

PHẦN A. LÝ THUYẾT

1. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ (I)

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = mx^2 + nx + p, a \neq m)$$

Để giải phương trình (I), ta làm như sau:

Bước 1. Bình phương hai vế của (I) dẫn đến phương trình $f(x) = g(x)$ rồi tìm nghiệm của phương trình này.

Bước 2. Thay từng nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ vào bất phương trình $f(x) \geq 0$ (hoặc $g(x) \geq 0$). Nghiệm nào thoả mãn bất phương trình đó thì giữ lại, nghiệm nào không thoả mãn thì loại đi.

Bước 3. Trên cơ sở những nghiệm giữ lại ở Bước 2, ta kết luận nghiệm của phương trình (I).

Chú ý:

- Trong hai bất phương trình $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$, ta thường chọn bất phương trình có dạng đơn giản hơn để thực hiện Bước 2.

- Người ta chứng minh được rằng tập hợp (số thực) giữ lại ở Bước 2 chính là tập nghiệm của phương trình (I).

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = \sqrt{x - 4}$ (1).

Giải

Bình phương hai vế của (1) ta được $x^2 - 6x - 4 = x - 4$ (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0$.

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 7$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x - 4 \geq 0$, ta thấy chỉ có $x = 7$ thoả mãn bất phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 7$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ (3).

Giải

Bình phương hai vế của (3) ta được $2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4x + 3$ (4).

Ta có: (4) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

Do đó, phương trình (4) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $\sqrt{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt{x^2 + x - 1}$ bất phương trình.

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

II. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẠNG $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (II)

$$(f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = dx + e, a \neq d^2)$$

Để giải phương trình (II), ta làm như sau:

Bước 1. Giải bất phương trình $g(x) \geq 0$ để tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Bước 2. Bình phương hai vế của (II) dẫn đến phương trình $f(x) = [g(x)]^2$ rồi tìm tập nghiệm của phương trình đó.

Bước 3. Trong những nghiệm của phương trình $f(x) = [g(x)]^2$, ta chỉ giữ lại những nghiệm thuộc tập nghiệm của bất phương trình $g(x) \geq 0$. Tập nghiệm giữ lại đó chính là tập nghiệm của phương trình (II).

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$

Giải

Trước hết ta giải bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của (5) ta được $x^2 - 6x + 6 = (2x - 1)^2 (7)$.

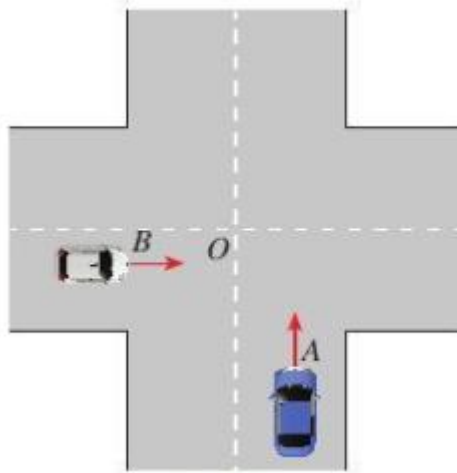
Ta có: $(7) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Do đó, phương trình (7) có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \frac{-5}{3}$.

Trong hai giá trị trên, chỉ có giá trị $x = 1$ là thỏa mãn $x \geq \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (5) có nghiệm là $x = 1$.

Ví dụ 4. Hai ô tô xuất phát tại cùng một thời điểm với vận tốc trung bình như nhau là 40 km/h từ hai vị trí A và B trên hai con đường vuông góc với nhau để đi về bến O là giao của hai con đường. Vị trí A cách bến 8 km , vị trí B cách bến 7 km . Gọi x là thời gian hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km .



Bạn Dương xác định được x thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$. Hãy giải thích vì sao thời gian x (giờ) để hai xe bắt đầu chạy cho tới khi cách nhau 5 km thỏa mãn phương trình $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$. Sau đó, hãy giải phương trình trên.

Giải.

Quãng đường xe ô tô xuất phát từ A, B đi được sau x giờ là $40x(\text{km})$.

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí A đến C cách O một khoảng $OC = 8 - 40x(\text{km})$.

Sau x giờ, ô tô xuất phát từ vị trí B đến D cách O một khoảng $OD = 7 - 40x(\text{km})$.

Để $8 - 40x \geq 0$ và $7 - 40x \geq 0$ thì $0 \leq x \leq 0,175$. Do tam giác OCD là tam giác vuông nên

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2}.$$

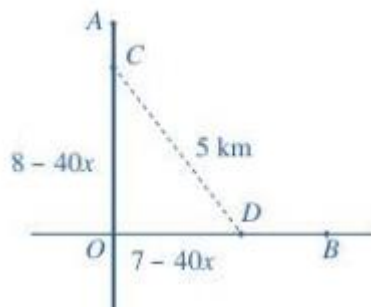
Ta có phương trình: $\sqrt{(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2} = 5$.

Bình phương hai vế ta có:

$$(8 - 40x)^2 + (7 - 40x)^2 = 25.$$

$$\Leftrightarrow 1600x^2 - 640x + 64 + 1600x^2 - 560x + 49 = 25$$

$$\Leftrightarrow 3200x^2 - 1200x + 88 = 0$$



$$\Leftrightarrow 400x^2 - 150x + 11 = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm là $x = 0,1$ hoặc $x = 0,275$. Đối chiếu với điều kiện $0 \leq x \leq 0,175$, ta chọn $x = 0,1$.

Vậy thời gian để hai xe cách nhau 5km là $0,1$ giờ.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Nâng lên lũy thừa, trị tuyệt đối hóa, sử dụng bất đẳng thức, đưa về phương trình tích, đặt ẩn phụ.

Phương trình có dạng	Đặt ẩn phụ
$\sqrt{ax+b}, x, x^2, \dots$	$t = \sqrt{ax+b}, t \geq 0$
$\sqrt{ax^2+bx+c}, ax^2+bx, \dots$	$t = \sqrt{ax^2+bx+c}, t \geq 0$
$\sqrt[3]{ax+b}, ax+b, \dots$	$t = \sqrt[3]{ax+b}$
$\begin{cases} \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} \\ \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} \end{cases}, f(x)+g(x)=C$	$t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$
$\sqrt{f(x)} \pm \frac{A}{\sqrt{f(x)}}, f(x) + \frac{A^2}{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)} \pm \frac{A}{\sqrt{f(x)}}$
$\sqrt[m]{f(x)}, \sqrt[n]{f(x)}$	$t = \sqrt[s]{f(x)}$ với s là bội chung nhỏ nhất của m và n

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{14-2x} = x-3$.

b) $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$.

Lời giải

a)

$$\sqrt{14-2x} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 14-2x = (x-3)^2 \\ x^2-4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = -1 \vee x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.

b)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2+2x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$x^2+2x+4 = 2-x \Leftrightarrow x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -2, x = -1$.

Câu 2. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x-2} - 3\sqrt{x^2-4} = 0.$$

$$b) \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$\sqrt{x-2} - 3\sqrt{(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}(1-3\sqrt{x+2}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ 1-3\sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{17}{9} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 2$.

b)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$\sqrt{x+4} = \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x}.$$

Bình phương hai vế phương trình và rút gọn ta được

$$2x+1 = \sqrt{2x^2-3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (2x+1)^2 = 2x^2-3x+1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x=0 \\ x=-7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 0$.

Câu 3. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}.$$

$$b) 2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4.$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện: } 0 \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$x^3 + \sqrt{3}x^2 + x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{10}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}}$.

b) Điều kiện: $x \geq 3$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương với.

$$(1 + \sqrt{3+x})^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + 1 = 3x \\ \sqrt{x+3} + 1 = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 1, x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18}$.

