bán kính là $MA = 3$.

b) Đúng

Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A bán kính MA là $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0.$$

c) Đúng

- Phương trình mặt cầu (S_1) là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$ (1)

- Phương trình mặt cầu $S(B, MB)$ là: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 9 = 0$$
 (2)

- Lấy (1) trừ (2) ta được: $2x + 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$

d) Sai

Vì $MA = 3; MB = \sqrt{5}; MC = \sqrt{26}; MD = \sqrt{5}$ và $M(x; y; z)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 & (1) \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 5 & (2) \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 26 & (3) \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 12 \\ -6x + 6y - 6z = -18 \\ 6x - 2y + 2z = 18 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $x + y + z = 5$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là km), Một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt ở tại vị trí $I(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của trạm có bán kính bằng 2 km. Hai người bạn Mai và Nga cùng sử dụng điện thoại. Bạn Mai dùng điện thoại tại vị trí $M(2;1;1)$, bạn Nga dùng điện thoại tại vị trí $N(1;2;2)$.



a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$

b) Bạn Mai có thể sử dụng được dịch vụ của trạm phát sóng trên.

c) Hai bạn Mai và Nga liên lạc được với nhau.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga di chuyển tới vùng phủ sóng của trạm là $1(km)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai

Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sóng là: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ nên câu a sai

b) Đúng

$$IM = \sqrt{(2-2)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < 2. \text{ Vậy câu b đúng}$$

c) Sai

$IN = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2 + (2-0)^2} = 3 > 2$ nên bạn Nga đang đứng ở vị trí ngoài vùng phủ sóng. Do đó câu c sai

d) Đúng

Xét K là điểm bất kỳ thuộc vùng phủ sóng, khi đó K nằm trên khối cầu

Khoảng cách tính theo đường chim bay để bạn Nga đến vùng phủ sóng là NK

Ta có $NK \geq IN - IK \Leftrightarrow NK \geq 1$. Vậy khoảng cách ngắn nhất để bạn Nga đến vùng phủ sóng là $1(km)$

Câu 16: Một sân khấu đã được thiết lập một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) để đạo diễn có thể sắp đặt ánh sáng và xác định vị trí của các diễn viên. Người đạo diễn đặt một đèn chiếu sáng ở vị trí $I(1;2;3)$ tạo ra một vùng sáng là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ bán kính $10(m)$.

a) Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới vùng phủ sáng là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 100$.

b) Diễn viên A đang đứng trên sân khấu ở vị trí $A(3;4;5)$ để chuẩn bị biểu diễn. Khi đó diễn viên A đang được đèn chiếu sáng.

c) Diễn viên B luôn đứng yên ở vị trí $B(10;11;12)$. Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B bằng $5m$.

d) Diễn viên A biểu diễn luôn cách tâm I một khoảng bằng $1(m)$, còn diễn viên C có nhiệm vụ di chuyển xung quanh rìa của vùng chiếu sáng. Tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất là $11(m)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng

$$\text{Phương trình mặt cầu là } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 100.$$

b) Đúng

$$IA = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{3} < 10$$

c) Sai

Ta có $IB = \sqrt{(10-1)^2 + (11-2)^2 + (12-3)^2} = 9\sqrt{3} > 10$ nên B ở ngoài vùng đèn chiếu sáng.

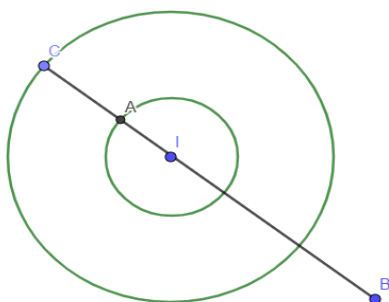
Diễn viên A biểu diễn cách tâm I một khoảng bằng 1(m) nên A nằm trên mặt cầu tâm I bán kính bằng 1

Khoảng cách ngắn nhất giữa hai diễn viên A và B khi I, A, B thẳng hàng và A nằm giữa I và **B**.

Khi đó $AB_{\min} = IB - 1 = 9\sqrt{3} - 1$

d) Sai

Diễn viên B đứng yên, diễn viên A, C cùng biểu diễn nên tổng khoảng cách từ B đến A và C có giá trị lớn nhất khi A, C, B, I thẳng hàng sao cho I nằm giữa A và B; A nằm giữa C và I.



