

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Bất phương trình bậc hai một ẩn

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có một trong các dạng sau:

$ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$, trong đó a, b, c là các số thực đã cho, $a \neq 0$.

- Đối với bất phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c < 0$, mỗi số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $ax_0^2 + bx_0 + c < 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Tập hợp các nghiệm x_0 như thế còn được gọi là tập nghiệm của bất phương trình bậc hai đã cho.

Nghiệm và tập nghiệm của các dạng bất phương trình bậc hai ẩn x còn lại được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 1. Cho bất phương trình bậc hai một ẩn $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1). Trong các giá trị sau đây của x , giá trị nào là nghiệm của bất phương trình (1)?

a) $x = 2$

b) $x = 0$;

c) $x = 3$.

Giải

a) Với $x = 2$, ta có: $2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0$. Vậy $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình (1).

b) Với $x = 0$, ta có: $0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Vậy $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

c) Với $x = 3$, ta có: $3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$. Vậy $x = 3$ không phải là nghiệm của bất phương trình (1).

Chú ý: Giải bất phương trình bậc hai ẩn x là đi tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

II. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn

1. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách xét dấu của tam thức bậc hai

Nhận xét: Để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$), ta chuyển việc giải bất phương trình đó về việc tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+". Cụ thể, ta làm như sau:

Bước 1. Xác định dấu của hệ số a và tìm nghiệm của $f(x)$ (nếu có).

Bước 2. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập hợp những giá trị của x sao cho $f(x)$ mang dấu "+".

Chú ý: Các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ được giải bằng cách tương tự.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $2x^2 - 5x + 2 > 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 > 0$

Giải

a) Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 2$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = 2 > 0$.

Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức

$2x^2 - 5x + 2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 > 0$ là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2 - 2x + 8$ có hai nghiệm $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ và có hệ số $a = -1 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2 - 2x + 8$ mang dấu "+" là $(-4; 2)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 - 2x + 8 > 0$ là $(-4; 2)$.

2. Giải bất phương trình bậc hai một ẩn bằng cách sử dụng đồ thị

Nhận xét

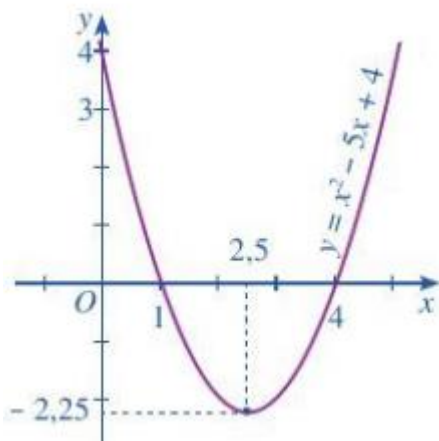
- Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía trên trục hoành.

- Tương tự, giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ là tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol $y = ax^2 + bx + c$ nằm phía dưới trục hoành.

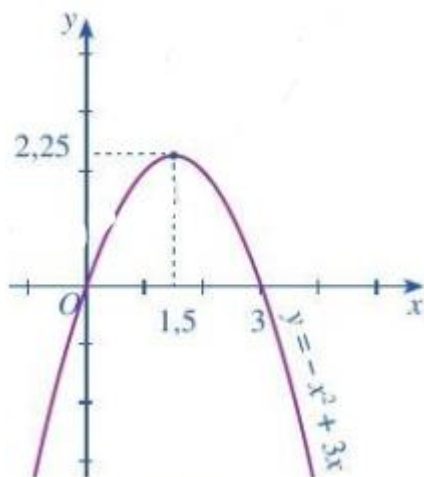
Như vậy, để giải bất phương trình bậc hai (một ẩn) có dạng $f(x) > 0$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$) bằng cách sử dụng đồ thị, ta có thể làm như sau: Dựa vào parabol $y = ax^2 + bx + c$, ta tìm tập hợp những giá trị của x ứng với phần parabol đó nằm phía trên trục hoành. Đối với các bất phương trình bậc hai có dạng $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, ta cũng làm tương tự.

Ví dụ 3. Quan sát đồ thị ở Hình và giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$.



b) $-x^2 + 3x > 0$.



Giải

a) Quan sát đồ thị ở a, ta thấy: $x^2 - 5x + 4 < 0$ biểu diễn phần parabol $y = x^2 - 5x + 4$ nằm phía dưới trục hoành, tương ứng với $1 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 5x + 4 < 0$ là khoảng $(1; 4)$.

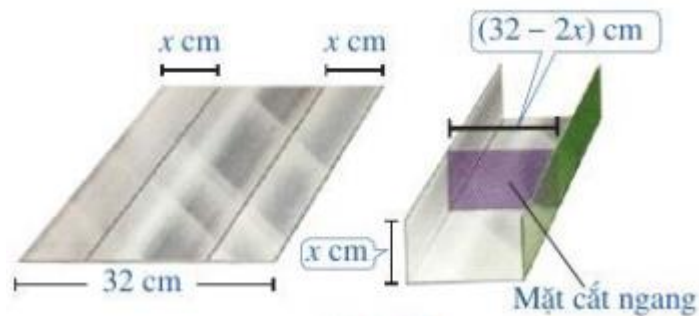
b) Quan sát đồ thị ở b, ta thấy: $-x^2 + 3x > 0$ biểu diễn phần parabol $y = -x^2 + 3x$ nằm phía trên trục hoành, tương ứng với $0 < x < 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x > 0$ là khoảng $(0; 3)$.

III. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình; ứng dụng vào tính toán lợi nhuận trong kinh doanh; tính toán điểm rơi trong pháo binh; ...

Chúng ta sẽ làm quen với những ứng dụng đó qua một số ví dụ sau đây.

Ví dụ 4. Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật (như hình) với bề ngang 32cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông. Để đảm bảo kỹ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120cm^2 .



Hỏi rãnh nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu xăng-ti-mét?

Giải

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình thì kích thước của mặt cắt ngang là $x(\text{cm})$ và $32 - 2x(\text{cm})$. Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32 - 2x)x (\text{cm}^2)$

Ta thấy: Diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước lớn hơn 120cm^2 khi và chỉ khi

$$(32 - 2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0.$$

Tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ có hai nghiệm $x_1 = 6, x_2 = 10$ và hệ số $a = -2 < 0$. Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-2x^2 + 32x - 120$ mang dấu "+" là $(6; 10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0$ là $[6; 10]$.

Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6cm .

Ví dụ 5. Tìm giao các tập nghiệm của hai bất phương trình sau:

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \quad (3) \text{ và } x^2 - 9 < 0 \quad (4)$$

Giải

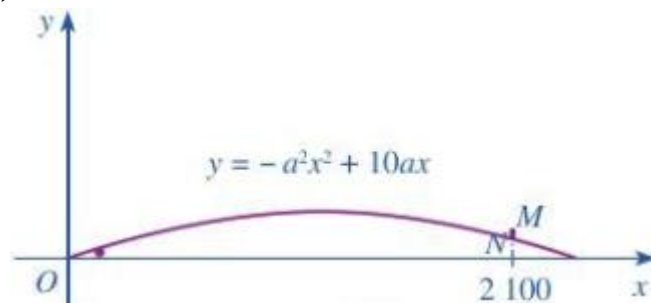
Ta có: $(3) \Leftrightarrow -4 < x < 2$. Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_3 = (-4; 2)$;

$(4) \Leftrightarrow -3 < x < 3$. Tập nghiệm của bất phương trình (4) là $S_4 = (-3; 3)$.

Giao các tập nghiệm của hai bất phương trình trên là:

$$S = S_3 \cap S_4 = (-4; 2) \cap (-3; 3) = (-3; 2)$$

Ví dụ 6. Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0; 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100; 25)$ và $N(2100; 15)$



Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ ($a > 0$) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.

Giải

Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là:

$$y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a.$$

Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thỏa mãn các bất phương trình sau:

$$2100 \leq \frac{10}{a} \quad (5); -4410000a^2 + 21000a \leq 25 \quad (6); -4410000a^2 + 21000a \geq 15 \quad (7).$$

$$- (5) \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq 210 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{210}. \text{ Vì } a > 0 \text{ nên } a \in \left(0; \frac{1}{210}\right].$$

$$- (6) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (2100a - 5)^2 \geq 0. \text{ Bất phương trình này đúng } \forall a > 0.$$

$$- (7) \Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} \leq a \leq \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}$$

$$\Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$$

Do $\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} < \frac{1}{210}$ nên

$$\left(0; \frac{1}{210} \right) \cap \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right] = \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]$$

Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi

$$a \in \left[\frac{1}{420} - \frac{\sqrt{10}}{2100}; \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100} \right]. \text{ Vậy giá trị lớn nhất của } a \text{ là } \frac{1}{420} + \frac{\sqrt{10}}{2100}.$$

Tìm hiểu thêm

Bảng dưới đây tổng kết các trường hợp có thể xảy ra khi giải bất phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c > 0 (*) (a \neq 0).$$

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dấu của Δ	Dấu của a	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$ $f(x)$ có hai nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$		$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$	$(*) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$\Delta = 0$ $f(x)$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$		$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$(*)$ vô nghiệm
$\Delta < 0$ $f(x)$ vô nghiệm		$(*) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$	$(*)$ vô nghiệm

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

Câu 1. Giải các bất phương trình sau

a) $-3x^2 + 2x + 1 < 0$. b) $x^2 + x - 12 < 0$.