Câu 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$

b) $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4.$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3\left(x^2 + 2x + 1 + \frac{4}{3}\right)} + \sqrt{5\left(x^2 + 2x + 1 + \frac{9}{5}\right)} = -(x^2 + 2x + 1) + 5.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2.$$

Phương trình (1) có: $\begin{cases} VT \geq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \\ VP \leq 5 \end{cases}$. Do đó: $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1\}$.

b) Ta có:

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-5} - 2} + \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{2x-5} + 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sqrt{2x-5} + 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sqrt{2x-5} - 3)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-5} + 1 + |\sqrt{2x-5} - 3| = 4 \quad (2).$$

Do $|3 - \sqrt{2x-5}| \geq 3 - \sqrt{2x-5}$ nên $4 = |3 - \sqrt{2x-5}| + \sqrt{2x-5} + 1 \geq 3 - \sqrt{2x-5} + \sqrt{2x-5} + 1 = 4$.

$$\text{Vậy } (2) \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2x-5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 9 \geq 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \geq x \geq \frac{5}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \left[\frac{5}{2}; 7\right]$.

Câu 5. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2} = x+3$.

b) $(x+3)\sqrt{2x^2+1} = x^2 + x + 3$.

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

Nhận thấy $(2x-1) - (x-2) = x+3$ nên ta nhân liên hợp về trái của phương trình, ta được

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2} = x+3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2}} = x+3.$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 0 \\ \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-2} - 1 = 0 \end{cases}.$$

Phương trình vô nghiệm với mọi $x \geq 2$.

b)

Ta thấy $x = -3$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq -3$

Phương trình tương đương với:

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = \frac{x^2+x+3}{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} - 1 = \frac{x^2}{x+3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1} = \frac{x^2}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2(x+3) = \sqrt{2x^2+1}+1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = 2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ 2x^2+1 = 4x^2+25+20x \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x^2 + 10x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x = -5 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{13}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = 5 + \sqrt{13}, x = 0$.

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -2, x = -1$.

Câu 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{x} = 2.$

b) $3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2+8} = \sqrt{x^2+15} + 2.$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}.$

Nhằm ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình nên ta tách như sau:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}-1) + (\sqrt[3]{x}-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x-2}-1)(\sqrt{3x-2}+1)}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} \right) = 0 \quad (1).$$

$$\text{Vì } \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} > 0$$

$$\text{Do đó phương trình (1)} \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 1$.

b)

$$\text{Phương trình được viết lại như sau: } 3\sqrt[3]{x}-2 = \sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}.$$

$$\text{Vì } \sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8} > 0 \text{ nên phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn } 3\sqrt[3]{x}-2 > 0 \text{ hay.}$$

$$x > \frac{8}{27}.$$

Phương trình tương đương với:

$$3\sqrt[3]{x}-3 = \sqrt{x^2+15}-4+3-\sqrt{x^2+8}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4} - \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3} \quad (2).$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} \right) = 0.$$

Vì $x > \frac{8}{27}$ suy ra: $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} > 0$ nên

$$\frac{3}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4} > 0.$$

Do đó phương trình (2) $\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình $x=1$.

Câu 7. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2.$

b) $3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2.$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 1$.

Nhận xét $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 1.$

Đặt $t = \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Với $t = 1$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} &= 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-1} = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} &= x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm phương trình là $x=1$.

Ta có $3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2 \Leftrightarrow 3(x^2 + 7x + 7) + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 5.$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 7x + 7}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng

$$3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{3} (\text{loại}) \\ t = 1 (\text{thỏa mãn}). \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -1. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -6, x = -1$.

Câu 8. Giải các phương trình sau

a) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31.$

b) $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}.$

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 11}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng

$$t^2 + t - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 (\text{loại}) \\ t = 6 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Với $t = 6$ ta có $\sqrt{x^2 + 11} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 11 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \pm 5$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} - 10 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}, t \geq 0$ thì phương trình có dạng

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 (\text{loại}) \\ t = 2 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta có $\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1, x = -4$.

Câu 9. Giải các phương trình sau

a) $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$.

b) $x + \sqrt{5 + \sqrt{x - 1}} = 6$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{4}{5}$.

Đặt $t = \sqrt{4x + 5}, t \geq 0$ thì $x = \frac{t^2 - 5}{4}$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{t^4 - 10t^2 + 25}{16} - \frac{6}{4}(t^2 - 5) - 1 &= t \\ \Leftrightarrow t^4 - 22t^2 - 8t + 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 + 2t - 7)(t^2 - 2t - 11) &= 0. \end{aligned}$$

Ta tìm được bốn nghiệm là $t_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}, t_{3,4} = 1 \pm 2\sqrt{3}$.

Do $t \geq 0$ nên chỉ nhận các giá trị $t_1 = -1 + 2\sqrt{2}, t_3 = 1 + 2\sqrt{3}$.

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình $x = 1 - \sqrt{2}, x = 2 + \sqrt{3}$.

b) Điều kiện $1 \leq x \leq 6$.

Đặt $t = \sqrt{x - 1}, t \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned} t^2 + \sqrt{t + 5} &= 5 \Leftrightarrow t^4 - 10t^2 - t + 20 = 0 \\ \Leftrightarrow (t^2 + t - 4)(t^2 - t - 5) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (\text{do } t \geq 0) \end{aligned}$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của $x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$.

Câu 10. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{60 - 24x - 5x^2} = x^2 + 5x - 10$.

b) $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} = 28 - x$.

Lời giải

a) Điều kiện $60 - 24x - 5x^2 \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{60 - 24x - 5x^2}, t \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$\frac{1}{6}t^2 + t - \frac{1}{6}x^2 - x = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - x^2 - 6x = 0.$$

Ta có $\Delta_t' = (x+3)^2 \geq 0$ suy ra $t = x$ hoặc $t = -x - 6$.

$$\text{Với } t = x \text{ ta có } \sqrt{60 - 24x - 5x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 4x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{14}.$$

$$\text{Với } t = -x - 6 \text{ ta có } \sqrt{60 - 24x - 5x^2} = -x - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 6 \geq 0 \\ x^2 + 6x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 - \sqrt{13}.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -2 + \sqrt{14}, x = -3 - \sqrt{13}$.

b) Điều kiện $-x^2 - 8x + 48 \geq 0$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{-x^2 - 8x + 48}, t \geq 0 \text{ thì phương trình trở thành } -\frac{1}{2}t^2 + (x+3)t - \frac{1}{2}x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Ta có $\Delta_t = 1$ suy ra $t = x + 2$ hoặc $t = x + 4$.

$$\text{Với } t = x + 2 \text{ ta có } \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 6x - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3 + \sqrt{31}.$$

$$\text{Với } t = x + 4 \text{ ta có } \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 + 8x - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4 + 4\sqrt{2}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -3 + \sqrt{31}, x = -4 + 4\sqrt{2}$.

Dạng 3.5 Đưa về hệ phương trình

Câu 11. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$.

b) $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} + \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 3$.

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{4x^2 + 5x + 1} \geq 0 \\ b = \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} a^2 - 4b^2 = 9x - 3 \\ a - 2b = 9x - 3 \end{cases}$

Từ đó ta có $a^2 - 4b^2 = a - 2b \Leftrightarrow (a - 2b)(a + 2b) = 0 \Leftrightarrow a = 2b$ hoặc $a = 1 - 2b$.