Khi đó: $(BA + BC)_{\max} = (IB + 1) + (IB + 10) = 18\sqrt{3} + 11$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0.$$

a) Mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 2; -3)$ và bán kính.

b) Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng $\frac{28}{3}$.

c) Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

d) Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B độ dài đoạn thẳng $AB = \frac{11\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng vì mặt cầu (S) có tâm $I = (1; 2; -3)$ và bán kính $R = 9$.

b) Sai vì đường thẳng Δ đi qua $M = (-2; 0; 3)$ và có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -1)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (3; 2; -6)$ và $[\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (-4; -9; -5)$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MI} \cdot [\vec{u}, \overrightarrow{MI}]|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{366}}{3}.$$

c) Đúng vì $d(I, \Delta) < R$ nên Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B . Vậy ý c đúng.

d) Sai vì $AB = 2\sqrt{9^2 - \left(\frac{\sqrt{366}}{3}\right)^2} = \frac{22\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $I(1; -2; 5)$.

a) Đường thẳng d đi qua $M(2; 0; 1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 6; 2)$.

b) Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = 20$.

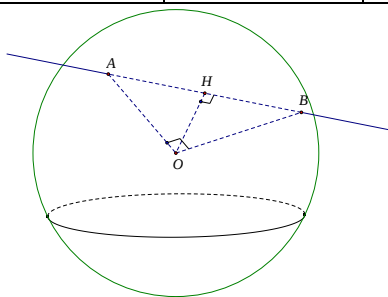
c) Phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I có phương trình $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 40$.

d) Với mọi giá trị của tham số m thì đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm

phân biệt.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) Đúng vì: Đường thẳng d đi qua $M(2; 0; 1)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 6; 2)$.

b) Sai vì: Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$, với

$$\overrightarrow{IM} = (1; 2; -4), \vec{u} = (3; 6; 2) \quad IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{20}.$$

c) Đúng vì:

Theo đề bài ta có tam giác IAB vuông cân tại I nên $IA = IH\sqrt{2} = \sqrt{40}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 40$.

d) Đúng vì:

Từ phương trình đường thẳng d và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+2)^2 + (-2t-5)^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(11+3m)t - 5 = 0 \quad (1)$$

Để Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (3m+11)^2 + 5(m^2 + 5) > 0 \forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4+t \\ y = -1-t \\ z = 0 \end{cases}$.

- a) Đường thẳng d đi qua $M(4; -1; 0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 1)$
- b) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 0); R = 2$
- c) Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tâm I cắt tại hai điểm phân biệt
- d) Tọa độ giao điểm của đường thẳng d với mặt cầu là $A(3; 0; 0); B(1; 2; 0)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Đúng vì: Đường thẳng d đi qua $M(4; -1; 0)$ và có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 0)$.

b) Đúng vì: Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 0); R = 2$

c) Đúng vì:

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d ta có $IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$, với

$$\overrightarrow{IM} = (3; -1; 0), \vec{u} = (1; -1; 0) \quad IH = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{2}.$$

Vì $d(I, \Delta) < R$ nên Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B

d) Đúng vì :

Gọi $A = d \cap (S)$. Vì $A \in d \Rightarrow A(4+t; -1-t; 0)$.

Do

$$A \in (S) \Rightarrow (4+t-1)^2 + (-1-t)^2 + 0^2 = 4 \Leftrightarrow (t+3)^2 + (t+1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2t^2 + 8t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} A(3; 0; 0) \\ B(1; 2; 0) \end{cases}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+mt \\ z = -2t \end{cases}.$$

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; -2)$ và bán kính $R = 1$.

b) Với $m = 1$ thì đường thẳng Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt

c) Có hai giá trị thực của tham số m để đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S)

d) Giá trị của m để đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt là $\frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Sai vì:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 1$.

b) Sai vì:

$$\text{Khi } m = 1 \text{ đường thẳng } \Delta \text{ có phương trình } \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}$$

Đường thẳng (Δ) đi qua $M = (2; 1; 0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1; 1; -2)$

Ta có $\vec{MI} = (-1; -4; 2)$ và $[\vec{u}, \vec{MI}] = (6; 0; 3)$

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } (\Delta). \text{ Có: } IH = d(I, \Delta) = \frac{[\vec{u}, \vec{MI}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Vì $d(I, (\Delta)) > R$ nên Δ không cắt mặt cầu (S)

c) Đúng vì:

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Để } \Delta \text{ tiếp xúc mặt cầu } (S) \text{ thì (1) có nghiệm kép, hay (1) có } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{15}{2} \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

d) Đúng vì:

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có

$$(2+t-1)^2 + (1+mt+3)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 + (4+mt)^2 + (-2t-2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 5)t^2 + 2(5+4m)t + 20 = 0 \quad (1)$$

Để Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt, hay (1) có

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m < \frac{15}{2}.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 0)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 8$.