Lời giải.

a) Ta có $-3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$-3x^2+2x+1$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

b) Ta có $x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
x^2+x-12	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-4; 3)$.

Câu 2. Giải các bất phương trình sau

a) $(1-2x)(x^2-x-1) > 0$.

b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Lời giải.

a) Ta có $1-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$		
$1-2x$	+		+	0	-		-
x^2-x-1	+	0	-		-	0	+
VT	+	0	-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

b) Bất phương trình tương đương với

$$(x^4 - 4x^2 + 4) - (x^2 - 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 - x - 1) \leq 0.$$

Ta có $x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$			
x^2+x-3	+	0	-		-	0	+		+
x^2-x-1	+		+	0	-		-	0	+
VT	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Câu 3. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{x^2-1}{(x^2-3)(-3x^2+2x+8)} > 0.$

b) $x^2+10 \leq \frac{2x^2+1}{x^2-8}.$

Lời giải.

a) Ta có

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1; \quad x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}; \quad -3x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$					
x^2-1	+		+		+	0	-	0	+		+		+
x^2-3	+	0	-		-		-		-	0	+		+
$-3x^2+2x+8$	-		-	0	+		+		+		+	0	-
VT	-		+		-	0	+	0	-		+		-

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 1) \cup (\sqrt{3}; 2).$$

b) Bất phương trình tương đương với

$$\frac{2x^2+1}{x^2-8} - x^2 + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+1-(x^2-8)(x^2+10)}{x^2-8} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{81-x^4}{x^2-8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(9-x^2)(9+x^2)}{(x^2-8)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x^2-8} \geq 0.$$

$$\text{Ta có } 9-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 3; \quad x^2-8=0 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$+\infty$			
$9-x^2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
x^2-8	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
VT	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3].$$

Câu 4. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{|x^2-x|-2}{x^2-x-1} \geq 0.$

b) $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6} \leq 0.$

Lời giải.

a) Vì $|x^2 - x| + 2 > 0$ nên

$$\frac{|x^2 - x| - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|x^2 - x| - 2)(|x^2 - x| + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 2)}{x^2 - x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1} \geq 0 \text{ (do } x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0).$$

Ta có $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}; x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	$+\infty$			
x^2-x-2	+	0	-		-	0	+		
x^2-x-1	+		+	0	-	0	+		
$\frac{x^2-x-2}{x^2-x-1}$	+	0	-		+		-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (-\infty; 1] \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup [2; +\infty).$$

b) Điều kiện $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + \sqrt{3}x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases}.$

Vì $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1} > 0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1})}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + \sqrt{3}x - 6} \leq 0.$$

Ta có $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}; x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
$x^2 - x$	+		+	0	-	0	+		+
$x^2 + \sqrt{3}x - 6$	+	0	-		-		-	0	+
$\frac{x^2 - x}{x^2 + \sqrt{3}x - 6}$	+		-	0	+	0	-		+

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = [-1; 0] \cup [1; \sqrt{3}).$$

Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai**Câu 1.** Tìm m để các phương trình sau có nghiệm.

a) $x^2 - mx + m + 3 = 0$.

b) $(1+m)x^2 - 2mx + 2m = 0$.

Lời giải.

a) Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = m^2 - 4(m+3) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

Vậy với $m \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$ thì phương trình có nghiệm.b) Với $m = -1$, phương trình trở thành $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Suy ra $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Với $m \neq -1$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = m^2 - 2m(1+m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vậy với $-2 \leq m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm.**Câu 2.** Giải và biện luận bất phương trình $(m+1)x^2 - 2(2m-1)x - 4m + 2 < 0$.**Lời giải.**□ Với $m = -1$, bất phương trình trở thành $6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -1$.□ Với $m \neq -1$, ta có $g(x) = (m+1)x^2 - 2(2m-1)x - 4m + 2$ là tam thức bậc hai có

$$\begin{cases} a = m+1 \\ \Delta' = 8m^2 - 2m - 1 \end{cases}$$

□ Bảng

xét

dấu

m	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m+1$	-	0	+	+	+
$8m^2 - 2m - 1$	+		+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu, ta có

-Nếu $m < -1$, ta có $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$;

$$\text{Với } x_1 = \frac{2m-1 - \sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}, x_2 = \frac{2m-1 + \sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}.$$

-Nếu $-1 < m < -\frac{1}{4}$ hoặc $m > \frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$. Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là

$$S = (x_1; x_2).$$

-Nếu $-\frac{1}{4}, m, \frac{1}{2}$, ta có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$. Suy ra $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bpt vô nghiệm.

-Kết luận:

□ $m = -1$, bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -1)$.□ $-\frac{1}{4}, m, \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$.□ $m > \frac{1}{2}$ hoặc $-1 < m < -\frac{1}{4}$ bpt có tập nghiệm là $S = (x_1; x_2)$.

□ $m < -1$ bpt có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Câu 3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì pt

a) $mx^2 - (3m+2)x + 1 = 0$ luôn có nghiệm

b) $(m^2 + 5)x^2 - (\sqrt{3}m - 2)x + 1 = 0$ luôn vô nghiệm

Lời giải

a) Với $m = 0$ thì pt trở thành $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ suy ra pt có nghiệm

Với $m \neq 0$ ta có $\Delta = (3m+2)^2 - 4m = 9m^2 + 8m + 4 = \left(3m + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{20}{9} > 0$ với mọi m

Do đó pt đã cho luôn có nghiệm với mọi m .

b) Ta có

$$\Delta = (\sqrt{3}m - 2)^2 - 4(m^2 + 5) = -m^2 - 4\sqrt{3}m - 16 = -(m + 2\sqrt{3})^2 - 4 < 0 \text{ với mọi } m$$

Do đó pt đã cho luôn vô nghiệm với mọi m .

Câu 4. Tìm m để biểu thức sau luôn dương

a) $(m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$. b) $(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3$

Lời giải

a) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1 > 0, \forall x \in \square$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (m^2 + 2) < 0 \\ m^2 + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow 2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

Vậy $m < \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

b) Với $m = -2$, tam thức bậc hai trở thành $1 > 0$: luôn đúng với mọi x .

Với $m \neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3 > 0, \forall x \in \square$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ -m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 5. Tìm m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x) = mx^2 - x - 1$. b) $g(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m - 5$

Lời giải

a) Với $m = 0$, ta có $f(x) = -x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$: không thỏa mãn.

Với $m \neq 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow mx^2 - x - 1 < 0, \forall x \in \square$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m = 4$, ta có $g(x) = -1 < 0$: đúng với mọi x .

Với $m \neq 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2 + (2m-8)x + m - 5 < 0, \forall x \in \square$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 < 0 \\ (m-4)^2 - (m-4)(m-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \leq 4$.

Câu 6. Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

$$\text{a) } f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } -4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$$

Vậy với $m < -\frac{5}{8}$ là giá trị cần tìm.

b) Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\sqrt{x^2 - x + m} - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + m} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1 - 4(m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

Vậy với $m < \frac{5}{4}$ thì biểu thức đã cho luôn dương.

Câu 7. Tìm các giá trị của m để các bpt sau được nghiệm đúng với mọi x.

$$\text{a) } (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1, 0 \quad \text{b) } (m+4)x^2 < 2(mx - m + 3)$$

Lời giải

$$\text{a) Xét } 2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \vee m = 2$$

□ Khi $m = -\frac{1}{2}$ thì bpt trở thành $-5x - 1, 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{5}$: Không nghiệm đúng với mọi x.

□ Khi $m = 2$ thì bpt nghiệm đúng với mọi x.

$$\square \text{ Khi } \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases} \text{ thì yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1, 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 7m - 2 < 0 \\ 2m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m < 2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-\frac{1}{3} < m < 2$.

b) Khi $m = -4$ thì bpt trở thành $0 < -8x + 14$: Không nghiệm đúng với mọi x.