Với $a = 2b$ ta có $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Với $a = 1 - 2b$ ta có $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}$. (*)

Ta có
$$\begin{cases} VT(*) \geq 0 \\ VP(*) = 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 1 - 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq 1 - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$
 suy ra (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$.

b) Điều kiện $x^3 + x^2 - 1 \geq 0$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^3 + x^2 - 1} \geq 0 \\ v = \sqrt{x^3 + x^2 + 2} \geq 0 \end{cases}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ v^2 - u^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ (v + u)(v - u) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ v - u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{x^3 + x^2 - 1} = 1 \\ \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 - 1 = 1 \\ x^3 + x^2 + 2 = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Câu 12. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1 - x^2}$

b) $x + \sqrt{5 + \sqrt{x - 1}} = 6$.

Lời giải

a) Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{1 + x} \geq 0 \\ v = \sqrt{1 - x} \geq 0 \end{cases}$, ta được hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ \sqrt{1 + uv}(u^3 - v^3) = 2 + uv \end{cases}$

Ta có
$$\begin{cases} 1 + uv = \frac{1}{2}(2 + 2uv) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2uv) = \frac{1}{2}(u + v)^2 \\ u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + v^2 + uv) = (u - v)(1 + uv). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u^2 - v^2 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ v^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} 1+x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Điều kiện $x \geq 1$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ b = \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \geq \sqrt{5} \end{cases}, \text{ ta được hệ phương trình } \begin{cases} a^2 + b = 5 \\ b^2 - a = 5 \end{cases}.$$

Từ đó ta có $(a+b)(a-b+1) = 0 \Leftrightarrow a-b+1 = 0 \Leftrightarrow a = b-1$.

Với $a = b-1$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{5+\sqrt{x-1}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} &= 5-x \Leftrightarrow x = \frac{11-\sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{11-\sqrt{7}}{2}$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = 2-x$ là:

- A. $S = \{1; 5\}$. **B.** $S = \{1\}$. C. $S = \{5\}$. D. $S = \{2; 3\}$.

Lời giải

Chọn B

Thay các giá trị vào phương trình có $x=1$ vào thỏa mãn phương trình.

Câu 2. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = -x^2 - 5$ là

- A. $S = \{1; 5\}$. **B.** $S = \{1\}$. C. $S = \{5\}$. **D.** $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Vì $-x^2 - 5 < 0$ vậy phương trình vô nghiệm

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4-3x^2} = 2x-1$ là:

- A. 0. **B.** 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{4-3x^2} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4-3x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{-3}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

Câu 4. Số nghiệm của phương trình $(x-3)\sqrt{4-x^2} = x^2 - 4x + 3$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định $-2 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned}(x-3)\sqrt{4-x^2} &= x^2 - 4x + 3 \\ \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{4-x^2} &= (x-3)(x-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 & (L) \\ \sqrt{4-x^2} = x-1 & (*) \end{cases}\end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{4-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1+\sqrt{7}}{2} & (TM) \\ x = \frac{1-\sqrt{7}}{2} & (L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)\sqrt{10-x^2} = x^2 - 3x + 2$ là:

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$$\begin{aligned}(x-1)\sqrt{10-x^2} &= x^2 - 3x + 2 \\ \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{10-x^2} &= (x-2)(x-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & (TM) \\ \sqrt{10-x^2} = x-2 & (*) \end{cases}\end{aligned}$$

Giải (*)

$$\sqrt{10-x^2} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 10-x^2 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=3 & (TM) \\ x=-1 & (L) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 4

Câu 6. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{6; 2\}$.

D. $S = \{6\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{2x-3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2x-3 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2-8x+12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \begin{cases} x = 6 \Leftrightarrow x = 6. \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 7. Tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$.

- A. 2 giao điểm. B. 4 giao điểm. C. 3 giao điểm. **D. 1 giao điểm.**

Lời giải

Chọn D

Số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$ là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sqrt{3x-4} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ (\sqrt{3x-4})^2 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x-4 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-9x+13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = \frac{9-\sqrt{29}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{29}}{2}. \\ x = \frac{9+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$ có 1 giao điểm chung.

Câu 8. Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1} = x-2$ bằng:

- A. 6. B. 1. **C. 5.** D. 2.

Lời giải

Chọn C

+) Với điều kiện $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ta có phương trình đã cho tương đương với phương

$$\text{trình: } 2x-1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(L) \\ x = 5(t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-2} = x$ là

- A. 2.** B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x-2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-3x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sqrt{5x+6} = x-6$ bằng

- A. 15.** B. 6. C. 2 và 15. D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{5x+6} = x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 \geq 0 \\ 5x+6 = x^2-12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x^2-17x+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x=2 \\ x=15 \end{cases} \Leftrightarrow x=15.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=15$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x+7} = 2x-1$ là

- A. $\left\{ \frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2} \right\}$. B. $\left\{ \frac{2+\sqrt{10}}{2} \right\}$.
C. $\left\{ \frac{2-\sqrt{10}}{2} \right\}$. D. Một phương án khác.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sqrt{4x+7} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4x+7 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-8x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}. \text{ Vậy } x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 12. Phương trình $\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 3. B. 0. C. 2. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ -x^2+4x = (2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x^2-12x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2(n) \\ x = \frac{2}{5}(l) \end{cases}$$

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = x^2-2x+3$ là

- A. 2. B. 3. **C. 1.** D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2-2x+5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = x^2-2x+5$, ta có phương trình trở thành $\sqrt{t} = t-2$

$$\sqrt{t} = t-2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t = (t-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t^2-5t+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t=1 \Rightarrow t=4 \\ t=4 \end{cases}$$

Khi đó $4 = x^2-2x+5 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1$. Thử lại ta thấy $x=1$ thỏa mãn.

Suy ra phương trình đã cho có một nghiệm.

Câu 14. Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x+1} = x^2+x-1$ là

- A. 3. **B. -3.** C. -1. D. 0.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2 - \sqrt{x^2 + x + 1} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} = -1 \text{ (vn)} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} = 2 \text{ (1)} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$$

$$\text{Do đó: } x_1, x_2 = \frac{-3}{1} = -3.$$

Câu 15. Phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1$ có nghiệm:

A. $x = 1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = 4$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 5 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 16. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x - 2$ là

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải**Chọn C**

$$\sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 9x + 7 = (x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 3} = 3x - 1$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn B**

Điều kiện xác định: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + 3} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 3 = (3x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2 - 6x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận.

Câu 18. Phương trình: $\sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x$ có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 0 . **B.** 2 .
C. 1 . **D.** Vô Số.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ x^2 - x - 12 = (7 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ 13x = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x = \frac{61}{13} (tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{61}{13}$.

Câu 19. Số nghiệm của phương trình sau $x - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1$ là:

- A. 0.** **B. 1.** **C. 2.** **D. 3.**

Lời giải

Chọn B

$$x - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 1.

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0$ là.

- A. 4.** **B. 1.** **C. 3.** **D. 2.**

Lời giải

Chọn A.

Phương trình $x^2 - 3x + 86 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 0$ $\hat{=}$ $x^2 - 3x + 16 - 19\sqrt{x^2 - 3x + 16} + 70 = 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 16}$, $t \geq 0$. Khi đó (*) $t^2 - 19t + 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 14 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ x = 5 \end{cases}$

Vói $t = 14$ Þ $\sqrt{x^2 - 3x + 16} = 14 \hat{U} \quad x^2 - 3x - 180 = 0 \hat{U} \quad \begin{matrix} \dot{x} = 15 \\ \ddot{x} = -12 \end{matrix}$.

$$\text{V} \acute{o}i \ t = 5 \ \mathbb{P} \ \sqrt{x^2 - 3x + 16} = 5 \ \hat{\mathbb{U}} \ x^2 - 3x - 9 = 0 \ \hat{\mathbb{U}} \ \begin{cases} x = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 21. Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$ là:

- A. 17.** **B. 4.** **C. 16.** **D. 8.**

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 22. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$ là:

- A. 5. **B. 13.** C. 10. D. 25.