- a) Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d là $x + 2y + 2z - 7 = 0$.
- b) Gọi H là hình chiếu vuông của I lên d . Khi đó $H(1;-1;2)$.
- c) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$.
- d) Phương trình mặt cầu (S) : $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

- a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $I(3;2;0)$ và vuông góc với đường thẳng d nhận $\vec{u} = (1;2;2)$ là vector pháp tuyến có phương trình
 $1(x-3) + 2(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 7 = 0$
- b) Gọi $H = d \cap (P)$ khi đó $H \in d \Rightarrow H(-1+t; -3+2t; -2+2t)$
 Mà $H \in (P) \Rightarrow -1+t + 2(-3+2t) + 2(-2+2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = 2$
 Vậy $H(1;-1;2)$
- c) Khi đó $IH = \sqrt{(3-1)^2 + (2-(-1))^2 + (0-(-2))^2} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ d)
 Vậy (S) : $(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$.
- b) Điểm A nằm trong mặt cầu (S) .
- c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính bằng $\sqrt{6}$.
- d) Điểm M thay đổi thuộc (S) , giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng 5.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.
- b) $IA = 1$, $R = \frac{1}{2}$, $IA > R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S) .
- c) Mặt cầu tâm A và đi qua B có bán kính $AB = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$.
- d) Gọi K là điểm thỏa mãn $\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0} \Rightarrow K(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ Ta có

$$MA^2 + 2MB^2 = (\vec{MK} + \vec{KA})^2 + 2(\vec{MK} + \vec{KB})^2$$

$$= 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2 + 2\vec{MK}(\vec{KA} + 2\vec{KB}) = 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2.$$
 Biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt GTNN khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min} = |KI - R| = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

Vậy $(MA^2 + 2MB^2)_{\min} = 3MK_{\min}^2 + KA^2 + 2KB^2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{19}{4}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$ và mặt phẳng $(b): 2x - y + 2z - 8 = 0$.

- a) Mặt phẳng b có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; 2)$.
 b) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $m \in 17$.
 c) Khoảng cách từ tâm của mặt cầu (S) đến (b) là 2.
 d) Có hai số thực của tham số m để mặt phẳng $(b): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(b): 2x - y + 2z - 8 = 0$ là $\vec{n} = (2; -1; 2)$

b) Ta có

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 17 - m.$$

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17 - m > 0 \Leftrightarrow m < 17$.

Khi đó $I(-1; 2; 3); R = \sqrt{17 - m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S) .

$$c) d(I, (b)) = \frac{|2 \cdot (-1) - 2 + 2 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2.$$

d) Để mặt phẳng $(b): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r = 4$.

Ta có $R^2 = d^2(I, (b)) + r^2 \Leftrightarrow 17 - m = 16 + 4 \Leftrightarrow m = -3$ (TMĐK).

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; 1; 1), B(1; 0; -3), C(-1; -2; -3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$.

- a) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 2$.
 b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x - 2y + z - 1 = 0$.
 c) Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
 d) Điểm $D(a; b; c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất. Khi đó, $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 2$.

b) Có $\vec{AB} = (1; -1; -4)$, $\vec{AC} = (-1; -3; -4)$ nên mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-8; 8; -4)$. Suy ra mặt phẳng (ABC) có phương trình $2x - 2y + z + 1 = 0$.

c) Ta có $d(I, (ABC)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{2}{3}$. Vậy bán kính đường tròn giao tuyến của mặt

phẳng (ABC) và mặt cầu (S) là $r = \sqrt{R^2 - d(I, (ABC))^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

d) Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(D, (ABC)) \cdot S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d(D, (ABC))$ lớn nhất.

Gọi D là đường thẳng qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Suy ra $D: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Gọi $D_1; D_2$ là các giao điểm của D và mặt cầu (S) . Tọa độ điểm $D_1; D_2$ thỏa mãn hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{P} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{P} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{P} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Ta thấy: $d(D_1, (ABC)) > d(D_2, (ABC))$. Vậy điểm $D_1 \left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3} \right)$ P $a + b + c = \frac{2}{3}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x = 2 + v \\ y = 1 - v \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Véc tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là: $\vec{u}_1(1; 1; -1)$, $\vec{u}_2(1; -1; 0)$.

b) (d_1) và (d_2) là hai đường thẳng cắt nhau.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) và (d_2) có bán kính nhỏ nhất là $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Phương trình của mặt cầu (S) tiếp xúc với (d_1) , (d_2) và có bán kính nhỏ nhất là:

$$x^2 - \frac{1}{2} + y^2 - \frac{3}{2} + z^2 = \frac{3}{2}.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a). từ phương trình tham số của (d_1) và (d_2) , ta có véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d_1)

là: $\vec{u}_1(1; 1; -1)$, véc tơ chỉ phương của đường thẳng (d_2) là: $\vec{u}_2(1; -1; 0)$.

b). Ta có: (d_1) đi qua điểm $M(1; 2; -2)$, (d_2) đi qua điểm $N(2; 1; 1)$.

