PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Hàm số

1. Định nghĩa

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbb{R}$. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập hợp số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x.

Tập hợp D được gọi là tập xác định của hàm số.

Kí hiệu hàm số: $y = f(x), x \in D$.

Ví dụ 1.

a) Diện tích S của hình tròn bán kính r được tính theo công thức $S = \pi r^2$. Hỏi S có phải là hàm số của r hay không? Giải thích.

b) Cho công thức $y^2 = x$. Hỏi y có phải hàm số của x hay không? Giải thích.

Giải

a) S là hàm số của r vì mỗi giá trị của r chỉ cho đúng một giá trị của S.

b) y không phải là hàm số của x vì khi $x = 1$ thì ta tìm được hai giá trị tương ứng của y là 1 và -1

2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng một công thức

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{x-1}$.

Giải

a) Biểu thức $\dfrac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Biểu thức $\sqrt{x-1}$ có nghĩa khi $x - 1 \geq 0$. Vì vậy, tập xác định của hàm số đã cho là:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1; +\infty)$.

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức

Một hàm số có thể được cho bằng nhiều công thức, chẳng hạn hàm số trong Ví dụ 3 sau:

Ví dụ 3. Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0. \end{cases}$$

a) Tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2; x = 0; x = 2021$.

Giải

a) $f(x)$ có nghĩa khi $x < 0, x = 0, x > 0$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) $f(-2) = -1; f(0) = 0; f(2021) = 1$.

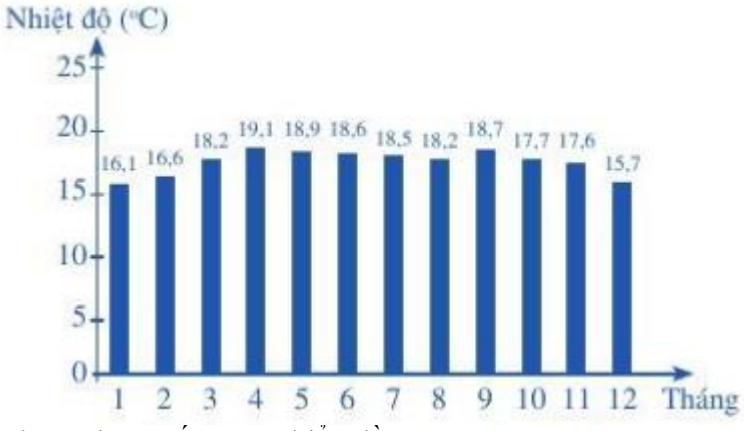
Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định là D. Khi biến số x thay đổi trong tập D thì tập hợp các giá trị y tương ứng được gọi là *tập giá trị* của hàm số đã cho.

Chẳng hạn, trong Ví dụ 3, ta có: Ứng với các giá trị của x thì $f(x)$ chỉ nhận một trong ba giá trị $-1; 0; 1$ nên tập giá trị của hàm số đó là tập hợp $\{-1; 0; 1\}$.

c) Hàm số không cho bằng công thức

Trong thực tiễn, có những tình huống dẫn tối những hàm số không thể cho bằng công thức (hoặc nhiều công thức). Chẳng hạn, trong ví dụ sau đây:

Ví dụ 4. Biểu đồ ở dưới cho biết Nhiệt độ trung bình ở Đà Lạt theo từng tháng trong năm



a) Xác định tập hợp các tháng được nếu trong biểu đồ.

b) Tương ứng tháng với nhiệt độ trung bình của tháng đó có phải là hàm số không? Giải thích.

Giải

a) Tập hợp các tháng là $D=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.

b) Mỗi tháng chỉ tương ứng với đúng một giá trị nhiệt độ trung bình nên tương ứng đó xác định một hàm số. Hàm số đó có thể được cho bằng bảng như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nhiệt độ $\left(^{\circ}C\right)$	16,1	16,6	18,2	19,1	18,9	18,6	18,5	18,2	18,7	17,7	17,6	15,7

II. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp D là tập hợp tất cả các điểm $M(x;f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi x thuộc D.

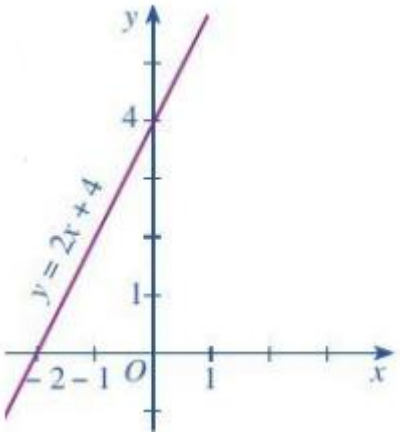
Ví dụ 5. Cho hàm số $y=2x+4$.

a) Vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho bốn điểm: $A(-1;2), B(1;6), C(2020;2021), D(2030;4064)$. Điểm nào thuộc đồ thị hàm số trên? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số trên?

Giải

a) Khi $x=0$ thì $y=4$; khi $y=0$ thì $x=-2$. Vậy đồ thị hàm số $y=2x+4$ là đường thẳng cắt trục Oy tại điểm $(0;4)$, cắt trục Ox tại điểm $(-2;0)$



b) Khi $x=-1$ thì $y=2$; khi $x=1$ thì $y=6$; khi $x=2020$ thì $y=4044$; khi $x=2030$ thì $y=4064$.

Vậy các điểm $A(-1;2), B(1;6), D(2030;4064)$ thuộc đồ thị hàm số và điểm $C(2020;2021)$ không thuộc đồ thị hàm số.