Lời giải:

Chọn B

Điều kiện xác định $x^2 + 5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 5x + 10} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -2 \end{cases}.$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Câu 23. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 0$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{1\}$. **C. $S = \{2\}$.** D. $S = \{1; 2\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sqrt{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Câu 24. Phương trình $\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{2x+1} - x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 4. C. 3. **D. 2.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{+) Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{+) } \sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{2x+1} - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ \sqrt{2x+1} - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0(1) \\ \sqrt{2x+1} = x(2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(n) \\ x = -1(l) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): } \sqrt{2x+1} = x \Rightarrow 2x+1 = x^2 \text{ (do } x \geq 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}(n) \\ x = 1 - \sqrt{2}(l) \end{cases}$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 2.

Câu 25. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$

- A. 3. B. 1. C. 0. **D. 2**

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \sqrt{x-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(l) \\ x = 3(n) \\ x = 2(n) \end{cases}$$

Câu 26. Tập nghiệm của phương trình $(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0$ là

A. $\{1; 2\}$.

B. $\{-1; 1; 2\}$.

C. $[1; 2]$.

D. $\{-1; 2\}$.

Lời giải

Chọn A

ĐKXD: $x \geq 1$.

$$\text{Biến đổi: } (x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 1. \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện ta được $x = 1, x = 2$

Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 4x + 3) = 0$ là

A. $S = \{2; 3\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{1; 3\}$.

D. $S = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1, x = 3 \end{cases} \text{ So với điều kiện chỉ có } x = 2, x = 3 \text{ thỏa.}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3\}$.

Câu 28. Tập nghiệm của phương trình $(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0$ là

A. $\{1; 2\}$.

B. $\{-1; 1; 2\}$.

C. $[1; 2]$.

D. $\{-1; 2\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

So sánh điều kiện kết luận phương trình có nghiệm $x = 1; x = 2$.

Câu 29. Phương trình $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x \Leftrightarrow (x^2 - 6x)(\sqrt{17 - x^2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ 17 - x^2 \geq 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0(TM) \\ x = 6(L) \end{cases} \\ |x| \leq \sqrt{17} \\ 17 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 30. Số nghiệm của phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4$ bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$+) \text{ Điều kiện: } 2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}.$$

$$(x-2)\sqrt{2x+7} = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7} = (x-2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[\sqrt{2x+7} - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x+7} = x+2 \end{cases}.$$

$$+) \ x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn)}.$$

$$+) \ \sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+7 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

$$\text{Vậy phương trình có hai nghiệm } \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}.$$

Câu 31. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2}$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$.

C. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

D. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Phương trình tương đương: } 3-x = x+2 \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}.$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Câu 32. Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{3-x}$ là

A. $x = \frac{3}{4}$.

B. $x = \frac{2}{3}$.

C. $x = \frac{4}{3}$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Thay các nghiệm x vào phương trình thấy $x = \frac{4}{3}$ là nghiệm.

Câu 33. Số nghiệm của phương trình $x\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ chỉ xác định khi $x = 2$.

Thử lại, ta thấy là nghiệm phương trình.

Vậy phương trình chỉ có 1 nghiệm.

Câu 34. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1$.

A. $\{2\}$.

B. $\{1; -2\}$.

C. $\{-1; 2\}$.

D. $\{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Đk: $-2 \leq x \leq 3$

$$\sqrt{3-x} = \sqrt{x+2} + 1 \Leftrightarrow 3-x = x+3+2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3-x-x-3 = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow -2x = 2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 35. Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 1$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = 1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = 1 + 2\sqrt{2x-1} + 2x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = -x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3 \geq 0 \\ 4(2x-1) = (-x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy số nghiệm nguyên của phương trình là 1.

Câu 36. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2.$$

$$\text{- PT } \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow [\sqrt{3x+1}]^2 = [1 + \sqrt{2-x}]^2 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 + 2\sqrt{2-x} + 2-x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4x-2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 37. Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $-3 \leq x \leq 1$.

Phương trình

$$x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x+3})^2 = (3 + \sqrt{1-x})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{1-x} \\ x + \sqrt{x+3} = -(3 + \sqrt{1-x}) \text{ VN} \end{cases} \Leftrightarrow 1-x + \sqrt{1-x} + 2 - \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ (do } \sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} > 0, \forall x \in [-3; 1])$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 38. Phương trình $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b > 0$.

Khi đó: $a + b =$

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2} \text{ (điều kiện: } x \geq -\frac{1}{3})$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[\sqrt{8x+5} - (x+2)] + [\sqrt{6x+2} - (x+1)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2 + 4x + 1)}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{-x^2 + 4x + 1}{\sqrt{6x+2} + x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2 + 4x + 1) \left(\frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x + 1} = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 39. Biết phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $(x_1-1).(x_2-1)$.

- A. 1. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \\ x = 3 + 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra $(x_1-1).(x_2-1) = 0$.

Câu 40. Phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

- A. 1. B. 3. C. 2. **D. 0.**

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-x+1 = (2x-1)^2 \\ 3x^2-3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \text{ (ktm)} \\ 3x^2-3x = 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 41. Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} + \sqrt{16-x^2} = 4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}.$$

$$\text{Bước 2. Ta được phương trình } t + \frac{8-t^2}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Bước 3. Với } t = 0 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 4 \Leftrightarrow 16-x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 2 \Leftrightarrow 16-x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

- A. **Lời giải** trên sai ở bước 2. B. **Lời giải** trên đúng hoàn toàn.
C. **Lời giải** trên sai ở bước 1. D. **Lời giải** trên sai ở bước 3.

Lời giải

Chọn D

Ở bước 1, khi đặt $t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}$ thì bản chất của

Lời giải trên là đưa về phương trình hệ quả. Do đó cần thử lại nghiệm ở bước 3.

Câu 42. Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.

A. $x=1$.

B. $x=4$.

C. $\begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$.

D. $x \in \emptyset$.

Lời giải**Chọn D**Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2$.Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} 5x-4x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} (*)$.Từ phương trình: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1}=2 \Rightarrow \sqrt{5x-4x^2}-x=2(x-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-4x^2}=3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 5x-4x^2=9x^2-12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 13x^2-17x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x=1 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện (*) thì $x=1$, $x=4$ đều không thỏa mãn điều kiện phương trình ban đầu.

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 43. Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}=0$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải**Chọn A**Điều kiện $x \geq 3$.

$$\text{Khi đó pt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ \sqrt{x-3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases} \text{ Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duy}$$

nhất $x=3$.

Câu 44. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x} + \frac{2-x}{\sqrt{x-3}}=0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm. Suy ra phương trình ban đầu vô nghiệm.

Câu 45. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2+4x-1}=x+1$ là?

A. $S=\{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$.

B. $S=\{-1+\sqrt{3}\}$.

C. $S=\{-1-\sqrt{3}\}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải**Chọn B**

$$\sqrt{2x^2+4x-1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2+4x-1=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=-1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=-1+\sqrt{3}$$

Câu 46. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+4x-3}+5=2x$ là?

- A. $S=\left\{2;\frac{14}{5}\right\}$. B. $S=\{2;4\}$. C. $S=\left\{\frac{14}{5}\right\}$. D. $S=\{2\}$

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{-x^2+4x-3}+5=2x \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+4x-3}=2x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ -x^2+4x-3=(2x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 5x^2-24x+28=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{14}{5} \end{cases}$$

Câu 47. Khi giải phương trình $\sqrt{x^2+3x}+1=3x$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Bình phương hai vế của phương trình (1) ta được: $x^2+3x=(3x-1)^2$ (2)

Bước 2: Khai triển và rút gọn (2) ta được: $8x^2-9x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{8} \end{cases}$

Bước 3: Khi $x=1$, ta có $x^2+3x>0$. Khi $x=\frac{1}{8}$, ta có $x^2+3x>0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{1;\frac{1}{8}\right\}$

Vậy Cách giải trên **đúng** hay **sai**? Nếu sai thì sai ở bước nào?