+ $\vec{MN}(1; -1; 3)$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2 = (1; 1; 2)$ và $\vec{MN} \cdot \vec{u}_1, \vec{u}_2 = 6 \neq 0$ nên (d_1) và (d_2) là hai đường thẳng chéo nhau.

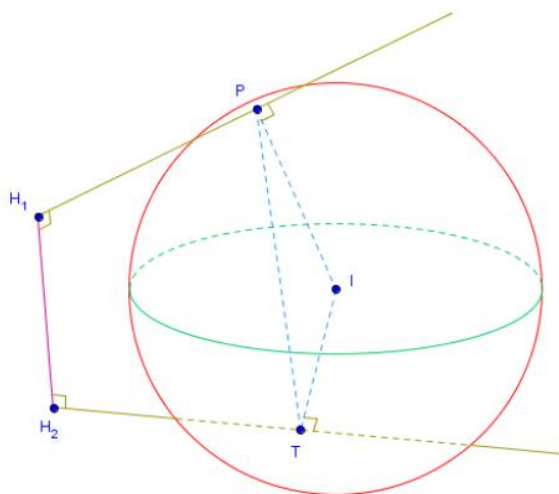
c). Gọi (S) là mặt cầu tâm I , có bán kính nhỏ nhất là R , tiếp xúc với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .

P, T lần lượt là tiếp điểm của (S) và $(d_1), (d_2)$. $H_1 H_2$ là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) .

Sử dụng bất đẳng thức tam giác và tính chất đoạn vuông góc chung ta có:

$2R = IP + IT \leq PT \leq H_1 H_2$. Dấu “=” xảy ra khi $P \in H_1, T \in H_2$ và I là trung điểm của $H_1 H_2$.

Giả sử $H_1 \in d_1 \Rightarrow H_1(1+t; 2+t; -2-t)$, $H_2 \in d_2 \Rightarrow H_2(2+v; 1-v; 1)$.



Khi đó ta có $\vec{H_1 H_2}(v-t+1; -v-t-1; 3+t)$. Vì $H_1 H_2$ là đoạn vuông góc chung của hai đường

thẳng (d_1) và (d_2) nên ta có: $\begin{cases} \vec{H_1 H_2} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{H_1 H_2} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-t+1).1 + (-v-t-1).1 + (-1).(t+3) = 0 \\ (v-t+1).1 + (-v-t-1).(-1) + 0.(t+3) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow H_1(0; 1; -1), H_2(1; 2; 1)$. Từ đó ta có tọa độ tâm $I(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0)$ và $R = IH_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Mặt cầu (S) tiếp xúc với $(d_1), (d_2)$ có tâm $I(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0)$ và bán kính nhỏ nhất $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ có

phương trình là: $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 = \frac{3}{2}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Biết mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có diện tích là 25π .

a) Bán kính đường tròn (C) là $r = 5$.

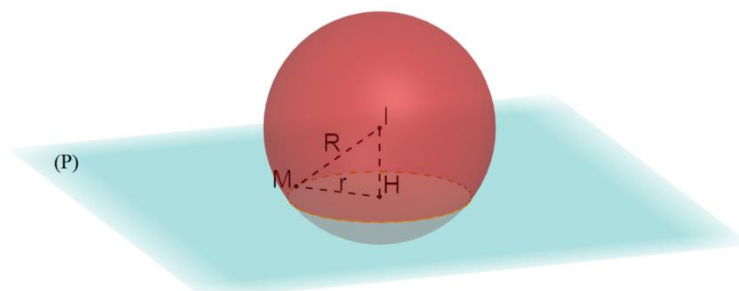
b) Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) là 3.

c). Tâm đường tròn (C) có tọa độ là $H(1; 3; 1)$.

d) Phương trình mặt cầu (S) là $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM = R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

a) Ta có đường tròn (C) có diện tích là 25π . Suy ra $r = 5 = MH$.

$$d(I; (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 = IH$$

b) Ta có

$$IH: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

c) Phương trình

$$\begin{aligned} \text{Vậy tọa độ } H \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 2t \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \hat{=} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{P} \quad H(0; 0; 1). \end{aligned}$$

d) Suy ra $R^2 = MI^2 = IH^2 + MH^2 = 3^2 + 5^2 = 34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 34$.