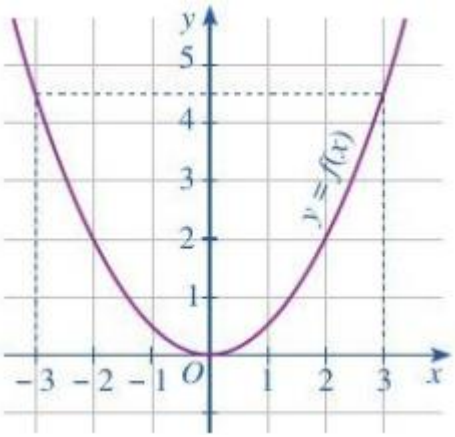
Nhận xét - Điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng toạ độ *thuộc* đồ thị hàm số $y=f(x), x\in D$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a\in D \\ b=f(a). \end{cases}$$

- Để chứng tỏ điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng toạ độ không thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$, $x\in D$, ta có thể kiểm tra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1 : Chứng tỏ rằng $a \notin D$.
Khả năng 2 : Khi $a \in D$ thì chứng tỏ rằng $b \neq f(a)$.

Ví dụ 6. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình



a) Trong các điểm có toạ độ $(-2;2),(0;0),(0;1),(2;2),(1;1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Quan sát đồ thị, tìm $f(3)$ và những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$.

Giải

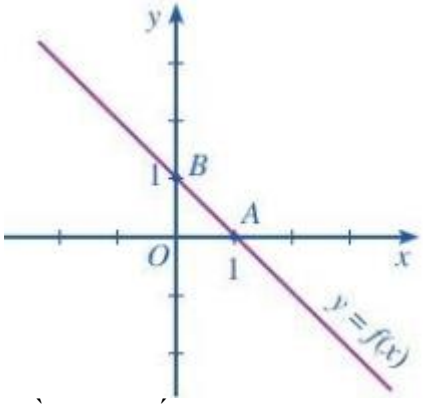
a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(-2;2),(0;0),(2;2)$

Các điểm không thuộc đồ thị hàm số có toạ độ là: $(0;1),(1;1)$.

b) Quan sát đồ thị, ta có: $f(3)=\frac{9}{2}$.

Toạ độ những điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng $\frac{9}{2}$ là: $\left(-3;\frac{9}{2}\right),\left(3;\frac{9}{2}\right)$.

Ví dụ 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình



a) Xác định tọa độ các giao điểm của đồ thị đó với hai trục toạ độ.

b) Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi công thức nào?

Giải

a) Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(1;0)$. Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;1)$.

b) Vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng cắt cả hai trục toạ độ nên hàm số đó là hàm số bậc nhất, tức là $y = f(x) = ax + b(a \neq 0)$. Giao điểm của đồ thị đó với trục Oy là điểm có toạ độ $(0;b)$ nên $b = 1$. Suy ra $y = f(x) = ax + 1$. Khi đó, giao điểm của đồ thị đó với trục Ox là điểm có toạ độ $\left(-\frac{1}{a};0\right)$ nên $-\frac{1}{a}=1$, tức là $a=-1$. Vậy $y = f(x) = -x + 1$.

III. Sự biến thiên của hàm số

1. Khái niệm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến trên khoảng $(a;b)$ nếu

$\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ nếu

$\forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ví dụ 8. Chứng tỏ hàm số $y = 6x^2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Giải

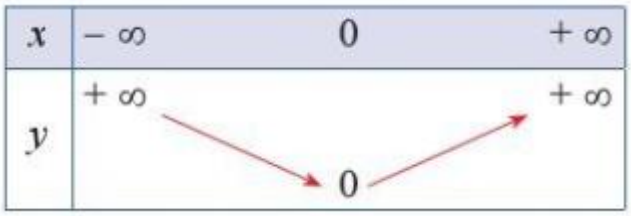
Xét hai số bất kì $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.

Ta có: $0 < x_1 < x_2$ nên $6x_1^2 < 6x_2^2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Nhận xét: Xét sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng hàm số đồng biến và các khoảng hàm số nghịch biến. Kết quả xét sự biến thiên được tổng kết trong một *bảng biến thiên.*

Chẳng hạn, sau đây là bảng biến thiên của hàm số $y = 6x^2$:



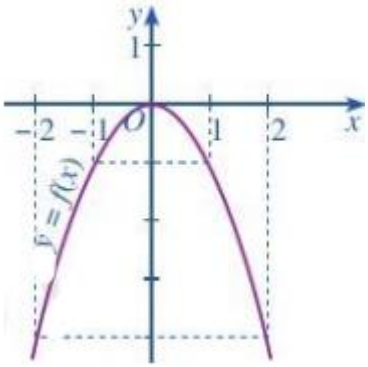
- Dấu mũi tên đi xuống (từ $+\infty$ đến 0) diễn tả hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
- Dấu mũi tên đi lên (từ 0 đến $+\infty$) diễn tả hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

Nhận xét.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Quan sát đồ thị và cho biết phát biểu nào sau đây là đúng.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Giải

a) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi lên" trên khoảng đó.

b) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ " là đúng vì đồ thị hàm số đã cho "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Phát biểu "Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ " là sai vì đồ thị hàm số đã cho vừa có phần "đi lên" vừa có phần "đi xuống" trên khoảng đó.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Để tìm tập xác định D của hàm số ta tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa, tức là

$D=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in\mathbb{R}\}$.