- A. Đúng. B. Sai ở bước 1. C. Sai ở bước 2. D. Sai ở bước 3.

Lời giải

Chọn D

☐ Ta có: $x^2+3x>0$, ở là điều kiện xác định của phương trình không phải là điều kiện có nghiệm của phương trình

☐ Ở Bước 3 ta thay $x=1$ vào phương trình thỏa mãn nên $x=1$ là nghiệm

Khi ta thay $x=\frac{1}{8}$ vào phương trình và thấy $x=\frac{1}{8}$ không thỏa mãn phương trình nên $x=\frac{1}{8}$ không là nghiệm

Câu 48. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^3+x^2+6x+28}=x+5$ bằng:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. -1.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 28} = x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x^3 + x^2 + 6x + 28 = (x + 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x^3 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Tổng các nghiệm là: 0.

Câu 49. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x$ bằng:

A. -2.

B. 4.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^4 - 4x^3 + 14x - 11 = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Tổng các nghiệm là: -1.

Câu 50. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$ là:

A. 0 nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 2 nghiệm.

D. 3 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x \geq 0 \\ 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 6x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Số các nghiệm là: 2.

Câu 51. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ bằng:

A. $3 - \sqrt{2}$.

B. $2 + \sqrt{2}$.

C. $2 - \sqrt{2}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = (-x^2 + 3x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ (x-1)^2(x^2 - 4x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Tổng các nghiệm là: $3 - \sqrt{2}$

Câu 52. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$ là

- A.** $\frac{1}{2} \leq x$. **B.** $x = \frac{1}{2}$. **C.** $x \leq \frac{1}{2}$ **D.** $\emptyset \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Câu 53. $[-3;1)$ là tập xác định của phương trình nào sau đây?

- A.** $\sqrt{3+x} = \sqrt{\frac{1}{1-x^3}}$ **B.** $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{3-2x-x^2}$
C. $\sqrt{-x^2-x+6} = \sqrt{-x^2-3x+4}$ **D.** $\sqrt{1-x} = \sqrt{-x^2-x+6}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{A. ĐK: } \begin{cases} 3+x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x^3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 1-x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{B. ĐK: } \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{3-2x-x^2} \begin{cases} x^2-2x+1 \geq 0 \\ 3-2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ -(x-1)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

$$\text{C. ĐK: } \begin{cases} -x^2-x+6 \geq 0 \\ -x^2-3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+3)(x-2) \geq 0 \\ -(x-1)(x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

$$\text{D. ĐK: } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ -x^2-x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ -(x+3)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

Câu 54. Cho phương trình $\sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x+1}$ (1). Phép biến đổi nào sau đây là **sai**?

$$\text{A. (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x+1 \end{cases}$$

$$\text{B. (1)} \Leftrightarrow x^2-2x-3 = x+1$$

$$\text{C. (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x+1 \end{cases}$$

$$\text{D. (1)} \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x+1 \end{cases}$$

Lời giải

Chọn B

Phép biến đổi B thiếu điều kiện.

Câu 55. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x-\frac{5}{4}}$. Một bạn làm như sau:

$$\text{Bước 1: } \sqrt{x^2-2x-3} = \sqrt{x-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{5}{4} \geq 0 \\ x^2-2x-3 = x-\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{4} \\ x^2-3x-\frac{7}{4} = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Phương trình $x^2-3x-\frac{7}{4}=0$ có hai nghiệm phân biệt, nên theo định lý Vi-et, ta có tổng hai nghiệm là $S=3$.

Bước 3: Vậy phương trình có tổng các nghiệm là 3.

Lời giải trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x^2-3x-\frac{7}{4}=0$ có hai nghiệm phân biệt: $x=\frac{7}{2}$ (thỏa ĐK) và $x=-\frac{1}{2}$ (không thỏa ĐK) nên phương trình đã cho có một nghiệm $x=\frac{7}{2}$, và tổng các nghiệm là: $\frac{7}{2}$.

Câu 56. Giải phương trình $\sqrt{x^2(x-1)} = \sqrt{x^2(3-x)}$ (*), một bạn làm như sau:

$$\text{Bước 1: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \geq 0 \quad (1) \\ x^2(x-1) = x^2(3-x) \quad (2) \end{cases}$$

Bước 2: Giải (1): Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

$$\text{Bước 3: } (2) \Leftrightarrow x^2(2x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Kết hợp ta được $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Lời giải trên là đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn C

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 57. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = 2$ là

- A. $1 \leq x$ B. $x \neq 1$ C. $\begin{cases} 2 < x \\ x < 0 \end{cases}$ D. $x > 1$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Câu 58. Điều kiện xác định của phương trình $(x - 3)(x + 1) + 4(x - 3)\sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = -3$ là

- A. $x > 3$ B. $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$ D. $x \leq -1$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\frac{x + 1}{x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases}$

Câu 59. Phép biến đổi nào sau đây là sai

- A. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Rightarrow 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2$
 B. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2$
 C. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 10x + 1 = (-x^2 - 2x + 7)^2 \\ -x^2 - 2x + 7 \geq 0 \end{cases}$
 D. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = -x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 0 \\ t = \frac{1 - t^2}{5} + 7 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Phép biến đổi bình phương hai vế không phải là phép biến đổi tương đương nếu 2 vế không cùng dấu.

Câu 60. Giải phương trình $(x - 2)(x - 1) + 2(x - 2)\sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}} = 0$ (1)

Bước 1: Điều kiện: $\frac{x - 1}{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Bước 2: (1) $\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) + 2\sqrt{(x - 2)(x - 1)} = 0$ (2)

Bước 3: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x - 2)(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (tm) \\ x = 2 & (loại) \end{cases} \\ \sqrt{(x - 2)(x - 1)} = -2 & (loại) \end{cases}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 1$

Lời giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng

B. Sai từ bước 1

C. Sai từ bước 2

D. Sai từ bước 3

Lời giải

Chọn C

$$(x-2)(x-1)+2(x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)+2\sqrt{(x-2)(x-1)}=0 \text{ chỉ đúng khi } x>2$$

Câu 61. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7$ là

A. -3

B. -5

C. -2

D. 2

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{5x^2+10x+1}=-x^2-2x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 0 \\ t=\frac{1-t^2}{5}+7 \Leftrightarrow t^2+5t-36=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-9(\text{loại}) \\ t=4(\text{tm}) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Với } t=4: 5x^2+10x+1=16 \Leftrightarrow 5x^2+10x-15=0 \Rightarrow x_1+x_2=-2$$

Câu 62. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x}+\frac{2-x}{\sqrt{x-3}}=0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}.$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm. Suy ra phương trình ban đầu vô nghiệm.

Câu 63. Tìm tập hợp nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1$.

A. $\{2\}$.

B. $\{1; -2\}$.

C. $\{-1; 2\}$.

D. $\{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đk: } -2 \leq x \leq 3$$

$$\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}+1 \Leftrightarrow 3-x=x+3+2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 3-x-x-3=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow -2x=2\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$$

Câu 64. Số nghiệm nguyên của phương trình sau $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1+\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+3=1+2\sqrt{2x-1}+2x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=-x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3 \geq 0 \\ 4(2x-1)=(-x+3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy số nghiệm nguyên của phương trình là 1.