Câu 27: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$, bán kính $R = 3$.

b) Điểm $M(1; 3; 5)$ nằm trong mặt cầu.

c) Mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 8 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 2$.

d) Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B. Khi đó, diện tích tam giác IAB

là: $\frac{\sqrt{182}}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) **Đúng.**

b) **Sai.**

Ta có $IM = \sqrt{(1-2)^2 + (3+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{33} > R = 3$ nên điểm M nằm ngoài mặt cầu.

c) **Sai.**

Ta có $h = d(I, (P)) = \frac{|2-2-2+8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 2 < 3$. Suy ra mặt phẳng $(P): x+2y-2z+8=0$

cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

d) **Đúng.**

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; -1)$, đi qua điểm $N(1; 0; 3)$.

$\vec{IN} = (-1; 1; 2)$, $\vec{IN} \cdot \vec{u} = (-1; 1; 2) \cdot (1; 1; -1) = 0$. Gọi H là trung điểm của AB

$$IH = d(I, d) = \frac{|\vec{IN} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \frac{\sqrt{39}}{3} \quad \text{và} \quad AB = 2AH = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

$$\text{Diện tích tam giác } IAB \text{ là: } S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{39}}{3} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ cắt đường thẳng

$(d): \frac{x-11}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+25}{-2}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$.

a) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

b) Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(5; -3; -31)$.

c) Mặt phẳng (P) chứa $I(2; 3; -1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x + y - 2z - 9 = 0$.

d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 225$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) **Đúng**

b) Vì thay tọa độ $A(5; -3; -31)$ vào phương trình đường thẳng (d) ta có

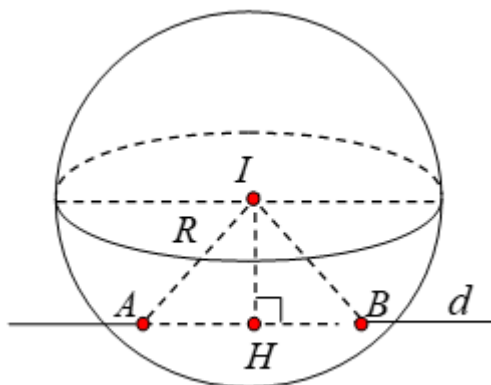
$$\frac{5-11}{2} = \frac{-3}{1} \neq \frac{-31+25}{-2} \text{ nên điểm } A \text{ không thuộc đường thẳng } (d).$$

c) Vì mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) nên (P) nhận vector chỉ phương của (d) là $\vec{u} = (2;1;-2)$ làm vector pháp tuyến.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là

$$2(x-2) + 1(y-3) - 2(z+1) = 0 \text{ hay } 2x + y - 2z - 9 = 0.$$

d)



Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng (d) nên IH và (d) vuông góc với nhau.

Gọi mặt phẳng (P) chứa $I(2;3;-1)$ và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là $2x + y - 2z - 9 = 0$.

Suy ra, H là giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)

Vì H thuộc đường thẳng (d) nên $H(2t+11, t, -2t-25)$

Mặt khác, H thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ $H(2t+11, t, -2t-25)$ thỏa mãn

$$2(2t+11) + t - 2(-2t-25) - 9 = 0 \text{ hay } t = -7$$

Khi đó, điểm $H(-3, -7, -11)$ và $IH = \sqrt{(-3-2)^2 + (-7-3)^2 + (-11+1)^2} = 15$

$$\text{Ta được } R = \sqrt{IH^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{15^2 + \frac{16^2}{4}} = 17.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-1)$ và bán kính $R=17$ là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17^2 = 289$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$ và điểm $M(-1;0;2)$.

a) Mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có bán kính là $R = IM = \sqrt{3}$.

b) Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M có phương trình là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M là $-2x + 2y - z = 0$.

d) Phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$ là $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) $R = IM = \sqrt{9} = 3$

b) Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có dạng

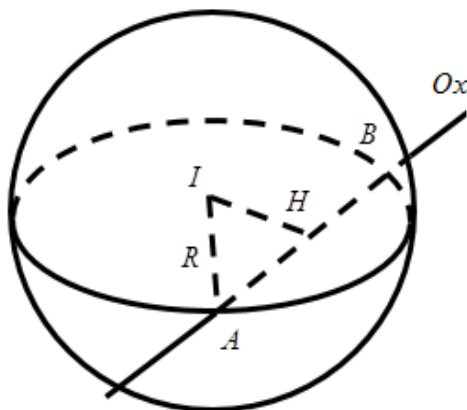
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Suy ra $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$.

c) Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M đi qua $M(-1; 0; 2)$ và nhận

$\vec{IM}(-2; 2; -1)$ làm vectơ pháp tuyến là $-2x + 2y - z = 0$.