Chú ý. Thông thường $y=f(x)$ cho bởi các biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(v)}{v(x)}$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)\neq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\sqrt[2k]{u(x)}\,(k\in\mathbb{N})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x)\\ u(x)\geq 0\end{cases}$

Hàm số $y=f(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt[2k]{v(x)}}\,(k\in\mathbb{N})$ có nghĩa khi $\begin{cases}u(x),v(x)\\ v(x)>0\end{cases}$

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=\dfrac{3x-1}{-2x+2}$.

b) $y=\dfrac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}$.

c) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

d) $y=\dfrac{2x+1}{x^3-3x+2}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $-2x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases}2x+1\neq 0\\ x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -\dfrac{1}{2}\\ x\neq 3\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$.

c) Ta có $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

d) Hàm số xác định khi $x^3-3x+2\neq 0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x-2)\neq 0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\neq 0\\ (x^2+x-2)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -2\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y=\sqrt{3x-2}$.

b) $y=\sqrt{x^2+1}$.

c) $y=\sqrt{-2x+1}-\sqrt{x-1}$.

d) $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x-3}$.

e) $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

f) $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $3x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

b) Ta có $x^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases}-2x+3\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{3}{2}\\ x\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le\frac{3}{2}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

d) Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-2x+1\ge 0\\ x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2\ge 0\\ x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[3;+\infty)$.

e) Ta có $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{(\sqrt{x+2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{1-x^2}+1)^2}$

$=|\sqrt{x+2}+1|+|\sqrt{1-x^2}+1|=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x^2}+2$

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+2\ge 0\\ 1-x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ (1-x)(1+x)\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{cases}1-x>0\\ 1+x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-x\le 0\\ 1+x\le 0\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{cases}x<1\\ x\ge -1\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x\le -1\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-1;1]$.

f) Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-x+1\ge 0\\ x+\sqrt{x^2-x+1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\\ \sqrt{x^2-x+1}\ge -x\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}\ge -x$

$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}-x<0\\ x^2-x+1\ge 0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x<0\\ -x\ge 0\\ -x+1\ge 0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x>0\\ x\le 0\\ x\le 1\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x>0\\ x\le 0\end{cases}\right.\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = ¡$.

Câu 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

b) $y = \dfrac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}$.

c) $y = \dfrac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$.

d) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

e) $y = \sqrt{1-x} + \dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}$.

f) $y = \dfrac{2015}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}$.

g) $y = \sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \dfrac{1}{1-x}$.

h) $y = \sqrt{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1;+\infty)$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq x \leq 0$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty;0] \setminus \{-1\}$.

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 2$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2;2]$.

d) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [1;4] \setminus \{2;3\}$.

e) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-1;1] \setminus \{0\}$.

f) Hàm số xác định khi $\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-3x+2} \neq \sqrt[3]{x^2-7}$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq x^2-7 \Leftrightarrow 9 \neq 3x \Leftrightarrow x \neq 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = ¡ \setminus \{3\}$.

g) Ta có $y=\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\dfrac{1}{1-x}=\sqrt{(\sqrt{x+7}+1)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\sqrt{x+7}+1+\dfrac{1}{1-x}$

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+7\geq 0\\1-x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -7\\x\neq 1\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-7;+\infty)\setminus\{1\}$.

h) Ta có $y=\sqrt{\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)}=\sqrt{\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)}$

Hàm số xác định khi $\sqrt{(x+1)^2+1}-(x+1)\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+1}\geq x+1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1<0\\(x+1)^2+1\geq 0\\x+1\geq 0\\(x+1)^2+1\geq (x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1<0\\x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Câu 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\sqrt{|x^2+x+4|}$.

b) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x|x-4|}}$.

c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}}+|x+1|\sqrt{x^2-x+6}$.

d) $y=\dfrac{2x+1}{x(|x|-1)}$.

e) $y=\dfrac{|x|}{|x-2|+|x^2+2x|}$.

f) $y=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$.

Lời giải

a) Ta có $|x^2+x+4|=\left|\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}\right|>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)$.

b) Hàm số xác định khi $x|x-4|>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\|x-4|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 4\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)\setminus\{4\}$.

c) Ta có $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+5}}+|x+1|\sqrt{x^2-x+6}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}}}+|x+1|\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}}$

Vì $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

d) Hàm số xác định khi $x(|x|-1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ |x|-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$.

e) Hàm số xác định khi $|x-2|+\left|x^2+2x\right|\neq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. Thật vậy:

Nếu $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ thì $\left|x^2+2x\right|=8$

Nếu $\left|x^2+2x\right|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$ thì $\begin{cases} |x-2|=2 \\ |x-2|=4 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

f) Ta có $y=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}=\dfrac{|x|-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-|x|}{(|x|-1)^2}$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2-1\neq 0 \\ |x|-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm 1 \\ x\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq \pm 1$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Câu 5. Tìm m để các hàm số sau đây xác định với mọi x thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

a) $y=\sqrt{x-m}+\sqrt{2x-m-1}$.

b) $y=\sqrt{2x-3m+4}+\dfrac{x-m}{x+m-1}$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m\geq 0 \\ 2x-m-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq m \\ x\geq \dfrac{m+1}{2} \end{cases}$ (*)

+) Nếu $m\geq\dfrac{m+1}{2} \Leftrightarrow m\geq 1$ thì (*) $\Leftrightarrow x\geq m$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D=[m;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0;+\infty)\subset[m;+\infty) \Leftrightarrow m\leq 0$: không thỏa mãn $m>1$.

+) Nếu $m<\dfrac{m+1}{2} \Leftrightarrow m<1$ thì (*) $\Leftrightarrow x\geq\dfrac{m+1}{2}$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D=[m;+\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0;+\infty)\subset[\dfrac{m+1}{2};+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}\leq 0 \Leftrightarrow m\leq -1$: thỏa mãn điều kiện $m<1$.