Khi $m \neq -4$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+4)x^2 - 2mx + 2m - 6 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 2m + 24 < 0 \\ m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \vee m > 4 \\ m < -4 \end{cases} \Leftrightarrow m < -6$$

Vậy $m < -6$ là giá trị cần tìm.

Câu 8. Chứng minh hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi m

$$\text{a) } y = \frac{mx}{(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2} \quad \text{b) } y = \sqrt{\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{n^2}}$$

Lời giải

a) Điều kiện $(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0$

Xét tam thức bậc hai $f(x) = (2m^2+1)x^2 - 4mx + 2$. Ta có

$$a_f = 2m^2 + 1 > 0, \Delta'_f = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0$$

Suy ra với mọi m ta có $f(x) = (2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Điều kiện $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$ và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$

□ Xét tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1$. Ta có

$$a_f = 2 > 0, \Delta'_f = (m+1)^2 - 2(m^2 + 1) = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2 \leq 0$$

Suy ra với mọi m , ta có $f(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

□ Xét tam thức bậc hai $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2$

Với $m = 0$ thì $g(x) = 2 > 0$

Với $m \neq 0$, ta có

$$a_g = m^2 > 0, \Delta'_g = m^2 - m^2(m^2 + 2) = -m^2(m^2 + 1) < 0$$

Suy ra với mọi m , ta có $g(x) = m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra với mọi m thì $\frac{2x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1}{m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2} \geq 0$

Và $m^2x^2 - 2mx + m^2 + 2 \neq 0$ đúng với mọi x .

Vậy tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $(m^2+1)x + m(x+3) + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 2]$.

Lời giải

Bpt tương đương $(m^2 + m + 1)x + 3m + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-3m-1}{m^2+m+1} \left(\text{do } m^2+m+1 = \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \right)$$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(\frac{-3m-1}{m^2+m+1}; +\infty \right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 2]$ khi và chỉ khi $[-1; 2] \subset \left(\frac{-3m-1}{m^2+m+1}; +\infty \right)$

$$\text{Suy ra } \frac{-3m-1}{m^2+m+1} < -1 \Leftrightarrow \frac{m^2-2m}{m^2+m+1} < 0 \Leftrightarrow m^2-2m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2$$

Vậy $0 < m < 2$ thỏa mãn.

Câu 10. Tìm các giá trị của tham số m để bpt $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

Lời giải

-Với $m=1$ thì bpt trở thành $2x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$: Thỏa mãn

-Với $m < 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

- Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $(m-1)x^2 - 2x + m + 1, 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra bpt vô nghiệm: không thỏa mãn.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì bpt tương đương $\frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} < x < \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1}$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(\frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \right)$: không thỏa mãn.

-Với $m > 1$, ta có $\Delta' = 1 - (m-1)(m+1) = 2 - m^2$

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{2} \\ m < -\sqrt{2} \end{cases}$ thì $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

-Nếu

Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ thỏa mãn.

Vậy $m > \sqrt{2}$ thỏa mãn.

-Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ thì bpt tương đương $\begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \\ x > \frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} \end{cases}$

-Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{2-m^2}}{m-1} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; +\infty \right)$

Bpt nghiệm đúng với mọi $x > 0$ khi và chỉ khi

$(0; +\infty) \subset \left(\frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1}; +\infty \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+\sqrt{2-m^2}}{m-1} \leq 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{2-m^2} \leq 0 \\ m > 1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

-Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$, xét $m = \sqrt{2}$ thì bpt trở thành

$(\sqrt{2}-1)x^2 - 2x + \sqrt{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{2}-1}$

Không thỏa mãn. Vậy $m=1, m > \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 - 2x + 1 - m^2 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$

Lời giải

Ta có $\Delta' = m^2 \geq 0$. Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1 - m$ và $x_2 = 1 + m$

-Nếu $m = 0$ thì bpt trở thành $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.

-Nếu $m > 0$ thì $x_1 = 1 - m < x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = [1 - m; 1 + m]$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $[1; 2] \subset [1 - m; 1 + m]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.1-m \\ 2.1+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m.0 \\ m.1 \end{cases} \Leftrightarrow m.1$$

-Nếu $m < 0$ thì $x_1 = 1 - m > x_2 = 1 + m$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = [1 + m; 1 - m]$
 Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 2]$ khi và chỉ khi $[1; 2] \subset [1 + m; 1 - m]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.1+m \\ 2.1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Vậy $m \leq -1 \vee m \geq 1$ thỏa mãn.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt

$$x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 > 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \text{ mà } |x| \geq 2.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 + (1 - 3m)x + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3m - 2 \end{cases}$$

-Nếu $3m - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ thì bpt trở thành $(x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
 suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn.

-Nếu $3m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 3m - 2) \cup (1; +\infty)$
 Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m - 2 > -2 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy $0 < m < 1$ thỏa mãn.

□ Nếu $3m - 2 > 1 \Leftrightarrow m > 1$. Suy ra tập nghiệm của bpt là $S = (-\infty; 1) \cup (3m - 2; +\infty)$

Bpt nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq 2$ khi và chỉ khi $3m - 2 < 2 \Leftrightarrow m < \frac{4}{3}$

Vậy $1 < m < \frac{4}{3}$ thỏa mãn.

-Kết hợp các Th ta có $0 < m < \frac{4}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bpt $x^2 + (3 - m)x - 2m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \leq 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta = (3 - m)^2 - 4(-2m + 3) = m^2 + 2m - 3$$

-Nếu $m = 1$ thì bpt trở thành $x^2 + 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ thỏa mãn.

-Nếu $m = -3$ thì bpt trở thành $x^2 + 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ thỏa mãn

-Nếu $-3 < m < 1$ thì $\Delta < 0$ mà hệ số $a = 1 > 0$ nên $x^2 + (3 - m)x - 2m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra tập nghiệm của bpt là $\mathbb{R}$ (thỏa mãn).

-Nếu $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$ thì $\Delta > 0$ nên phương trình $x^2 + (3 - m)x - 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm

$$S = \left(-\infty; \frac{-3 + m - \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2} \right) \cup \left(\frac{-3 + m + \sqrt{m^2 + 2m - 3}}{2}; +\infty \right)$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \leq -4$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
(-\infty; -4] &\subset \left(-\infty; \frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2} \right) \\
\Leftrightarrow -4 &< \frac{-3+m-\sqrt{m^2+2m-3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2+2m-3} < m+5 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \vee m > 1 \\ m > -5 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m > 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} m^2+2m-3 > 0 \\ m+5 > 0 \\ m^2+2m-3 < (11-m)^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Bất phương trình bậc hai

1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

2. Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

3. Ứng dụng. Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

Câu 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tìm tất cả giá trị của x để $f(x) \geq 0$.

A. $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

B. $x \in [-1; 5]$.

C. $x \in [-5; 1]$.

D. $x \in (-5; 1)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5$.

Mà hệ số $a = -1 < 0$ nên: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$.

Câu 2. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của S ?

A. $(-\infty; 0]$.

B. $[6; +\infty)$.

C. $[8; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{cases}$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Do đó $[6; +\infty) \not\subset S$.

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 14x + 20 < 0$ là

A. $S = (-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

C. $S = (2; 5)$.

D. $S = [2; 5]$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $0 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

Vậy $S = (2; 5)$.

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 25 < 0$ là

- A. $S = (-5; 5)$. B. $x > \pm 5$.
C. $-5 < x < 5$. D. $S = (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $x^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

Vậy $S = (-5; 5)$.

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là $(1; 2)$. Chọn đáp án **A**.

Câu 6. Tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$.

- A. $S = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. B. $[-2; 3]$.
C. $[-3; 2]$. D. $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $S = [-2; 3]$.

Câu 7. Bất phương trình $-x^2 + 2x + 3 > 0$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. B. $(-1; 3)$. C. $[-1; 3]$. D. $(-3; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $-x^2 + 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ là:

- A. $(1; 3)$. B. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
C. $[-1; 3]$. D. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ xác định khi $-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1; 3]$.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + x + 12 \geq 0$ là

- A. $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$. B. $\emptyset$.
C. $(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$. D. $[-3; 4]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-x^2 + x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-3; 4]$.

Câu 10. Hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}+x-2}$ có tập xác định là

- A. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.
 B. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.
 C. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.
 D. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; \frac{7}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \sqrt{x^2-3}+x-2 \neq 0 \\ x^2-3 \geq 0 \end{cases}$

Ta có $x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{3} \\ x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$.

Xét $\sqrt{x^2-3}+x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2-3=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x=\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là $D = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \setminus \left\{\frac{7}{4}\right\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2-5x+2}$.

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.
 B. $[2; +\infty)$.
 C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
 D. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$.

Câu 12. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2-4 > 0$.