d)



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1; 0; 0)$.

$$IH = \sqrt{13} \text{ và } R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 1; -2)$ đường thẳng $D: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$.

a) Điểm I không thuộc đường thẳng D .

b) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng D bằng $2\sqrt{3}$.

c) Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng D tại hai điểm A, B sao cho $DIAB$ đều có bán kính bằng $2\sqrt{6}$

d) Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng D tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ là: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 27$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Thay điểm $I(1; 1; -2)$ vào phương trình đường thẳng $D: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$, ta được:

$$\frac{2}{1} = \frac{-2}{2} = \frac{-4}{1} \text{ (Sai).}$$

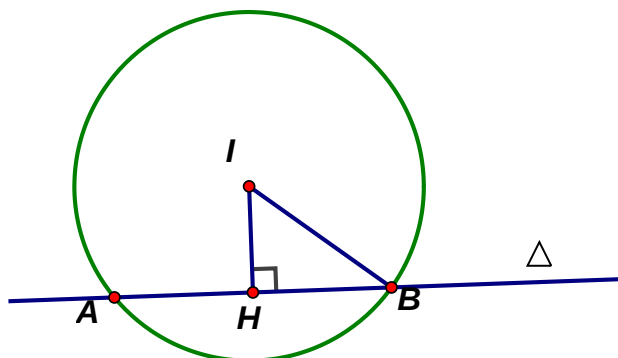
Vậy điểm $I(1; 1; -2)$ không thuộc đường thẳng D .

b) Điểm $I(1;1;-2)$, đường thẳng $D: \begin{cases} M(-1;3;2) \\ VTCP \vec{u} = (1;2;1) \end{cases}$.

Khoảng cách $d(I,D) = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

c) $IH = 3\sqrt{2}$, $\triangle IAB$ đều nên $R = IA = IB = AB = 2\sqrt{6}$.

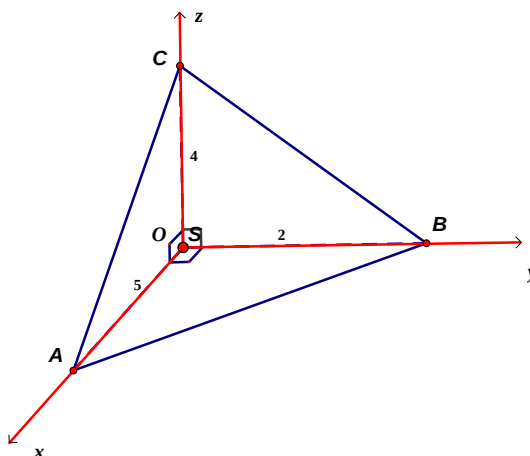
d) Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng D tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.



$IH = 3\sqrt{2}, HB = 3 \Rightarrow R = IB = \sqrt{27}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.

Câu 31: Cho tứ diện $SABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = 5, SB = 2, SC = 4$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ điểm A là $(0;0;5)$.

b) Phương trình mặt cầu đường kính SC có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

c) Mặt cầu tâm S , tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) có bán kính bằng $\frac{30}{19}$.

d) Phương trình mặt cầu đi qua 4 đỉnh của hình chóp là $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Tọa độ điểm A là (5;0;0).

b) Phương trình mặt cầu đường kính SC có tâm $I(0;0;2)$ và bán kính $R = \frac{SC}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Nên phương trình mặt cầu thỏa mãn là $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

c) Mặt cầu tâm S ° O, tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) có bán kính bằng $R = OH$, với H là hình chiếu của S lên mp (ABC).

$$\text{Ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{400}{141}}$$

d) Dùng phương trình tổng quát của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$$4 \text{ điểm } O, A, B, C \text{ thuộc mặt cầu nên ta có hệ } \begin{cases} d = 0 \\ 25 - 10a + d = 0 \\ 4 - 4b + d = 0 \\ 16 - 8c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy tâm cầu là $\left(\frac{5}{2}; 1; 2\right)$, bán kính $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Ta có phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

$$SABC \text{ là } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{45}{4}$$

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$.

a) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 1$.

b) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.

c) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

d) Bán kính R của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R = \sqrt{26}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Mặt cầu (S_1) tâm A, bán kính $R=1$ có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 1$,

b) $\overline{AC} = (1;0;7) \Rightarrow AC = \sqrt{50}$, Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $AC = \sqrt{50}$,

c) $\overline{AB} = (0;-5;5) \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$. Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính nên có tâm

$$I\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), R = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \text{ có phương trình là: } (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2},$$

d) Gọi phương trình mặt cầu (S_4) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có:

$$I(a; b; c) \in (Oxy) \Rightarrow c = 0;$$

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 4b + d = -21 \\ -2a + 6b + d = -11 \\ -4a - 4b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ d = -21 \end{cases};$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4 + 1 + 0 + 21} = \sqrt{26}.$$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(1; 3; 0), C(-1; 0; 3), D(1; 2; 3)$.

a) Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 25$ có tâm là điểm A .

b) Mặt cầu (S) tâm O bán kính OA có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Mặt cầu (S) đường kính AC có phương trình $(S): x - \frac{1}{2} + y^2 + z - \frac{3}{2} + z^2 = \frac{9}{2}$.

d) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính $R = 6$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 25$ có tâm là điểm $A(2; 0; 0)$.

b) Ta có $R = OA = 2 \Rightarrow$ Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Tâm $I(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2})$, bán kính $R = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (S): x - \frac{1}{2} + y^2 + z - \frac{3}{2} + z^2 = \frac{9}{2}$.

d) Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D . Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 3b = -3 \\ a - c = -1 \\ a - 2b - 3c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1; 1)$$

$$\text{Bán kính: } R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$.

a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là $(1; 0; -2)$.

b) Diện tích mặt cầu bằng 16π ($dvd\tau$).

c) Điểm $A(1; 2; 3)$ nằm trong mặt cầu.

d) Số điểm chung của đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) bằng 0.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

- a) Tọa độ tâm I của mặt cầu là
$$\begin{cases} x_I = -2 : -2 = 1 \\ y_I = 0 : -2 = 0 \\ z_I = 4 : -2 = -2 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; -2).$$
- b) $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} - 1 = 2 \Rightarrow S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi (dvdv).$
- c) $\overline{IA} = (0; 2; 5) \Rightarrow |\overline{IA}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{29} > 2 \Rightarrow$ điểm A nằm ngoài mặt cầu.
- d) Đường thẳng Δ đi qua $M(0; 1; 2)$ và nhận $\vec{u} = (2; 1; -2)$ làm một vectơ chỉ phương.
- $$d(I, \Delta) = \frac{|\overline{u, MI}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{498}}{6} > R \Rightarrow \Delta \text{ không cắt } (S) \Rightarrow \text{số điểm chung của đường thẳng } \Delta \text{ và mặt cầu } (S) \text{ bằng } 0.$$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$ và hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; -1)$.
- b) $|R - d| < 2$ với d là khoảng cách từ tâm I mặt cầu (S) đến mặt phẳng $(P): x + y + 1 = 0$.
- c) Đường thẳng AB không cắt mặt cầu (S) .
- d) Điểm M thay đổi thuộc (S) , biểu thức $2MA^2 + 3MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 105 (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Nên ý a) sai

b) Ta có khoảng cách từ tâm $I(0; 0; 1)$ đến mặt phẳng (P) là $d_{(I, (P))} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $|R - d_{(I, (P))}| = \left| \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \gg 1,53 < 2$

Nên ý b) đúng

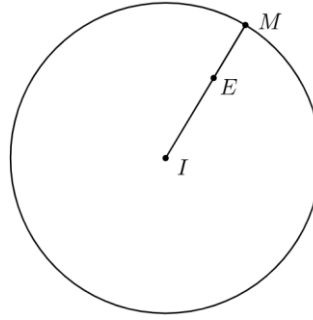
c) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-5; 5; -5)$, $\overrightarrow{AI} = (-2; 2; -3)$ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI} \text{ cùng phương } \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI} \text{ cùng phương } \Rightarrow (-5; -5; 0)$

Vậy $d_{(I, AB)} = \frac{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2}}{\sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \gg 0,82 < R$ nên đường thẳng AB cắt

(S) tại hai điểm phân biệt.

Nên ý c) sai.

d) Mặt cầu có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.



Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\vec{EA} + 3\vec{EB} = \vec{0}$ $\Rightarrow E(-1; 1; 1)$, $\vec{EB} = (-2; 2; -2)$, $\vec{EA} = (3; -3; 3)$

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\vec{ME} + \vec{EA})^2 + 3(\vec{ME} + \vec{EB})^2 \\ &= 2ME^2 + 4\vec{ME} \cdot \vec{EA} + 2EA^2 + 3ME^2 + 6\vec{ME} \cdot \vec{EB} + 3EB^2 \\ &= 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 + 2\vec{ME} \cdot \vec{EA} + 6\vec{ME} \cdot \vec{EB} = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 \end{aligned}$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $IE = (-1; 1; 1) \Rightarrow IE = \sqrt{3} < R$ suy ra E nằm trong mặt cầu nên

$$ME_{\min} = R - IE = \sqrt{5} - \sqrt{2} \text{ với } EB = 2\sqrt{3}, EA = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 5ME_{\min}^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 5(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2(2\sqrt{3})^2 + 3(3\sqrt{3})^2 \gg 108$$