Vậy $m\leq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x-3m+4\geq 0 \\ x+m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq\dfrac{3m-4}{2} \\ x\neq 1-m \end{cases}$

Do đó để hàm số xác định với mọi x thuộc khoảng $(0;+\infty)$, ta phải có

$\begin{cases} \dfrac{3m-4}{2}\leq 0 \\ 1-m\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq\dfrac{4}{3} \\ m\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq m\leq\dfrac{4}{3}$

Vậy $1 \le m \le \frac{4}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Tìm m để các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x - m}} + \sqrt{-x + 2m + 6}$ xác định trên $(-1;0)$.

b) $y = \sqrt{1 - |2x^2 + mx + m + 15|}$ xác định trên $[1;3]$.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x - m > 0 \\ -x + 2m + 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x \le 2m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow m < x \le 2m + 6$

Do để hàm số xác định trên $(-1;0)$, ta phải có $\begin{cases} m \le -1 \\ 2m + 6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m \le -1$.

Vậy $-3 \le m \le -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $1 - |2x^2 + mx + m + 15| \ge 0 \Leftrightarrow |2x^2 + mx + m + 15| \le 1 (*)$

Bài toán được chuyển về việc tìm m để $(*)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[1;3]$.

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[1;3]$ nên nghiệm đúng với $x = 1, x = 2$ tức là ta có:

$$\begin{cases} |2m + 17| \le 1 \\ |3m + 23| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 2m + 17 \le 1 \\ -1 \le 3m + 23 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \le m \le -8 \\ -8 \le m \le -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8$$

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có :

$(*) \Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 2x^2 - 8x + 7 \le 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \ge 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \ge 0 \\ x^2 - 4x + 3 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \le 0 \\ x - 3 \ge 0 \\ x - 3 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ x - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3 : \text{thoûa maõn.}$$

Vậy $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Tìm m để các hàm số:

a) $y = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 6x + m - 2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y = \frac{\sqrt{m + 1}}{3x^2 - 2x + m}$ xác định trên toàn bộ trục số.

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $x^2 - 6x + m - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + m - 11 > 0$

Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (x-3)^2+m-11>0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m-11>0 \Leftrightarrow m>11$

Vậy $m>11$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 3x^2-2x+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+m-\frac{1}{3} \neq 0 \end{cases}$

Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+m-\frac{1}{3} \neq 0 \end{cases}$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m-\frac{1}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1}{3}$

Vậy $m>\frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

DẠNG 2. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Để xét sự biến thiên của hàm số $y=f(x)$ trên từng khoảng xác định $(a;b)$ ta làm như sau:

Giả sử $\forall x_1, x_2 \in K: x_1<x_2$

Tính $f(x_1)-f(x_2)$

Lập tỉ số $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Nếu $T>0$ thù hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$

Nếu $T<0$ thù hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$

Câu 1. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của các hàm số sau:

a) $y=-2x+3$ trên $\mathbb{R}$.

b) $y=x^2-4x+5$ trên khoảng $(-\infty;2)$ và trên khoảng $(2;+\infty)$.

c) $y=-2x^2+4x+1$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

d) $y=\dfrac{x-3}{x-5}$ trên khoảng $(-\infty;-5)$ và trên khoảng $(-5;+\infty)$.

Lời giải

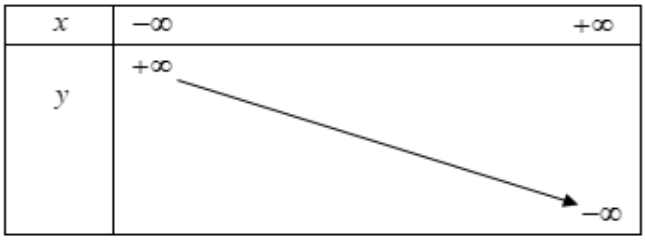
a) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1<x_2$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1+3)-(-2x_2+3)=-2(x_1-x_2)$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{-2(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=-2<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên



b) Ta có $f(x_1)- f(x_2)= (x_1^2- 4x_1 + 5)- (x_2^2- 4x_2 + 5)$

$= (x_1^2- x_2^2)- 4(x_1- x_2)= (x_1- x_2)(x_1 + x_2- 4).$

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 4.$

Do đó $\dfrac{f(x_1)- f(x_2)}{x_1- x_2} = \dfrac{(x_1- x_2)(x_1 + x_2- 4)}{x_1- x_2} = x_1 + x_2- 4 < 0.$

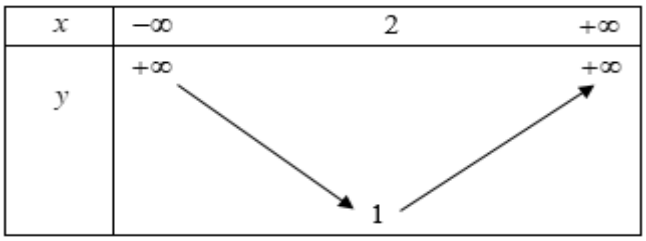
Vậy hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4.$

Do đó $\dfrac{f(x_1)- f(x_2)}{x_1- x_2} = \dfrac{(x_1- x_2)(x_1 + x_2- 4)}{x_1- x_2} = x_1 + x_2- 4 > 0.$

Vậy hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên



c) Ta có $f(x_1)- f(x_2)= (-2x_1^2 + 4x_1 + 1)- (2x_2^2 + 4x_2 + 1)$

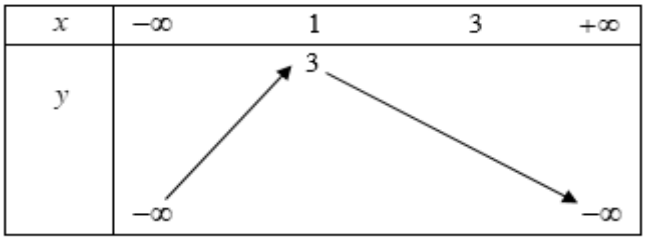
$= -2(x_1^2- x_2^2)+ 4(x_1- x_2)= -2(x_1- x_2)(x_1 + x_2- 2).$

Với mọi $x_1, x_2 \in (3;+\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 3 \\ x_2 > 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 6.$

Do đó $\dfrac{f(x_1)- f(x_2)}{x_1- x_2} = \dfrac{-2(x_1- x_2)(x_1 + x_2- 2)}{x_1- x_2} = -2(x_1 + x_2- 2) < 0.$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(3;+\infty)$.