- A. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
 B. $S = (-2; 2)$.
 C. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
 D. $S = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	+	0	-	0	+

* Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Câu 13. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2-4x+4 > 0$.

- A. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 B. $S = \mathbb{R}$.
 C. $S = (2; +\infty)$.
 D. $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải

Chọn A.

* Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
x^2-4x+4	+	0	+

* Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 14. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2 - 3x - 15 \leq 0$ là

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn A.

Xét $f(x) = 2x^2 - 3x - 15$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{4}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x		$\frac{3 - \sqrt{129}}{4}$		$\frac{3 + \sqrt{129}}{4}$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{3 - \sqrt{129}}{4}; \frac{3 + \sqrt{129}}{4} \right]$.

Do đó bất phương trình có 6 nghiệm nguyên là $-2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Câu 15. Tập nghiệm của bất phương trình: $x^2 + 9 > 6x$ là

A. $(3; +\infty)$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn B.

$$x^2 + 9 > 6x \Leftrightarrow (x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 3.$$

Câu 16. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $-2x^2 - 3x + 2 > 0$?

A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(-2; \frac{1}{2}\right)$.

D. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } -2x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{1}{2}.$$

Câu 17. Bất phương trình $(x - 1)(x^2 - 7x + 6) \geq 0$ có tập nghiệm S là:

A. $S = (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$.

B. $S = [6; +\infty)$.

C. $(6; +\infty)$.

D. $S = [6; +\infty) \cup \{1\}$.

Lời giải

Chọn D

$$(x - 1)(x^2 - 7x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 1)(x - 6) \geq 0$$

$$\text{Ta có: } \Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 6) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 6 \end{cases}.$$

Câu 18. Tập nghiệm của bất phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ là

A. $(1; 4)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$			
x^2-1	+		+ 0	- 0	+		+		
x^2-4	+	0	-		-		- 0	+	
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Câu 19. Giải bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2)$.

A. $x \leq 1$.

B. $1 \leq x \leq 4$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

D. $x \geq 4$.

Lời giải

$$\text{Bất phương trình } x(x+5) \leq 2(x^2+2) \Leftrightarrow x^2 + 5x \leq 2x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0$$

$$\text{Xét phương trình } x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. **Chọn C.**

Câu 20. Biểu thức $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.

B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.

C. $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup (3; +\infty)$.

D. $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$$

$$\text{Phương trình } 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ và } 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$		
$3x^2-10x+3$	+	0	-		-	0	+
$4x-5$	-		-	0	+		+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$. **Chọn B.**

Câu 21. Biểu thức $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$ âm khi

- A.** $x \in (1; 2)$. **B.** $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.
C. $x \geq 4$. **D.** $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = (4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$

Phương trình $4-x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$.

Phương trình $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$.

Ta có $x^2+5x+9 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \Rightarrow x^2+5x+9=0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	1	2	$+\infty$			
$4-x^2$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
x^2+2x-3	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
x^2+5x+9	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -2 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$. **Chọn D.**

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0$ là

- A.** $x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$. **B.** $x \in (-4; -1) \cup (2; +\infty)$.
C. $x \in [-1; +\infty)$. **D.** $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 2]$.

Lời giải

Bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+5x+4) \geq 0$.

Phương trình $x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-1 \end{cases}$ và $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$			
x^2+5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x-2$		$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$(x-2)(x^2+5x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $(x-2)(x^2+5x+4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$.

Chọn A.

Câu 23. Cho biểu thức $f(x) = \frac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn $f(x)$ không dương là

- A.** $x \in (0; 3] \cup (4; +\infty)$. **B.** $x \in (-\infty; 0] \cup [3; 4)$.
C. $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$. **D.** $x \in (-\infty; 0) \cup (3; 4)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\frac{4x-12}{x^2-4x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3 \leq x < 4 \end{cases}$ hay $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$.

Câu 24. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-3x-4}{x-1} \leq 0$.

- A.** $T = (-\infty; -1] \cup [1; 4]$. **B.** $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4]$.
C. $T = (-\infty; -1) \cup (1; 4]$. **D.** $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{x^2-3x-4}{x-1} \leq 0 \quad (1).$$

$$x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}.$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$		
x^2-3x-4	+	0	-	-	0	+	
$x-1$	-	-	0	+	+	+	
VT (1)	-	0	+		-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = (-\infty; -1] \cup (1; 4]$.

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-7x+12}{x^2-4} \leq 0$ là.

- A.** $S = [-2; 2] \cup [3; 4]$. **B.** $S = (-2; 2] \cup [3; 4]$.
C. $S = (-2; 2) \cup [3; 4]$. **D.** $S = [-2; 2] \cup (3; 4)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x^2-4}$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

$$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=4 \end{cases}.$$

$$x^2-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	-2	2	3	4	$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$	+		+		0	+
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	+		-		0	+

Từ bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-2; 2) \cup [3; 4]$.

Câu 26. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-2}$ là.

- A. $\left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.
 C. $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\frac{x-2}{x+1} \geq \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+3}{x^2-x-2} \geq 0 \quad (1).$$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
VT (1)	+		-	0	+		-

$$(1) \Leftrightarrow x < -1 \vee \frac{1}{2} \leq x < 2.$$

Câu 27. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x+3}{x^2-4} \geq 1$. Khi đó $S \cap (-2; 2)$ là tập nào sau đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 2)$. C. $\emptyset$. D. $(-2; -1]$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Xét } \frac{x^2+x+3}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{x^2-4} \geq 0.$$

Bất phương trình có tập nghiệm $S = [-7; -2) \cup (2; +\infty)$.

Vậy $S \cap (-2; 2) = \emptyset$.

Câu 28. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+3} > 2$ là

- A. $\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}; +\infty\right)$.
 C. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Do $x^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3} > 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 > 2(x^2 + 3) \Leftrightarrow 3x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}.$$

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ 2x - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$. Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2-2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4} < 0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	-2	2	$+\infty$
$2x+9$		$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	$ $	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\frac{2x+9}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup (-2; 2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x ($x=1$) thỏa mãn yêu cầu.

Chọn C.

Câu 30. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$ là

A. Hai khoảng.

B. Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn.

D. Ba khoảng.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Bất phương trình

$$\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10} \leq 0 \quad (*).$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x^2-3x-10$		$+$	$ $	$-$	$ $	$-$
$f(x)$		$-$	$ $	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $(*) \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

Chọn C.

Dạng 2. Bài toán tham số liên quan đến tam thức bậc hai

- Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm
A. $-4 \leq m \leq 4$. **B.** $m \leq -4$ hay $m \geq 4$.
C. $m \leq -2$ hay $m \geq 2$. **D.** $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải**Chọn B**

Phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$ hay $m \geq 4$

- Câu 2.** Tìm m để phương trình $-x^2 + 2(m-1)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt
A. $(-1; 2)$ **B.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ **C.** $[-1; 2]$ **D.** $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

Lời giải**Chọn B**

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - (-1) \cdot (m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

- Câu 3.** Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt?

- A.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$. **D.** $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải**Chọn B.**

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} x < -\frac{3}{5} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \end{cases}$$

- Câu 4.** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - mx + 4m = 0$ vô nghiệm.
A. $0 < m < 16$. **B.** $-4 < m < 4$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $0 \leq m \leq 16$.

Lời giải**Chọn A.**

Phương trình $x^2 - mx + 4m = 0$ vô nghiệm khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 16$.

- Câu 5.** Phương trình $x^2 - (m+1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A.** $m > 1$. **B.** $-3 < m < 1$.
C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. **D.** $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1. \text{ Chọn } \mathbf{B}.$$

- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $m = -\frac{1}{2}$
- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 3$. C. $m = 2$ D. $m > -\frac{3}{5}$.

Lời giải

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

- Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \text{ vô nghiệm?}$$

- A. $m < 0$. B. $m > 2$. C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0 \quad (*).$$

TH1. Với $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Suy ra với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Do đó $m=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - (5m^2 - 16m + 12) < 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}.$$

Do đó, với $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

- Câu 8.** Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 4$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$. C. $0 \leq m \leq 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } mx^2 - 2mx + 4 = 0 \quad (*).$$

TH1. Với $m=0$, khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 4=0$ (vô lý).

Suy ra với $m=0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Kết hợp hai **TH**, ta được $0 \leq m < 4$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

- Câu 9.** Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$. C. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{cases}$.

Lời giải

Xét phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 3 = 0$ (*).

TH1. Với $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$.

• Khi $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).

• Khi $m = -2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 - 3(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 3m^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}.$$

Suy ra với $\begin{cases} m > 2 \\ m < -4 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\begin{cases} m \geq 2 \\ m < -4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 10. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm?

A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.