Câu 65. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{- Điều kiện: } \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2.$$

$$\text{- PT } \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow [\sqrt{3x+1}]^2 = [1 + \sqrt{2-x}]^2 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 + 2\sqrt{2-x} + 2-x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4x-2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2-x = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 66. Số nghiệm của phương trình $x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $-3 \leq x \leq 1$.

Phương trình

$$x^2 + 2x + 2x\sqrt{x+3} = 6\sqrt{1-x} + 7 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x+3})^2 = (3 + \sqrt{1-x})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{1-x} \\ x + \sqrt{x+3} = -(3 + \sqrt{1-x}) \text{ VN} \end{cases} \Leftrightarrow 1-x + \sqrt{1-x} + 2 - \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} \left(\sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 0 \text{ (do } \sqrt{1-x} + 1 + \frac{\sqrt{1-x}}{2 + \sqrt{x+3}} > 0, \forall x \in [-3; 1])$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Câu 67. Phương trình $x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2}$ có một nghiệm dạng $x = a + \sqrt{b}$ với $a, b > 0$.

Khi đó: $a+b =$

A. 7.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)\sqrt{8x+5} + \sqrt{6x+2} \quad (\text{điều kiện: } x \geq -\frac{1}{3})$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[\sqrt{8x+5} - (x+2)] + [\sqrt{6x+2} - (x+1)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(-x^2+4x+1)}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{-x^2+4x+1}{\sqrt{6x+2} + x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+4x+1) \left(\frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+1=0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{8x+5} + (x+2)} + \frac{1}{\sqrt{6x+2} + x+1} = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{5} \\ x=2-\sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 68. Biết phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1}$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $(x_1-1) \cdot (x_2-1)$.

A. 1.

B. 0.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-3} = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra $(x_1-1) \cdot (x_2-1) = 0$.

Câu 69. Phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2}$ có số nghiệm là:

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\text{Khi đó } \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-x+1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (ktm)}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 70. Với bài toán: Giải phương trình $\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} + \sqrt{16-x^2} = 4$. Một học sinh giải như sau:

Bước 1. Điều kiện: $-4 \leq x \leq 4$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}.$$

$$\text{Bước 2. Ta được phương trình } t + \frac{8-t^2}{2} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases}.$$

$$\text{Bước 3. Với } t=0 \text{ ta có } \sqrt{16-x^2} = 4 \Leftrightarrow 16-x^2 = 16 \Leftrightarrow x=0.$$

Với $t = 2$ ta có $\sqrt{16 - x^2} = 2 \Leftrightarrow 16 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$.

Hãy chọn phương án đúng.

A. Lời giải trên sai ở bước 2.

B. Lời giải trên đúng hoàn toàn.

C. Lời giải trên sai ở bước 1.

D. Lời giải trên sai ở bước 3.

Lời giải

Chọn D

Ở bước 1, khi đặt $t = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = 8 - 2\sqrt{16-x^2} \Rightarrow \sqrt{16-x^2} = \frac{8-t^2}{2}$ thì bản chất của lời giải trên là đưa về phương trình hệ quả. Do đó cần thử lại nghiệm ở bước 3.

Câu 71. Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.

A. $x = 1$.

B. $x = 4$.

C. $\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

D. $x \in \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Giải phương trình trên tập số thực: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2$.

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases} 5x-4x^2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{5}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} (*)$.

Từ phương trình: $\frac{\sqrt{5x-4x^2}-x}{x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{5x-4x^2} - x = 2(x-1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-4x^2} = 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 5x-4x^2 = 9x^2-12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 13x^2-17x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x=1 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện (*) thì $x = 1$, $x = 4$ đều không thỏa mãn điều kiện phương trình ban đầu. Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 72. Số nghiệm của phương trình $\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}} = 0$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \geq 3$.

Khi đó pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ \sqrt{x-3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm duy

nhiệm $x = 3$.

Câu 73. Số nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt{x^2+5x-2} - 2$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2}$ ta được phương trình: $t^3 + 2 = 2t - 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$

$$\text{Với } t = -2 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Câu 74. Phương trình $\sqrt{x^2 + 481} - 3\sqrt[4]{x^2 + 481} = 10$ có hai nghiệm α, β . Khi đó tổng $\alpha + \beta$ thuộc đoạn nào sau đây ?

A. $[2; 5]$.

B. $[-1; 1]$.

C. $[-10; -6]$.

D. $[-5; -1]$.

Lời giải**Chọn B**

Đặt $t = \sqrt[4]{x^2 + 481}, t \geq \sqrt[4]{481}$. Phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \end{cases} \text{ .Đổi chiếu điều kiện, loại } t = -2.$$

$$\text{Với } t = 5 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2 + 481} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Leftrightarrow x = \pm 12 \Rightarrow \alpha = 12, \beta = -12$$

Do đó : $\alpha + \beta = 0 \in [-1; 1]$. Chọn **B**.

Câu 75. Phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$ có nghiệm là $a \pm \sqrt{b}$ thì $2a - b$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải**Chọn A**

Điều kiện xác định $x \geq 1$.

$$\text{Ta có } 2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1} \Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \quad (1)$$

Với $x = 1$ ta thấy không thỏa mãn (1) nên không phải là nghiệm.

Với $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 3(x - 1) = 7\sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \Leftrightarrow 2\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} - 7\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{1}{4} \\ \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 3x + 5 = 0 \\ x^2 - 8x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4$ và $b = 6$. Do đó, $2a - b = 2.4 - 6 = 2$.

Câu 76. Giải phương trình: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ ta được một nghiệm $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}, b < 20$. Tính

giá trị biểu thức $P = a^3 + 2b^2 + 5c$.

A. $P = 61$.

B. $P = 109$.

C. $P = 29$.

D. $P = 73$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x} \geq 0 \\ \frac{x - 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow x < \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{Xét } x \geq 1 \quad x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x^2 - x} = x - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - x} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (tm) \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (l) \end{cases}$$

$$a=1, b=5, c=2 \Rightarrow P = a^3 + 2b^2 + 5c = 61$$

Câu 77. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất

A. $m > 4$.

B. $4 < m < 5$.

C. $3 < m < 4$.

D. $m < 4$.

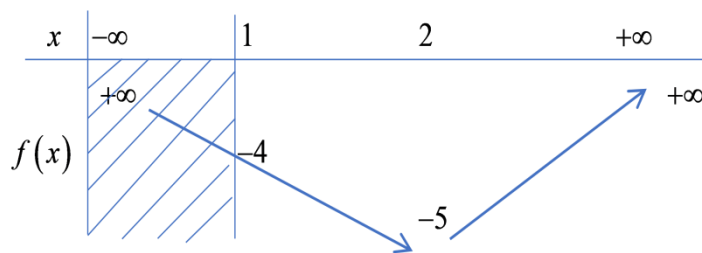
Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 6x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x - 1 = -m \quad (1) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất $x \geq 1$.

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đường thẳng $y = -m$ và đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x - 1$.



$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } \begin{cases} -m = -5 \\ -m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m < 4 \end{cases}$$

Câu 78. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm. Đáp số nào sau đây đúng?

A. $m \geq -\frac{25}{4}$.

B. $m \geq 3$.

C. $m \geq 0$.

D. $m \geq -\frac{25}{8}$.

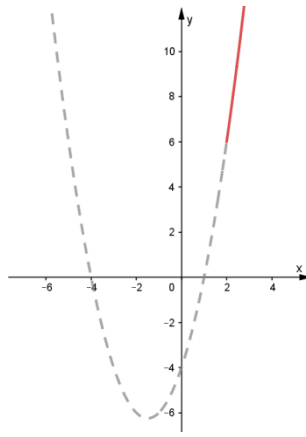
Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 3x - 4 = 2m \end{cases}$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x - 4$ với đường thẳng $y = m$ trên tập $[2; +\infty)$.