Bảng biến thiên



d) Ta có $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1-3}{x_1+5}-\dfrac{x_2-3}{x_2+5}$

$=\dfrac{(x_1-3)(x_2+5)-(x_2-3)(x_1+5)}{(x_1+5)(x_2+5)}=\dfrac{8(x_1-x_2)}{(x_1+5)(x_2+5)}.$

Với mọi $x_1,x_2\in(-\infty;-5)$ và $x_1<x_2$. Ta có $\begin{cases}x_1<-5\\x_2<-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+5<0\\x_2+5<0\end{cases}.$

Do đó $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{8}{(x_1+5)(x_2+5)}>0.$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;-5)$.

Với mọi $x_1,x_2\in(-5;+\infty)$ và $x_1<x_2$. Ta có $\begin{cases}x_1>-5\\x_2>-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+5>0\\x_2+5>0\end{cases}.$

Do đó $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{8}{(x_1+5)(x_2+5)}>0.$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-5;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Câu 2. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{2x-7}$ trên khoảng $\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

b) $y=\sqrt{x^2+2}$.

c) $y=x-\sqrt{3x+5}$ trên khoảng $(5;+\infty)$.

d) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải

a) Với mọi $x_1,x_2\in\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$ và $x_1<x_2$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{2x_1-7}-\sqrt{2x_2-7}=\dfrac{2(x_1-x_2)}{\sqrt{2x_1-7}+\sqrt{2x_2-7}}.$

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{2}{\sqrt{2x_1-7}+\sqrt{2x_2-7}}>0.$

Vậy hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với mọi $x_1,x_2\in D$ và $x_1<x_2$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+2}-\sqrt{x_2^2+2}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}$.

Nếu $x_1<x_2<0$ thì $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}<0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Nếu $0<x_1<x_2$ thì $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+2}+\sqrt{x_2^2+2}}>0$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

c) Với mọi $x_1,x_2\in(5;+\infty)$ và $x_1<x_2$. Ta có

$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1-\sqrt{3x_1+5}\right)-\left(x_2-\sqrt{3x_2+5}\right)=(x_1-x_2)-(\sqrt{3x_1+5}-\sqrt{3x_2+5})$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}-3}{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}}$.

Vì $x_1,x_2\in(5;+\infty)$ nên $\begin{cases}x_1>5\\x_2>5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3x_1+5}>2\sqrt{5}\\\sqrt{3x_2+5}>2\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}-3>0$.

Do đó $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}-3}{\sqrt{3x_1+5}+\sqrt{3x_2+5}}>0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(5;+\infty)$.

d) Tập xác định $D=(1;+\infty)$.

Với mọi $x_1,x_2\in D$ và $x_1<x_2$. Ta có

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{\sqrt{x_1-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x_2-1}}=\dfrac{\sqrt{x_2-1}-\sqrt{x_1-1}}{\sqrt{x_1-1}\times\sqrt{x_2-1}}$

$=-\dfrac{(x_1-x_2)}{\sqrt{x_1-1}\times\sqrt{x_2-1}(\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1})}$

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{\sqrt{x_1-1}\times\sqrt{x_2-1}(\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1})}<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 3. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{1}{x^2}$.

b) $y=x^{2015}+1$.

c) $y=|x+2|-|x-2|$ trên khoảng $(-2;2)$.

Lời giải

a) Tập xác định $D=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{x_2^2-x_1^2}{(x_1x_2)^2}$.

Với mọi $x_1,x_2\in(-\infty;0)$ và $x_1<x_2$ ta có $\begin{cases}x_1<0\\x_2<0\end{cases}\Rightarrow -(x_2+x_1)>0$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_2+x_1}{(x_1x_2)^2}>0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Với mọi $x_1,x_2\in(0;+\infty)$ và $x_1<x_2$ ta có $\begin{cases}x_1>0\\x_2>0\end{cases}\Rightarrow -(x_2+x_1)<0$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_2+x_1}{(x_1x_2)^2}<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=(x_1^{2015}+1)-(x_2^{2015}+1)=x_1^{2015}-x_2^{2015}$.

Với mọi $x_1,x_2\in D$ và $x_1<x_2$ ta có

$x_1^{2015}<x_2^{2015}$ suy ra $x_1^{2015}-x_2^{2015}<0\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<0$ hay $f(x_1)<f(x_2)$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Với mọi $x\in(-2;2)$ ta có $\begin{cases}x+2>0\\x-2<0\end{cases}$.

Do đó $y=|x+2|-|x-2|=(x+2)+(x-2)=2x$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=2x_1-2x_2=2(x_1-x_2)$. Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=2>0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-2;2)$.

Câu 4. Với giá trị nào của m thì các hàm số sau đồng biến trên các khoảng xác định của nó:

a) $y=(m+1)x+m-2$.

b) $y=\dfrac{m}{x-2}$.

Lời giải

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với mọi $x_1,x_2\in D$ và $x_1<x_2$ ta có :

$f(x_1)-f(x_2)=\left[(m+1)x_1+m-2\right]-\left[(m+1)x_2+m-2\right]=(m+1)(x_1-x_2)$

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=m+1$.

Để hàm số đồng biến trên $D=\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m+1>0\Leftrightarrow m>-1$.

b) Tập xác định $D=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{m}{x_1-2}\right)-\left(\frac{m}{x_2-2}\right)=\frac{-m(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

Với mọi $x_1,x_2\in(-\infty;2)$ và $x_1<x_2$ ta có :

$\begin{cases}x_1<2\\x_2<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2<0\\x_2-2<0\end{cases}\Rightarrow(x_1-2)(x_2-2)>0$ và $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-m}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi $-m>0\Leftrightarrow m<0$.