D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải

Để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow (-b)^2 - 4.3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - (2\sqrt{3})^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b - 2\sqrt{3})(b + 2\sqrt{3}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2\sqrt{3} \\ b \leq -2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 11. Phương trình $x^2 + 2(m + 2)x - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có nghiệm khi

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases}$.

B. $-5 \leq m \leq -1$.

C. $\begin{cases} m < -5 \\ m > -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + 2(m + 2)x - 2m - 1 = 0$, có $\Delta'_x = (m + 2)^2 + 2m + 1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 + 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -5 \end{cases} \text{ là giá trị cần tìm. Chọn D.}$$

Câu 12. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình

$$2x^2 + 2(m + 2)x + 3 + 4m + m^2 = 0 \text{ có nghiệm?}$$

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Xét $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$, có $\Delta'_x = (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 2m^2 - 8m - 6 \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 \leq 2 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$, ta được $m = \{-3; -2; -1\}$ là các giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 13. Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \neq 5$. B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ 1 \leq m \neq 5 \end{cases}$.

Lời giải

Xét phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-5=0 \Leftrightarrow m=5$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{20}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{20}$.

TH2. Với $m-5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 7m + 10) \geq 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m+10) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$.

Do đó, với $\begin{cases} 5 \neq m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Kết hợp hai TH, ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 14. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in \mathbb{Z}$. C. $-1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ (*).

TH1. Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow -2.4x - 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{8}$.

TH2. Với $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, khi đó để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+3)^2 - (m-1)(-m-2) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - (-m^2 + 3m - 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m + 11 \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{79}{8} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R} \text{ suy ra } \Delta'_x \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai TH, ta được $m \in \mathbb{R}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 15. Các giá trị m để tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. **B.** $m < 0$ hoặc $m > 28$.

C. $0 < m < 28$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

Tam thức $f(x)$ đổi dấu hai lần $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 - 32m - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \Leftrightarrow m(m-28) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Vậy $m < 0$ hoặc $m > 28$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm?

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m > 1$.

C. $-\frac{3}{4} < m < 1$.

D. $m > -\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Xét } x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0, \text{ có } \Delta_x = (m+1)^2 - 4\left(m - \frac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \frac{7}{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta'_m = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3} < 0 \end{cases} \text{ suy ra } m^2 - 2m + \frac{7}{3} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3 - 2m = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \neq 1$

C. $-1 < m < 6$.

D. $-1 < m < 2$.

Lời giải

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta_x = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 - 4(-2m^2 + 5m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} \quad (*).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = 17 > 0 \\ \Delta'_m = 16^2 - 17 \cdot 16 = -16 < 0 \end{cases} \text{ suy ra } 17m^2 - 32m + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó, hệ bất phương trình (*) $\Leftrightarrow m \neq 1$. **Chọn B.**

Câu 18. Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m+1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m \in \emptyset \setminus \{0\}$. B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$. **Chọn C.**

Câu 19. Giá trị nào của $m=0$ thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$. D. $m \in \emptyset \setminus \{3\}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4(m^2 - 2m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-1)(5m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\} \text{ là giá trị cần tìm.} \end{aligned}$$

Chọn A.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $mx^2 + 2x + m^2 + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. B. $m < 0$. C. $m \neq -1$. D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Dễ thấy $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{m^2 + 2m + 1}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 21. Xác định m để phương trình $mx^3 - x^2 + 2x - 8m = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. $\frac{1}{7} < m < \frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6}$. C. $m > \frac{1}{7}$. D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } mx^3 - x^2 + 2x - 8m = 0 \Leftrightarrow (x-2)(mx^2 + (2m-1)x + 4m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = mx^2 + (2m-1)x + 4m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để phương trình ban đầu có ba nghiệm phân biệt lớn hơn 1 thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 và khác 2.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 2 khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -12m^2 - 4m + 1 > 0 \\ 4m + 2(2m-1) + 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6} \\ m \neq \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{6} \end{cases} \quad (1).$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2.

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1-2m}{2} \\ x_1 x_2 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì } 1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1) + (x_2-1) > 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 > 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2m}{m} - 2 > 0 \\ 4 - \frac{1-2m}{m} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2m}{m} - 2 > 0 \\ 4 - \frac{1-2m}{m} + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-4m}{m} > 0 \\ \frac{7m-1}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \\ m > \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{7} < m < \frac{1}{4} \\ m < 0 \end{cases} \quad (2).$$

Câu 22. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1$?

A. $1 < m < 3$.

B. $1 < m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m > 3$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-2)^2 - (m-1)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có: } x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1}, \quad x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-1}.$$

$$\text{Theo đề ta có: } x_1 + x_2 + x_1 x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-4}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Vậy $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 23. Cho phương trình $(m-5)x^2 + 2(m-1)x + m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 2 < x_2$?

- A. $m \geq 5$. B. $m < \frac{8}{3}$. C. $\frac{8}{3} < m < 5$. D. $\frac{8}{3} \leq m \leq 5$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-5 \neq 0 \\ (m-1)^2 - m(m-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases} (*)$.

Khi đó theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(m-1)}{m-5} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m-5} \end{cases}$.

Với $x_1 < 2 < x_2 \Rightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m-5} + \frac{4(m-1)}{m-5} + 4 < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{9m-24}{m-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} < m < 5$. Kiểm tra điều kiện (*) ta được $\frac{8}{3} < m < 5$.

Câu 24. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (m-2)x + m^2 - 4m = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $0 < m < 4$. B. $m < 0$ hoặc $m > 4$. C. $m > 2$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi $m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Câu 25. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1?

- A. $0 < m < 1$. B. $m > 1$. C. $m \in \emptyset$. D. $\begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

Với $m-1 \neq 0$ ta xét phương trình: $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ (1).

Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac = m^2 - m(m-1) = m$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) và $x_1 > 1, x_2 < 1$.

Ta có: $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 (*)$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{m}{m-1} \\ x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \end{cases}$, thay vào (*) ta có:

$\frac{m}{m-1} - \frac{2m}{m-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{m-1} < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy với $m > 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 \leq 16$.

- A. Không có giá trị của m . B. $m \geq 2$.
C. $m \leq -1$. D. $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \quad (1).$

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

$$x_1^3 + x_2^3 \leq 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m+2) \leq 16 \Leftrightarrow 8m^3 - 6m^2 - 12m - 16 \leq 0 \Leftrightarrow (m-2)(8m^2 + 10m + 8) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Kiểm tra điều kiện (1), ta được $m \leq -1$ hoặc $m = 2$.

Câu 27. Xác định m để phương trình $(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

- A. $-\frac{7}{2} < m < -3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$. B. $m < -\frac{7}{2}$.
C. $-\frac{7}{2} < m < -1$ và $m \neq -\frac{16}{9}$. D. $-\frac{7}{2} < m < 3$ và $m \neq -\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn A.

$$(x-1)[x^2 + 2(m+3)x + 4m+12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2(m+3)x + 4m+12 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -1 và khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ 1 + 2(m+3) + 4m + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ -2m - 4 > 0 \\ 2m + 7 > 0 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} < m < -3 \\ m \neq -\frac{19}{6} \end{cases}.$$

Câu 28. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

- A. $m > 6$. B. $m < 6$. C. $6 > m > 0$. D. $m > 0$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m+3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6. \text{ Chọn A.}$$

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

- A. $2 < m < 6$. B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.
C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$. D. $-3 < m < 6$.

Lời giải

$$\text{. Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ \frac{2m}{m-2} > 0 \\ \frac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 6 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Chọn B.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

- A. $m < 6$. B. $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$.
C. $m > 1$. D. $1 < m < 6$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ 9m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ \frac{5}{9} < m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 31. Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm không âm khi

- A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.
C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 2) \geq 0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ m^2 + 8m + 12 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4}.$$

Chọn B.

Câu 32. Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

- A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$. B. $-1 < m < \frac{5}{2}$.
C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$. D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 33. Phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

- A. $m \in (1; 2)$. B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac < 0 \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2) \cdot (-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn } \mathbf{B}.$$

Câu 34. Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

- A. $0 < m < 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

$$\text{Phương trình } x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + 2(x-m) = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m-2 \end{cases}.$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Với } m \in (0; 2) \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}, \text{ theo bài ra, ta có } |x_2| > |x_1| \Leftrightarrow |x_2|^2 > |x_1|^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \Leftrightarrow (m-2-m)(m-2+m) > 0 \Leftrightarrow 2m-2 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với (I), ta được $0 < m < 1$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 35. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

- A. $m < 2 \vee m > 6$. B. $-2 < m \neq -1 < 2 \vee m > 6$.
C. $2 < m < 6$. D. $-2 < m < 6$.