Ta có đồ thị sau



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình có nghiệm khi $2m \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 79. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

- A. $m \leq 1$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m > 2$. **D. $m \geq 2$.**

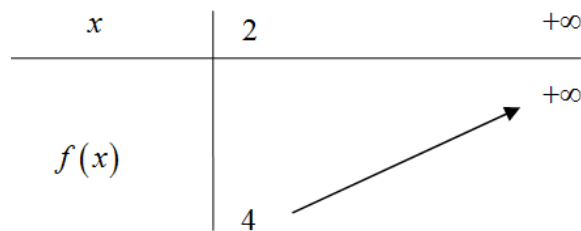
Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{2x^2 - 2x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 2m = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 4 = 2m \quad (*) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 4, (x \geq 2)$

BBT:



Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm $x \geq 2 \Leftrightarrow 2m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 80. Với mọi giá trị dương của m phương trình $\sqrt{x^2 - m^2} = x - m$ luôn có số nghiệm là

- A. 2. **B. 1.** C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Với mọi giá trị dương của m

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 - m^2} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x^2 - m^2 = (x - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ 2xm = 2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow x = m.$$

Vậy phương trình luôn có 1 nghiệm $x = m$.

Câu 81. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + m} = 2x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số để phương trình đã cho vô nghiệm.

- A. $m \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{15}{4}\right)$. **C. $m \in \left(-\infty; \frac{15}{4}\right)$.** D. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 8x + m = (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ m = 3x^2 + 4x + 1 \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi (*) vô nghiệm.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^2 + 4x + 1$ như sau

x	$-\infty$	$-2/3$	$1/2$	$+\infty$
$y = 3x^2 + 4x + 1$	$+\infty$		$15/4$	$+\infty$

Từ BBT suy ra pt vô nghiệm khi và chỉ khi $m < \frac{15}{4}$.

Câu 82. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 2m} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt là $S = (a; b]$. Khi đó giá trị $P = a.b$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2m} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2m = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 2x + 1 - 2m = 0 (*) \end{cases}.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{2}$; phương trình (*) trở thành: $3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1 - 2m = 0$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - t + \frac{3}{4} - 2m = 0 (**)$$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $0 \leq t_1 < t_2$. Điều

$$\text{kiện: } \begin{cases} \Delta = (-1)^2 - 4.3.\left(\frac{3}{4} - 2m\right) > 0 \\ S = -\frac{-1}{3} > 0 \\ P = \frac{\frac{3}{4} - 2m}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \leq \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m \leq \frac{3}{8}.$$

Vậy $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{3}{8}\right]$. Ta có: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$.

Câu 83. Cho phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{2m + 3x - x^2}$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì $m \in [a; b]$. Giá trị $a^2 + b^2$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{2m+3x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x-3 \geq 0 \\ -x^2+4x-3 = 2m+3x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 2m+3 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có nghiệm thì: $1 \leq 2m+3 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0 \Rightarrow m \in [-1; 0] \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Câu 84. Số các giá trị nguyên của m để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1} = \sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.**Lời giải****Chọn D**

$$\text{Phương trình tương đương: } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2-2x-m-1 = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2-4x-m = 0 \end{cases}$$

Để phương trình $\sqrt{x^2-2x-m-1} = \sqrt{2x-1}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2-4x-m = 0$ có hai

$$\text{nghiệm phân biệt thỏa } x_2 > x_1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 1 \\ \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+m > 0 \\ 4 > 0 \\ x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+m > 0 \\ -m - \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m \leq -\frac{7}{4}.$$

Câu 85. Cho phương trình: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + 2\sqrt{4-x^2} + m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 4.

B. 5.

C. vô số.

D. 10.

Lời giải**Chọn B**

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2-x)(2+x)} \geq 4 \Rightarrow t \geq 2$$

$$\text{Lại có: } \left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}\right)^2 \leq (2-x+2+x)(1^2+1^2) \Rightarrow t \leq 2\sqrt{2}$$

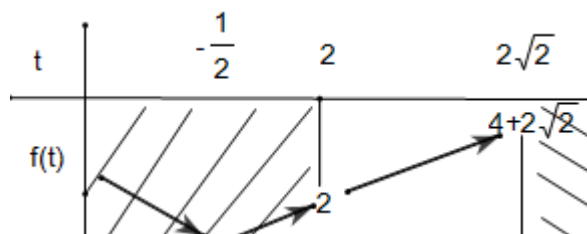
Khi đó phương trình đã cho chuyển về: $t + t^2 - 4 + m = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 4 = -m(1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm m để phương trình (1) có nghiệm $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $f(t) = t^2 + t - 4$ cắt đường thẳng $y = -m$ trong đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$ (*)

Bảng biến thiên của $f(t) = t^2 + t - 4$ trên $[2; 2\sqrt{2}]$



Từ BBT ta có (*) $\Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4 + 2\sqrt{2}$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Câu 86. Tìm tất cả giá trị m để phương trình $3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ có nghiệm là

- A. $m < -\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3} < m \leq 1$. C. $-\frac{1}{3} \leq m < 1$. D. $-\frac{1}{3} < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x \geq 1$.

$$3\sqrt{x-1} - m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} - \frac{2\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$, ($0 \leq t < 1$), (vì $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ mà $0 < \frac{2}{x+1} \leq 1, \forall x \geq 1$ nên $0 \leq \frac{x-1}{x+1} < 1$)

Ta được $m = 3t^2 - 2t = f(t)$, ($0 \leq t < 1$)

$$f'(t) = 6t - 2, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{3}$	1	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	0		$-\frac{1}{3}$	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m < 1$.

Câu 87. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{m\sqrt{2018+x} + (m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}$ có đồ thị là (C_m) , (m là tham số). Số

giá trị của m để đồ thị (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [-2018; 2018] \setminus \{0\}, m \neq \pm 1$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng khi $f(-x) = f(x), \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{2018-x} + (m^2-2)\sqrt{2018+x}}{-(m^2-1)x} = \frac{m\sqrt{2018+x} + (m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow (2-m^2)\sqrt{2018+x} - m\sqrt{2018-x} = m\sqrt{2018+x} + (m^2-2)\sqrt{2018-x}, \forall x \in D \Leftrightarrow 2-m^2 = m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(l) \\ m = -2 \end{cases}. \text{ Vậy } m = -2.$$

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}} = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -1)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in [-1; +\infty)$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > -3$.

Với $x > -3$; phương trình $\frac{2(x-m)-x-m}{\sqrt{x+3}} = 0 \Leftrightarrow 2(x-m)-x-m=0 \Leftrightarrow x=3m$.

Để phương trình có nghiệm thì $3m > -3 \Leftrightarrow m > -1 \Leftrightarrow m \in (-1; +\infty)$.

Câu 89. Số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình:

$$x^2 + (2-m)x + 4 = 4\sqrt{x^3 + 4x}$$

có nghiệm là

A. 2020.

B. 2019.

C. 2018.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

ĐK: $x \geq 0$

Ta có $x^2 + (2-m)x + 4 = 4\sqrt{x^3 + 4x}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 + (2-m)x = 4\sqrt{(x^2 + 4)x} \quad (1)$$

Với $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$ phương trình (1) trở thành

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4}{x} + (2-m) = 4\sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}} \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x}}, t \geq 2$

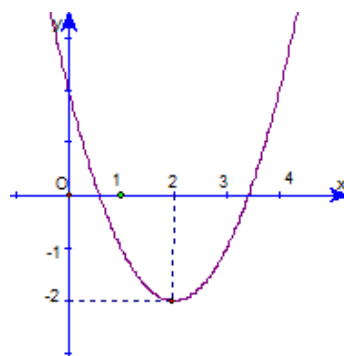
Phương trình (2) trở thành: $t^2 - 4t + 2 - m = 0$.