Với mọi $x_1,x_2\in(2;+\infty)$ và $x_1<x_2$ ta có :

$\begin{cases}x_1>2\\x_2>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2>0\\x_2-2>0\end{cases}\Rightarrow(x_1-2)(x_2-2)>0$ và $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-m}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

Để hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $-m>0\Leftrightarrow m<0$.

Câu 5. Với giá trị nào của m thì hàm số $y=-x^2+(m-1)x+2$ nghịch biến trên $(1;2)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y=-x^2+(m-1)x+2=-\left(x-\frac{m-1}{2}\right)^2+2+\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$

Ta phân chia tập xác định $\mathbb{R}$ thành hai khoảng $\left(-\infty;\frac{m-1}{2}\right)$ và $\left(\frac{m-1}{2};+\infty\right)$.

Trên khoảng $\left(-\infty;\frac{m-1}{2}\right)$ thì hàm số đồng biến, trên khoảng $\left(\frac{m-1}{2};+\infty\right)$ nghịch biến.

Do đó điều kiện để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ là $(1;2)\subset\left(\frac{m-1}{2};+\infty\right)$ hay

$\frac{m-1}{2}\le 1\Leftrightarrow m\le 3$.

Cách 2.

Với mọi $x_1\ne x_2$, ta có

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\left[x_1^2+(m-1)x_1+2\right]-\left[x_2^2+(m-1)x_2+2\right]}{x_1-x_2}=-(x_1+x_2)+m-1$

Để hàm số nghịch biến trên $(1;2)$ khi và chỉ khi $-(x_1+x_2)+m-1<0$,

$\forall x_1,x_2\in(1;2)\Leftrightarrow m\le 3$.

DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ - GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D.

Tập hợp $T=\{y=f(x)\,|\,x\in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y=f(x)$.

Nhận dạng: Khi hàm số chỉ xuất hiện tích các biểu thức là hằng số hoặc tổng bình phương các biểu thức là hằng số.

Bất đẳng thức:

+) Cho $a,\ b\ge 0$ ta luôn có $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ hay *hay* $a+b\ge 2\sqrt{ab}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$

+) $a,\ b\in\mathbb{R}$ ta có $a^2+b^2\ge 2ab$, đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Câu 1. Tìm tập giá trị của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2$. Tập xác định: $D=[-2;\ 2]$.

$\forall x\in D$ ta có $x^2\ge 0\Leftrightarrow 4-x^2\le 4\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}\le 2$.

Mặt khác: $\sqrt{4-x^2}\ge 0$. Nên $0\le\sqrt{4-x^2}\le 2,\ \forall x\in D$.

Vậy tập giá trị của hàm số $T=[0;\ 2]$.

Câu 2. Tìm tập giá trị của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2-4x+5>0\Leftrightarrow (x-2)^2+1>0$, đúng $\forall x\in\mathbb{R}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+1}\ge 1>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\le 1$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}>0$. Nên $0<\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}\le 1,\ \forall x\in D$.

Vậy tập giá trị của hàm số $T=(0;1]$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-2\sqrt{x+2}$

Lời giải

TXĐ: $[-2,+\infty)$

Ta có $y=x-2\sqrt{x+2}=x+2-2\sqrt{x+2}+1-1=\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2-1\ge -1\Rightarrow y_{\min}=-1$ khi $x=-1$

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1$.

Lời giải

Ta có $y=x+\dfrac{2}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}+1$.

Với $x>1$ thì $x-1>0$.

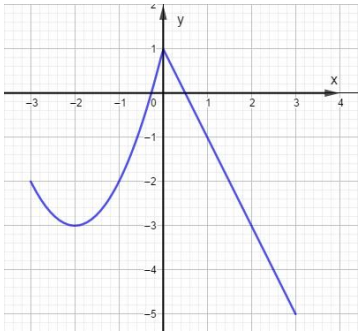
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $x-1+\dfrac{2}{x-1}\ge 2\sqrt{2}$. Suy ra $y\ge 2\sqrt{2}+1$.

$y=2\sqrt{2}+1$ khi $x-1=\dfrac{2}{x-1}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=2\Rightarrow x=1+\sqrt{2}$

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị của hàm số tại $x=-1$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f(-1)=-2$.

Câu 2. Tìm các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y=\dfrac{x+2}{x-1}=1+\dfrac{3}{x-1}$.

Tung độ của một điểm thuộc đồ thị hàm số là số nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{3}{x-1}\in\mathbb{Z}$. (1)

Vì hoành độ của điểm đó là số nguyên nên (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3 \\ x-1=-3 \\ x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2 \\ x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Vậy các điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có tọa độ nguyên là

$$A(4;2),\ B(-2;0),\ C(2;4),\ D(0;-2).$$

Câu 3. Tịnh tiến đồ thị hàm số.

a) $y=f(x)=2x^2-3x+1$ lên trên 2 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số nào?

b) $y=g(x)=-3|x|+1$ xuống dưới 3 đơn vị. Sau đó sang trái 4 đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

c) $y=k(x)=\dfrac{x-4}{2x+3}$ sang phải 1 đơn vị. Sau đó lên trên 5 đơn vị thì ta thu được đồ thị hàm số nào?

Lời giải

a) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)=2x^2-3x+1$ lên trên 2 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=f(x)+2=2x^2-3x+3$.

b) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=g(x)=-3|x|+1$ xuống dưới 3 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=g(x)-3=-3|x|-2=h(x)$.