Lời giải

Xét phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (*), có $\Delta' = m + 2$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \{-1; 2\} \\ m > -2 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

$$\text{Khi đó, gọi } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình (*) suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}.$$

Theo bài ra, ta có $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}$.

Kết hợp với (I), ta được $\begin{cases} m > 6 \\ m \in (-2; -1) \cup (-1; 2) \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m+2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

- A. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right)$.
C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$. D. $m \in (7; +\infty)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 - (m-1)x + m+2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 7 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = m+2 \end{cases}$.

$$\text{Yêu cầu bài toán } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{8m+7}{(m+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -\frac{7}{8} \end{cases} \xrightarrow{(*)} -2 \neq m < -1. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m$. Với giá trị nào của tham số m thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m > 0$. D. $m < 2$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 1 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m+2)x + 8m+1 \leq 0$ vô nghiệm.

- A. $m \in [0; 28]$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (28; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0] \cup [28; +\infty)$. D. $m \in (0; 28)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $(m+2)^2 - 4(8m+1) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \quad 0 < m < 28$.

Câu 39. Tam thức $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4$ không âm với mọi giá trị của x khi

- A. $m < 3$. B. $m \geq 3$. C. $m \leq -3$. D. $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 3m + 4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vậy $m \leq 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để với mọi $x \in \mathbb{R}$ biểu thức $f(x) = x^2 + (m+2)x + 8m+1$ luôn nhận giá trị dương.

A. 27.

B. 28.

C. Vô số.

D. 26.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28$$

Vậy có 27 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Tìm các giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m+7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A. $m \in [2; 6]$.

B. $m \in (-3; 9)$.

C. $m \in (-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$.

D. $m \in (-9; 3)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có : } f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ (m+1)^2 - 4(2m+7) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 27 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 9.$$

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0$ (1) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$?

A. $m > -1$.

B. $-1 \leq m \leq 3$.

C. $-1 < m \leq 3$.

D. $-1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn B

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ Bất phương trình (1) trở thành $4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Luôn đúng) (*)

TH2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ Bất phương trình (1) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3 (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $-1 \leq m \leq 3$.

Câu 43. Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm. Điều kiện cần và đủ của tham số m là

$$\text{A. } \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2} . \quad \text{B. } 1 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2} .$$

C. $m \neq 1$.

D. $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = (m+1)x^2 - 2mx - (m-3)$

Bất phương trình $(m+1)x^2 - 2mx - (m-3) < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: Với $m = -1$ thì $f(x) = 2x + 4$

Khi đó $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ không thỏa mãn nên loại $m = -1$

TH2: Với $m \neq -1$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$$a > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$\Delta' = m^2 + (m+1)(m-3) = 2m^2 - 2m - 3$$

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ suy ra } \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai $f(x)$ sau đây thỏa mãn $f(x) = -x^2 + 2x + m - 2018 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m > 2019$. B. $m < 2019$. C. $m > 2017$. D. $m < 2017$.

Lời giải

Chọn D.

Vì tam thức bậc hai $f(x)$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên $f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - (-1)(m - 2018) < 0 \Leftrightarrow m - 2017 < 0 \Leftrightarrow m < 2017.$$

Câu 45. Tìm m để $f(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 4m$ luôn luôn âm

A. $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. B. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

TH1: $m = 0$: $f(x) = 2x$ đổi dấu (loại $m = 0$)

TH2: $m \neq 0$; Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 - 2m + 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \vee m > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -1$$

Vậy $m < -1$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{-x^2 + 2x - 5}{x^2 - mx + 1} \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \emptyset$. B. $m \in (-2; 2)$.
C. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [-2; 2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-x^2 + 2x - 5 = -(x-1)^2 - 4 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $\frac{-x^2 + 2x - 5}{x^2 - mx + 1} \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m \in [-2; 2].$$

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4m + 8 \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m > 7 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

C. $-1 \leq m \leq 7$.

D. $-1 < m < 7$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{BPT nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 6m - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 7.$$

Câu 48. Bất phương trình $x^2 + 4x + m < 0$ vô nghiệm khi

A. $m < 4$.

B. $m > 4$.

C. $m \leq 4$.

D. $m \geq 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có BPT $x^2 + 4x + m < 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 + 4x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Câu 49. Bất phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m + 7 < 0$ vô nghiệm khi

A. $m \geq \frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m > \frac{1}{5}$.

D. $m > \frac{1}{25}$.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1. $m = 0$. Khi đó bất phương trình trở thành: $-2x + 7 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$.

Trường hợp này không thỏa mãn yêu cầu bài toán, loại.

Trường hợp 2. $m \neq 0$. Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} & mx^2 - 2(m+1)x + m + 7 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - 5m \leq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m < -1$.

C. $-1 < m < 0$.

D. $-1 < m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

$$mx^2 - 2mx - 1 \geq 0 \quad (1)$$

+) $m = 0$ thì bất phương trình (1) trở thành: $-1 > 0$ (vô lý). Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) $m \neq 0$, bất phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = m < 0 \\ \Delta' = (-m)^2 - m(-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -1 < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Vậy bất phương trình $mx^2 - 2mx - 1 \geq 0$ vô nghiệm khi $-1 < m \leq 0$.

- Câu 51.** Gọi S là tập các giá trị của m để bất phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0$ có tập nghiệm là $[a; b]$ sao cho $b - a = 4$. Tổng tất cả các phần tử của S là
- A. -5. B. 1. C. 5. D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } x^2 - 2mx + 5m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 \leq m^2 - 5m + 8 \Leftrightarrow |x - m| \leq \sqrt{m^2 - 5m + 8}$$

$$|x - m| \leq \sqrt{m^2 - 5m + 8} \Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 5m + 8} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 5m + 8}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của BPT là } \left[m - \sqrt{m^2 - 5m + 8}; m + \sqrt{m^2 - 5m + 8} \right].$$

$$\text{Theo bài ra ta có } b - a = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 - 5m + 8} = 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Tổng tất cả các phần tử của S là 5.

- Câu 52.** Tìm các giá trị của tham số m để $x^2 - 2x - m \geq 0, \forall x > 0$.
- A. $m \leq 0$. B. $m < -1$. C. $m \leq -1$. D. $m < 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } x^2 - 2x - m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq m.$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$, hoành độ đỉnh của parabol

$$x_l = \frac{-b}{2a} = 1. \text{ Do đó có bảng biến thiên}$$

x	0	1	$+\infty$
y	0	-1	$+\infty$

Dựa vào bbt ta có $x^2 - 2x \geq m, \forall x > 0$ khi và chỉ khi $m \leq -1$.

- Câu 53.** Tìm tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{(m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1}$ có tập xác định $D = \mathbf{R}$.
- A. $[-1; 6]$. B. $(-1; 6)$. C. $(-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$. D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow (m+10)x^2 - 2(m-2)x + 1 \geq 0 (*)$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbf{R}$ khi và chỉ khi (*) đúng với $\forall x \in \mathbf{R}$.

+) $m = -10$: (*) trở thành: $24x + 1 \geq 0$ không đúng với $\forall x \in \mathbf{R}$. Suy ra $m = -10$ loại.

$$+) m \neq -10: (*) \text{ đúng với } \forall x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-2)^2 - (m+10) \leq 0 \\ m+10 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m - 6 \leq 0 \\ m > -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 6 \\ m > -10 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 6.$$

Vậy với $-1 \leq m \leq 6$ thì hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbf{R}$.

- Câu 54.** Cho bất phương trình $(m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m - 11 \leq 0$ (1). Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình đúng với mọi $\forall x < -4$. Khi đó số phần tử của S là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Đặt $f(x) = (m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m - 11$

TH1: $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$

(1) $\Leftrightarrow -4x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{4}$ không thỏa đề

TH2: $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

$\Delta' = (4-3m)^2 - (m-2)(10m-11) = -m^2 + 7m - 6$

Bảng xét dấu Δ'

m	$-\infty$	1	6	$-\infty$	
Δ'	-	0	+	0	-

* Nếu $m > 6$ thì $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ không thỏa đề

* Nếu $m \leq 1$ thì $f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ thỏa đề

* Nếu $2 < m < 6$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$-\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Khi đó $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$ không thỏa đề

* Nếu $1 < m < 2$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$-\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Khi đó $f(x) \leq 0 \quad \forall x < -4 \Leftrightarrow -4 \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_1 + 4 < x_2 + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4 + x_2 + 4 > 0 \\ (x_1 + 4)(x_2 + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 8 > 0 \\ x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(3m-4)}{m-2} + 8 > 0 \\ \frac{10m-11}{m-2} + \frac{8(3m-4)}{m-2} + 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{14m-24}{m-2} > 0 \\ \frac{50m-75}{m-2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14m-24 < 0 \\ 50m-75 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{12}{7} \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$$

So sánh điều kiện suy ra $1 < m \leq \frac{3}{2}$.