Nên ý d) sai.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 169.$$

a) Mặt cầu (S) có đường kính bằng 13.

b) Diện tích mặt cầu $S_{mc} = 338\pi$.

c) Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 39 = 0$.

d) Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 24$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; 3; -1)$ và bán kính $R = 13$.

a) Đường kính của mặt cầu (S) là $d = 2R = 2.13 = 26$.

b) Diện tích mặt cầu bằng $S_{mc} = 4\pi.R^2 = 4\pi.13^2 = 676\pi$.

c) Ta có $d(I, (P)) = \frac{|1.4 - 2.3 - 2.(-1) - 39|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 13 = R$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng.

d) Gọi H là hình chiếu của I lên trục Oz nên $H(0; 0; -1)$ và H là trung điểm của AB .

$$\overline{IH} = (-4; -3; 0) \Rightarrow IH = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = 5.$$

$$\text{Ta có } AH = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

$$\text{Do } H \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } AB = 2IH = 2.12 = 24.$$

Câu 37: Trong không gian Oxyz (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.

a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8 km.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(1;3;7)$ bán kính 3 km mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 9$.

b) Ta có: $IA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{2} < 3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu. Vì điểm A nằm trong mặt cầu nên người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $A(2;2;7)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

c) Ta có: $IB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2 + (7-7)^2} = 5 > 3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Vậy người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó.

d) Ta có: $I(1;3;7)$; $IB = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2 + (7-7)^2} = 5 > 3$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu. Phương trình đường thẳng BI dạng:
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 3t \\ z = 7 \end{cases}$$

Gọi mặt cầu (S) $\cap$ BI = E suy ra tọa độ E là nghiệm của hệ

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = 3 + 3t \\ z = 7 \end{array} \right. \\ & (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 9 \end{aligned} \quad \hat{U} \quad \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{3}{5} \\ x = \frac{17}{5} \\ y = \frac{24}{5} \\ z = 7 \end{array} \right. \Rightarrow E \left(\frac{17}{5}; \frac{24}{5}; 7 \right) \Rightarrow EB = \sqrt{1,7^2 + 0,7^2} = 1,7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = -\frac{3}{5} \\ x = -\frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \\ z = 7 \end{array} \right. \Rightarrow E' \left(-\frac{7}{5}; \frac{6}{5}; 7 \right) \Rightarrow EB = 8$$

Vậy khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét là 8 km.

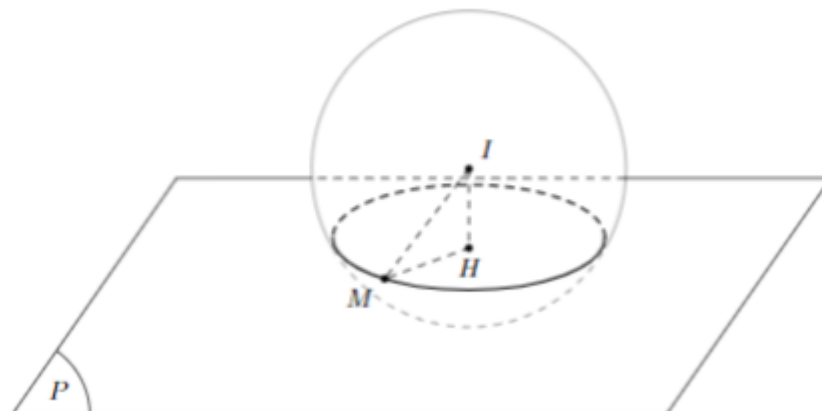
Câu 38: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.
 b) Điểm $M(1;2;3)$ thuộc (S).
 c) Điểm $N(-1;-2;-3)$ nằm ngoài mặt cầu (S).
 d) Mặt phẳng (P): $3x + 4y - 5 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có diện tích bằng $\frac{484\pi}{25}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.
 b) Thay tọa độ điểm $M(1;2;3)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta được $(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2 = 5$ (TM). Vậy $M \in (S)$.
 c) Ta có $\overrightarrow{IN} = (-2; -3; -4)$ suy ra $IN = \sqrt{29} > R$ nên điểm N nằm ngoài mặt cầu (S).
 d)



(P) cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính là r . Khi đó:

$$R^2 = r^2 + d^2(I; (P)) \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))} = \frac{11}{5}.$$

Vậy diện tích của đường tròn đó là $S = 4\pi R^2 = \frac{484\pi}{25}$.