Sau đó tịnh tiến đồ thị $y=h(x)$ sang trái 4 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=h(x+4)=-3|x+4|-2$.

c) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=k(x)=\dfrac{x-4}{2x+3}$ sang phải 1 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=k(x-1)=\dfrac{x-5}{2x+1}=l(x)$.

Sau đó lên trên 5 đơn vị thì ta thu được đồ thị của hàm số $y=l(x)+5=\dfrac{x-5}{2x+1}+5=\dfrac{11x}{2x+1}$.

Câu 4. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau

a) $y=g(x)=x^2+3x+2$.

b) $y=h(x)=x^2-3|x|+2$.

c) $y=k(x)=-x^2+3x-2$.

d) $y=l(x)=|x^2-3x+2|$.

Lời giải

a) Ta có $y=g(x)=x^2+3x+2=f(-x)$.

Vậy từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ ta lấy đối xứng qua trục tung thì được đồ thị hàm số $y=g(x)=x^2+3x+2$.

b) Ta có $y=h(x)=x^2-3|x|+2=\begin{cases} f(x)=x^2-3x+2 & \text{khi } x\geq 0 \\ x^2+3x+2 & \text{khi } x<0. \end{cases}$

Hơn nữa hàm số $h(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ suy ra đồ thị hàm số $y=h(x)=x^2-3|x|+2$ như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ bên phải trục tung.

Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số vừa giữ nguyên ở trên qua trục tung, ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=h(x)$.

c) Ta có $y=k(x)=-x^2+3x-2=-(x^2-3x+2)=-f(-x)$.

Vậy từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ ta lấy đối xứng qua trục hoành thì được đồ thị hàm số $y=k(x)=-x^2+3x-2$.

d) Ta có $y=l(x)=|x^2-3x+2|=\begin{cases} f(x)=x^2-3x+2 & \text{khi } x^2-3x+2\geq 0 \\ -f(x)=-(x^2-3x+2) & \text{khi } x^2-3x+2<0. \end{cases}$

Do đó từ từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2-3x+2$ suy ra đồ thị hàm số $y=l(x)=|-x^2+3x-2|$ như sau:

Đồ thị hàm số $y=f(x)$phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.

Câu 5. Đồ thị hàm số

a) $y=-x^2-2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+3$ như thế nào.

b) $y=\dfrac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{3x+4}$ như thế nào.

Lời giải

a) Đặt $f(x)=x^2-2x+3$. Ta có $-x^2-2=-(x+1)^2+2(x+1)-3=-f(x+1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^2-2$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+3$ bằng cách tịnh tiến sang trái 1 đơn vị, sau đó lấy đối xứng qua trục hoành.

b) Đặt $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+4}$. Ta có $\dfrac{-7x+6}{-3x+4}=\dfrac{7(-x)+6}{3(-x)+4}=\dfrac{(-x)-2}{3(-x)+4}+2=f(-x)+2$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{-7x+6}{-3x+4}$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{3x+4}$ bằng cách tịnh tiến lên trên 2 đơn vị, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x^2+m^2}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ với m là tham số. Biết đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3. Hãy tính $P=f(-4)+f(1)$.

Lời giải

Ta có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3

Suy ra $f(0)=3\Leftrightarrow\sqrt{m^2}=3\Leftrightarrow m^2=9$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x^2+9}}{x-1} & \text{khi } x<1\\ 2x & \text{khi } x\ge 1\end{cases}$ nên ta có

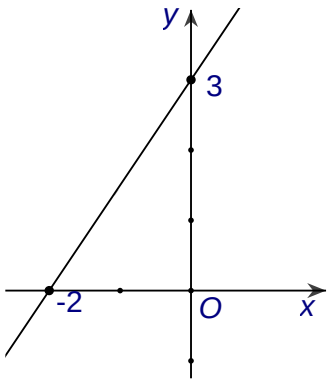
$$P=f(-4)+f(1)=\frac{-4-\sqrt{16+9}}{-4-1}+2=\frac{9}{5}+2=\frac{19}{5}.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}|mx-1| & khi\ \ x\in(-\infty;0)\\ x^2+2x-1 & khi\ \ x\in[0;+\infty)\end{cases}$. Tìm điều kiện của m để đồ thị hàm số không đi qua điểm $A(-2;3)$.

Lời giải

Để A không thuộc vào đồ thị hàm số thì $|-2m-1|\ne 3\Leftrightarrow\begin{cases}-2m-1\ne 3\\ -2m-1\ne -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne -2\\ m\ne 1\end{cases}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Với $M(x;y)$ là một điểm bất kì nằm trên đồ thị hàm số $y=f(x)$. Tìm tập hợp các điểm $I(2x+3;3y)$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $y = f(x) = \frac{3}{2}x + 3 \quad (1)$

Đặt $I(x_I ; y_I)$ thì $\begin{cases} x_I = 2x + 3 \\ y_I = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x_I - 3}{2} \\ y = \frac{y_I}{3} \end{cases}$

Thay vào (1) ta có $\frac{y_I}{3} = \frac{3}{2}.\frac{x_I - 3}{2} + 3 \Leftrightarrow 4y_I = 9x_I + 9 \Leftrightarrow y_I = \frac{9}{4}x_I + \frac{9}{4}$

Vậy tập hợp điểm I là đường thẳng $y = \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$.

DẠNG 5. XÁC ĐỊNH BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & \text{khi } x > 3 \\ \sqrt[3]{x + 8} & \text{khi } 0 \le x \le 3 \end{cases}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính các giá trị $f(0), f(\sqrt{2}), f(-1), f(\sqrt{5}), f(5)$.

Lời giải

a) Khi $x > 3$ thì hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ xác định vì $x^2 > 9$.