Vậy $m \leq \frac{3}{2}$. Khi đó $S = \{1\}$.

Cách 2:

Ta có $(m-2)x^2 + 2(4-3m)x + 10m-11 \leq 0$ (1)

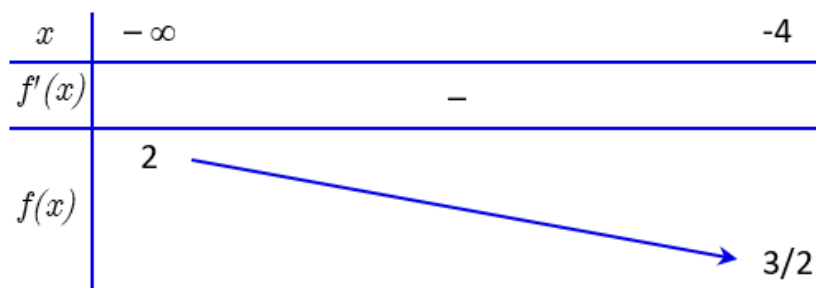
$$\Leftrightarrow m(x^2 - 6x + 10) - 2x^2 + 8x - 11 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 10} \quad (\text{vì } x^2 - 6x + 10 > 0; \forall x < -4).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 11}{x^2 - 6x + 10}$ với $x < -4$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(4x-8)(x^2-6x+10) - (2x-6)(2x^2-8x+11)}{(x^2-6x+10)^2} = \frac{-4x^2 + 18x - 14}{(x^2-6x+10)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} (l) \\ x = 1 (l) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x < -4 \Leftrightarrow m \leq f(x), \forall x < -4 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$.

Vậy $m \leq \frac{3}{2}$. Khi đó $S = \{1\}$.

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = 1 - \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m}$ có tập xác định là P ?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định là $P \Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m \geq 0$ (1) nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m = -1 \Rightarrow$ bpt (1) $\Leftrightarrow 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ không nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: $m \neq -1 \Rightarrow$ bpt (1) nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (m-1)^2 - (m+1)(2-2m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 3m^2 - 2m - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -\frac{1}{3} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{0; 1\}$.

Câu 56. Để bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm thì m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $m \leq \frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{20}$.

C. $m \leq \frac{1}{20}$.

D. $m > \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow 5x^2 - x + m > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 20m < 0 \\ 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}.$$

Câu 57. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 + mx + m < 0$ đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m > \frac{4}{3}$.

B. $m > -1$.

C. $m < -\frac{4}{3}$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn C.

- Với $m = -1$ ta có: $x > -1$ không thỏa mãn.
- Với $m \neq -1$ ta có:

$$(m+1)x^2 + mx + m < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ m^2 - 4(m+1)m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3}.$$

Câu 59. Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm:

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn D.

$-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - m - 1 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Câu 60. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + x - m > 0$ vô nghiệm.

- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m > \frac{1}{4}$. D. $m < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $-x^2 + x - m > 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $-x^2 + x - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } -x^2 + x - m \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

Câu 61. Bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi

- A. $m \in [1; +\infty)$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; 7)$.

Lời giải

Chọn A.

$$(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ m+3 \geq 0 \\ m-1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m > 1 \\ -4(m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 2(m-1)x + 2m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) > 0, \forall x \in (0; 1)$.

- A. $m > 1$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f(x) > 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow -x^2 - 2(m-1)x + 2m - 1 > 0, \forall x \in (0; 1)$.

$$\Leftrightarrow -2m(x-1) > x^2 - 2x + 1, \forall x \in (0; 1) \quad (*).$$

$$\text{Vì } x \in (0; 1) \Rightarrow x-1 < 0 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow -2m < \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} = x-1 = g(x), \forall x \in (0; 1).$$

$$\Leftrightarrow -2m \leq g(0) = -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 63. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+5)(3-x) > 0 \\ x-3m+2 < 0 \end{cases}$ vô nghiệm khi

A. $m \leq -1$.

B. $m \geq -1$.

C. $m > -1$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (x+5)(3-x) > 0 \\ x-3m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 3 \\ x < 3m-2 \end{cases}$$

Để hệ vô nghiệm thì $3m-2 \leq -5 \Leftrightarrow 3m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -1$.

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m(m+1) \leq 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$.

B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases}$.

C. $\frac{1}{2} < m < 1$.

D. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Xét hệ bất phương trình (I)} \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \quad (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m(m+1) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2x-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \Leftrightarrow S_1 = \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

$$(2) \Leftrightarrow (x-m)[x-(m+1)] \leq 0 \Leftrightarrow m \leq x \leq m+1 \Leftrightarrow S_2 = [m; m+1].$$

$$\text{Hệ (I) vô nghiệm} \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases}$$

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 - (m-1)x - m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m \geq 5 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m > 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - 4x > 5 \\ x^2 - (m-1)x - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 5 \\ x < -1 \end{cases} \quad (*) \\ (x+1)(x-m) \leq 0 \quad (**) \end{cases}$$

+) Nếu $m = -1$ thì $(**) \Leftrightarrow x = -1$. Kết hợp $(*)$ suy ra hệ bpt vô nghiệm $\Rightarrow m = -1$ loại.

+) Nếu $m > -1$ thì $(**) \Leftrightarrow -1 < x < m$. Kết hợp với $(*)$ suy ra hệ bpt có nghiệm $\Leftrightarrow m > 5$.

+) Nếu $m < -1$ thì $(**) \Leftrightarrow m < x < -1$. Kết hợp với $(*)$ suy ra với $m < -1$ thì hệ bpt luôn có nghiệm.

$$\text{Vậy hệ bpt có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases}$$

Câu 66. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi

A. $m \leq -2$.

B. $m > -2$.

C. $m < -1$.

D. $m = 0$.

Lời giải**Chọn A.**

$$\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 4 \\ x < m-1 \end{cases}$$

Do đó hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi $m-1 \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -2$.**Câu 67.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi

- A.** $m > 1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải**Chọn B.**Ta có $x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. $x - m > 0 \Leftrightarrow x > m$.Do đó hệ có nghiệm khi $m < 1$.**Câu 68.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

- A.** $m > -\frac{8}{3}$. **B.** $m < 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \geq -\frac{8}{3}$.

Lời giảiBất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1 = \left[-1; \frac{4}{3}\right]$ Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x < -\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2 = \left(-\infty; -\frac{m}{2}\right)$.Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2$.**Chọn C.****Câu 69.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 & (1) \\ x - m > 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

- A.** $m > 1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \neq 1$.

Lời giảiBất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Suy ra $S_1 = [-1; 1]$.Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x > m$. Suy ra $S_2 = (m; +\infty)$.Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m < 1$.**Chọn C.****Câu 70.** Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 & (1) \\ x < m-1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

- A.** $m < 5$. **B.** $m > -2$. **C.** $m = 5$. **D.** $m > 5$.

Lời giảiBất phương trình (1) $\Leftrightarrow -3 < x < 4$. Suy ra $S_1 = (-3; 4)$.Bất phương trình có $S_2 = (-\infty; m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m-1 > -3 \Leftrightarrow m > -2. \text{ Chọn B.}$$

Câu 71. Tìm m để $-9 < \frac{3x^2 + mx - 6}{x^2 - x + 1} < 6$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $-3 < m < 6$.

B. $-3 \leq m \leq 6$.

C. $m < -3$.

D. $m > 6$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$-9(x^2 - x + 1) < 3x^2 + mx - 6 < 6(x^2 - x + 1) \quad (\text{do } x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 - (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 144 < 0 \\ (m+6)^2 - 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Câu 72. Xác định m để với mọi x ta có $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$.

A. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

B. $1 < m \leq \frac{5}{3}$.

C. $m \leq -\frac{5}{3}$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} \frac{3x^2 + 2x + 2 + m}{2x^2 - 3x + 2} \geq 0 \\ \frac{13x^2 - 26x + 14 - m}{2x^2 - 3x + 2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + 2 + m \geq 0 & (1) \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4 \cdot 3(2+m) \leq 0 \\ 26^2 - 4 \cdot 13(14-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-5}{3} \\ m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 73. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải

Bất phương trình $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Suy ra $S_1 = (1; +\infty)$.

$$\text{Bất phương trình } x^2 - 2mx + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 \leq m^2 - 1 \Leftrightarrow (x-m)^2 \leq m^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2 - 1} \leq x - m \leq \sqrt{m^2 - 1} \quad (\text{điều kiện: } m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases})$$

$$\Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 - 1} \leq x \leq m + \sqrt{m^2 - 1}. \text{ Suy ra } S_2 = [m - \sqrt{m^2 - 1}; m + \sqrt{m^2 - 1}].$$

$$\text{Để hệ có nghiệm } \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 - 1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} > 1-m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 0 \\ m^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -1 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \geq 0 \\ m^2-1 > (1-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m > 1 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện, ta được $m > 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 74. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $0 < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

C. $0 \leq m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $0 < m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' = m \geq 0$.

Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = [1-\sqrt{m}; 1+\sqrt{m}]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [m; m+1]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1+\sqrt{m} \\ 1-\sqrt{m} \leq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 75. Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & (1) \\ (m-1)x - 2 \geq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1 \leq m \leq \frac{3}{2}$. **B.** $m \geq \frac{3}{2}$. **C.** $m \in \emptyset$. **D.** $m \geq -1$.

Lời giải

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$. Suy ra $S_1 = [-1; 4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm.

Với $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{2}{m-1}; +\infty\right)$. Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \leq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Với $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{2}{m-1}\right]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \geq -1 \Leftrightarrow m \leq -1$ (không thỏa)

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Câu 76. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 10x + 16 \leq 0 & (1) \\ mx \geq 3m+1 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m > -\frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $m > -\frac{1}{11}$.

D. $m > \frac{1}{32}$.

Lời giải

Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow -8 \leq x \leq -2$. Suy ra $S_1 = [-8; -2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m = 0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \geq 1$: vô nghiệm.

Với $m > 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \geq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{3m+1}{m}; +\infty \right)$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.

Với $m < 0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \leq \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty; \frac{3m+1}{m} \right]$. Hệ bất phương trình vô nghiệm khi

$\frac{3m+1}{m} < -8 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{11}$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{11}$. **Chọn C.**

Câu 77. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 1 \leq 0(2) \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0(1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị

thích hợp của tham số a là:

A. $0 \leq a \leq 2$.

B. $0 \leq a \leq 4$.

C. $2 \leq a \leq 4$.

D. $0 \leq a \leq 8$.

Lời giải

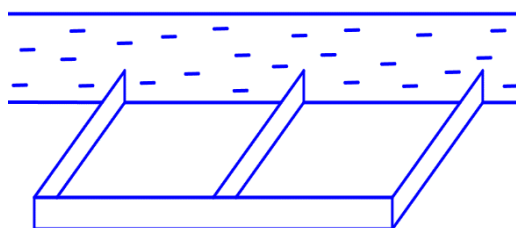
Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$. Suy ra $S_1 = [1; 5]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [a+1-\sqrt{2a}; a+1+\sqrt{2a}]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+\sqrt{2a} \geq 1 \\ a+1-\sqrt{2a} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$. **Chọn A.**

Dạng 3. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai một ẩn

Câu 1. Một người nông dân có 6 triệu đồng để làm một hàng rào chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) làm một khu đất có hai phần là hình chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 40000 đồng một mét. Tính diện tích lớn nhất của khu đất rào thu được.



A. 1245.

B. 1250.

C. 1255.

D. 1260.

Lời giải

Chọn B

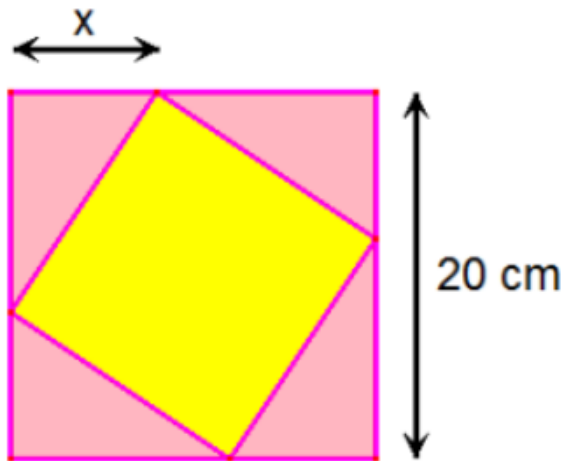
Giả sử độ dài của một hàng rào vuông góc bờ sông là $x(m)$ và độ dài của hàng rào song song với bờ sông là $y(m)$ ($x, y > 0$).

Khi đó, tổng số tiền để mua hàng rào là $3x.40000 + y.60000 = 6000000 \Leftrightarrow y = 100 - 2x$.

Diện tích khu đất là $S = x.y = x(100 - 2x) = -2(x - 25)^2 + 1250 \leq 1250$.

Vậy diện tích khu đất lớn nhất là $1250(m^2)$ khi $x = 25(m)$ và $y = 50(m)$.

Câu 2. Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng $20cm$, tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của x để diện tích viên gạch không vượt quá $208cm^2$.



A. $8 \leq x \leq 12$.

B. $6 \leq x \leq 14$.

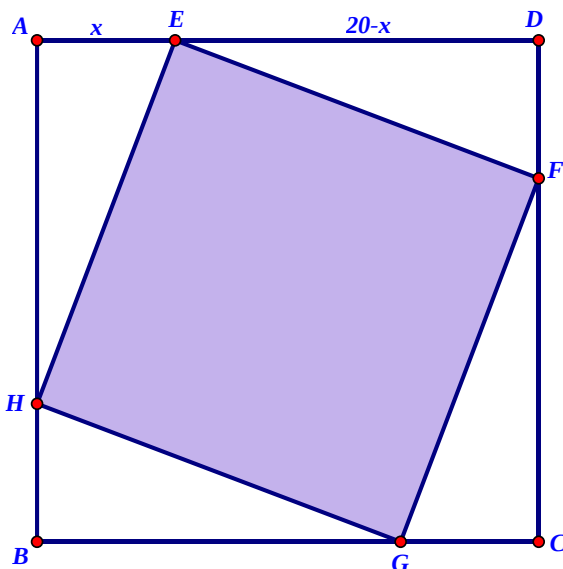
C. $12 \leq x \leq 14$.

D. $12 \leq x \leq 18$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E, F, G, H là bốn đỉnh của viên gạch hình vuông nội tiếp trong hình vuông $ABCD$ có cạnh $20cm$ như hình vẽ



Ta có cạnh viên gạch là $EF = \sqrt{x^2 + (20-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$.

Diện tích của viên gạch là: $EF^2 = 2x^2 - 40x + 400$.

Theo đề ta có diện tích viên gạch không vượt quá $208cm^2$
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 400 \leq 208 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 192 \leq 0 \Leftrightarrow 8 \leq x \leq 12$.

Câu 3. Công ty du lịch Hòa Bình dự định tổ chức một tua đi Sapa từ Hà Nội. Công ty dự định nêu giá tua

là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất ?

A. 1.875.000 (đồng).

B. 1.375.000 (đồng).

C. 1.675.000 (đồng).

D. 1.475.000 (đồng).

Lời giải

Chọn B

Gọi x (triệu đồng) là giá tua ($0 < x < 2$)

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là $150 + 400 - 200x = 450 - 200x$

Tổng doanh thu là $f(x) = x(550 - 200x)$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $0 < x < 2$. Có

$$x(550 - 200x) = \frac{200x(550 - 200x)}{200} \leq \frac{3025}{8} = 378,125$$

Khi đó $x = \frac{11}{8}$ (triệu) vậy chọn B

Câu 4. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 39.000.

B. 43.000.

C. 40.000.

D. 42.000.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc. Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng). Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là: $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000 = -100(x - 9)^2 + 44100 \leq 44100.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 9$.

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 5. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có x con cá ($x \in \mathbb{Q}^+$) thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $480 - 20x$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau mỗi vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 10.

B. 12.

C. 9.

D. 24.

Lời giải

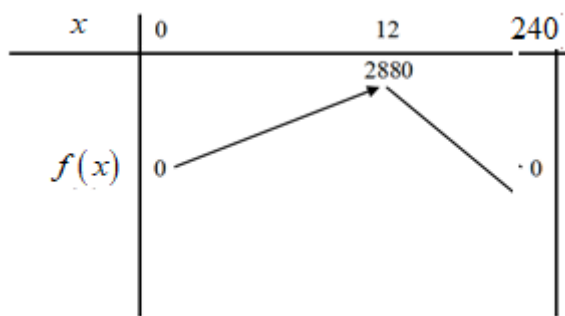
Chọn B

Cân nặng của x con cá là: $f(x) = x \cdot (480 - 20x) = 480x - 20x^2$, $(0 < x < 240)$.

Xét hàm số $f(x) = -20x^2 + 480x$ trên $(0; 240)$.

Có hoành độ đỉnh $x = 12$ và hệ số $a = -20 < 0$

Lập bảng biến thiên:



Vậy thu hoạch sản lượng cá nhiều nhất thì phải thả trên một đơn vị diện tích mặt hồ 12 con cá.