Khi $0 \le x \le 3$ thì hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x + 8}$ xác định.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [0; +\infty)$.

b) Ta có $0 \in [0; 3]$ nên $f(0) = \sqrt[3]{0 + 8} = 2$;

$\sqrt{2} \in [0; 3]$ nên $f(0) = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 8}$;

$-1 \notin D$ nên $f(-1)$ không xác định;

$\sqrt{5} \in [0; 3]$ nên $f(0) = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 8}$;

$5 \in (3; +\infty)$ nên $f(0) = \sqrt{5^2 - 4} = \sqrt{21}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{x + 2} & \text{khi } x \ge 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2x + 1}}{x - 1} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính các giá trị $f(0), f(2), f(-1), f(-3)$.

Lời giải

a) Khi $x \geq 0$ thì hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ xác định vì $x+2\geq 2>0$.

Khi $x<0$ thì hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}}{x-1}$ xác định vì $x-1\neq 0$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

b) Ta có $0\in(0;+\infty)$ nên $f(0)=\dfrac{2.0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$;

$2\in(0;+\infty)$ nên $f(2)=\dfrac{2.2+1}{2+2}=\dfrac{5}{4}$;;

$-1\in(-\infty;0)$ nên $f(-1)=\dfrac{\sqrt[3]{2.(-1)+1}}{-1-1}=\dfrac{1}{2}$;

$-3\in(-\infty;0)$ nên $f(-1)=\dfrac{\sqrt[3]{2.(-3)+1}}{-3-1}=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{4}$;

$5\in(3;+\infty)$ nên $f(0)=\sqrt{5^2-4}=\sqrt{21}$.

Câu 3. Cho thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Hãy xác định hàm số $f(f(x))$và $f(f(f(x)))$.

Lời giải

$\cdot\ f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

$\cdot\ f(f(f(x)))=\dfrac{f(f(x))}{\sqrt{1+f^2(f(x))}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x)=2x-4$ và $g(x)=x^2+13$. Hãy xác định hàm số $f(g(x))$ và $g(f(x))$

Lời giải

$f(g(x))=2(x^2+13)-4=2x^2+22$.

$g(f(x))=(2x-4)^2+13=4x^2-16x+29$.

Câu 5. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f(x+3)=2x-1$. *b)* $f(x-1)=x^2-3x+3$.

Lời giải

a) Đặt $t=x+3\Rightarrow x=t-3$. Ta có: $f(x+3)=2x-1\Rightarrow f(t)=2(t-3)-1=2t-7\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Vậy $f(x)=2x-7\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Cách 2: Ta có: $f(x)=2x-7=f((x+3)-3)=2(x-3)-1=2x-7\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$. Ta có:

$f(x-1) = x^2 - 3x + 3 \Rightarrow f(t) = (t+1)^2 - 3(t+1) + 3 = t^2 - t + 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) = x^2 - x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách 2: Ta có: $f(x) = = f((x-1)+1) = (x+1)^2 - 3(x+1) + 3 = x^2 - x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 6. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. *b*) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Lời giải

a) Ta biến đổi biểu thức về dạng $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2. \ (1)$

Từ (1) suy ra $f(x) = x^2 - 2$ với mọi $|x| \geq 2$.

Thử lại thấy $f(x) = x^2 - 2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^2 - 2$.

b) Ta biến đổi biểu thức về dạng $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \ (2)$

Từ (2) suy ra $f(x) = x^3 - 3x$ với mọi $|x| \geq 2$.

Thử lại thấy $f(x) = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^3 - 3x$.

Câu 7. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + 3, \ \forall x \neq 1$. *b*) $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}, \ \forall x \neq -2, x \neq 1$.

Lời giải

a) Đặt $t = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1}, \ \forall x \neq 1$. Thay vào $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + 3$ ta được

$f(t) = \frac{t+1}{t-1} + 3 = \frac{4t-2}{t-1}$.

Suy ra $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$.

Thử lại thấy $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$.

b) Đặt $t = \frac{3x+1}{x+2} \Rightarrow x = \frac{2t-1}{3-t}, \ \forall x \neq -2$. Thay vào $f\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$ ta được

$f(t) = \frac{\frac{2t-1}{3-t} + 1}{\frac{2t-1}{3-t} - 1} = \frac{t+2}{3t-4}$. Suy ra $f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$.

Thử lại thấy $f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \frac{x+2}{3x-4}$.

Câu 8. Xác định hàm số $f(x)$ biết

a) $2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4$.. *b*) $f(x) - xf(-x) = x + 1$.

c) $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$.

Lời giải

a) Thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x) - f(x) = (-x)^4 - 12(-x)^3 + 4 = x^4 + 12x^3 + 4$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} 2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4 \\ -f(x) + 2f(-x) = x^4 + 12x^3 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f(x) - 2f(-x) = 2x^4 - 24x^3 + 8 \quad (1) \\ -f(x) + 2f(-x) = x^4 + 12x^3 + 4 \quad (2) \end{cases}.$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được

$3f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 12$ hay $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$.

Thử lại thấy $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$.

b) Thay x bằng $-x$ ta được $f(-x) + xf(x) = -x + 1$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} f(x) - xf(-x) = x + 1 \\ f(-x) + xf(x) = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - xf(-x) = x + 1 \quad (1) \\ x^2 f(x) + xf(-x) = -x^2 + x \quad (2) \end{cases}.$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được

$(x^2 + 1) f(x) = -x^2 + 2x + 1$ hay $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

Thử lại thấy $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

c) Thay x bằng $1-x$ ta được $(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \quad (1) \\ (1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \quad (2) \end{cases}.$$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$. Thay vào (2) ta được

$(1-x)^2 \left[2x - x^4 - x^2 f(x)\right] + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \Leftrightarrow f(x) = 1 - x^2$.

Thử lại thấy $f(x) = 1 - x^2$ thỏa yêu cầu bài toán. Vậy $f(x) = 1 - x^2$.