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 2 = m \quad (*)$$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2.

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm $y = t^2 - 4t + 2$ và đường thẳng $y = m$

Xét hàm số $y = t^2 - 4t + 2$ có đồ thị như hình vẽ



Dựa vào đồ thị hàm số, để phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 suy ra $m \geq -2$.

Suy ra số các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình có nghiệm là 2021.

Câu 90. Tìm m để phương trình $(\sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 1)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm

thuộc khoảng $(-1; 0)$, ta được điều kiện $m \notin [a; b]$. Giá trị của biểu thức $P = a^2 + 2b$ bằng

A. $P = 10$.

B. $P = 12$.

C. $P = 20$.

D. $P = 15$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = (\sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 1)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(-1) = -1 < 0, \quad f(0) = \sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 4.$$

Để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ thì

$$f(0) = \sqrt{5m^2 - 2m - 2} + m - 4 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 - 2m - 2} > 4 - m.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m < 0 \\ 5m^2 - 2m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leq 4 \\ 4m^2 + 6m - 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -3 \vee \frac{3}{2} < m \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -3 \vee m > \frac{3}{2}.$$

Do đó $m \notin \left[-3; \frac{3}{2}\right]$ hay $P = a^2 + 2b = 12$.

Câu 91. Cho phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} + 3\sqrt{(x-1)(5-x)} = m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình trên có nghiệm?

A. 6.

B. 8.

C. 7.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = [1; 5]$.

Đặt $u = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$, ta có $u^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)} \geq 4$; nên $u \geq 2$.

Ta lại có: $u^2 = (1\sqrt{x-1} + 1\sqrt{5-x})^2 \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} (1^2 + 1^2)(x-1 + 5-x) = 8$, nên $u \leq 2\sqrt{2}$.

Vậy với $x \in [1; 5]$ thì $u \in [2; 2\sqrt{2}]$.

$$\text{Mặt khác } u^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(5-x)} = \frac{u^2 - 4}{2}.$$

$$\text{Khi đó ta thu được phương trình: } u + \frac{3}{2}(u^2 - 4) = m \Leftrightarrow \frac{3}{2}u^2 + u - 6 = m.$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{3}{2}u^2 + u - 6$ trên đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

u	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(u)$			2	$6+2\sqrt{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có yêu cầu bài toán tương đương $2 \leq m \leq 6+2\sqrt{2}$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 92. Tìm m để phương trình $x + 2\sqrt{x+1} + m = 0$ vô nghiệm

- A. $m \in (2; +\infty)$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 1]$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$ ta có phương trình $t^2 + 2t - 1 = -m$ (2). Phương trình ban đầu vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) không có nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Lập BBT cho hàm số $f(t) = t^2 + 2t - 1$ với $t \in [0; +\infty)$ ta có kết luận $-m < -1 \Leftrightarrow m > 1$ là các giá trị cần tìm. Suy ra đáp án **B**.

Câu 93. Phương trình $\sqrt{2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2} = 2x - 1$ có hai nghiệm phân biệt thì $m \in (a, b)$. Tính $b - a$.

- A. 1. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn C

Phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt tương đương với phương trình

$2x^2 - (2m^2 + 1)x + m^2 = (2x - 1)^2$ (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1/2; +\infty)$.

Mà (1) $\Leftrightarrow 2x^2 + (2m^2 - 3)x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = 1 - m^2 \end{cases}$. Như vậy ta cần

$$1 - m^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Suy ra đáp án **C**.

Câu 94. Phương trình $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = m$ có vô số nghiệm thì giá trị của m thuộc khoảng nào?

- A. $m \in (1; 3)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (3; 5)$. D. $m \in (4; 6)$.

Lời giải:

Chọn A.

TXĐ: $[1; +\infty)$

$$\text{Phương trình ban đầu} \Leftrightarrow \left| \sqrt{x-1} - 1 \right| + \left| \sqrt{x-1} + 1 \right| = m \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-1} = m & (x \in [2; +\infty)) \\ 2 = m & (x \in [1; 2]) \end{cases}$$

Để phương trình có vô số nghiệm thì $m = 2$, suy ra chọn đáp án **A**.

Câu 95. Phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = m^2(x+1)$ có nghiệm thì $m \in [a; b] \setminus \{0\}$, tính giá trị của $a^2 + b$

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải:

Chọn C.

TXĐ: $[1; +\infty)$

$$\text{Phương trình ban đầu} \Leftrightarrow 2(x+1) = m^2(x+1)(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2 = m^2(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}) \end{cases} (1)$$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm $x \geq 1$.

Lại có (1) $\Leftrightarrow \frac{2}{m^2} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$ do $m = 0$ là cho phương trình vô nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{m^2}$ thuộc miền giá trị của hàm số $y = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1}$ với

$$x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \frac{2}{m^2} \geq 2 \Leftrightarrow m \in [-1; 1] \setminus \{0\}. \text{ Suy ra đáp án C.}$$

Câu 96. Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2+5x-2} - 2$ là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải:

Chọn C

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+5x-2} \Leftrightarrow x(x+5) = t^3 + 2$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t^2 - 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

$$\text{Với } t = -2: x^2 + 5x - 2 = -8 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Câu 97. Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-x-1} - \sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}} = 1$ là

A. $\frac{1}{2}$

B. -5

C. 5

D. 1

Lời giải:

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{3-\sqrt{x^2-x-1}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-1} = 3-t^2$. Phương trình đã cho trở thành

$$3-t^2-t=1 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1(tm) \\ t=-2(loai) \end{cases}$$

$$\text{Với } t=1: x^2-x-1=4 \Leftrightarrow x^2-x-5=0 \Rightarrow x_1.x_2=-5$$

Câu 98. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7$ là

A. 11

B. -1

C. -9

D. $\frac{25}{4}$

Lời giải:

Chọn A

$$2x^2+2x-\sqrt{x^2+x+2\sqrt{x^2+x-1}}=7 \Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{(\sqrt{x^2+x-1}+1)^2}=7$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-(\sqrt{x^2+x-1}+1)=7 \Leftrightarrow 2x^2+2x-\sqrt{x^2+x-1}-8=0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+2x=2(t^2+1)$. Phương trình trở thành

$$2t^2-t-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2(tm) \\ t=-\frac{3}{2}(loai) \end{cases}$$

$$\text{Với } t=2: x^2+x-1=4 \Leftrightarrow x^2+x-5=0 \Rightarrow \begin{cases} S=-1 \\ P=-5 \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2=S^2-2P=11$$

Câu 99. Nếu phương trình $x^2+2x+\sqrt{-x^2-2x+15}+m=0$ có nghiệm duy nhất thì

- A. $m \in (-2;0)$ B. $m=-4$ C. $m \in (-4;0)$ D. $m=-\frac{65}{4}$

Lời giải:

Chọn C

$$x^2+2x+\sqrt{-x^2-2x+15}+m=0 \Leftrightarrow -(x+5)(3-x)+\sqrt{(x+5)(3-x)}+m+15=0 \quad (1)$$

Nhận xét: Nếu a là nghiệm của (1) thì $-2-a$ cũng là nghiệm của (1). Để (1) có nghiệm duy nhất thì $a=-2-a \Leftrightarrow a=-1$. Thay $a=-1$ là nghiệm của (1) ta tính được $m=-3$.

Thử lại: Thay $m=-3$ vào phương trình và giải được nghiệm duy nhất $x=-1$.

Câu 100. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm (ẩn x)

$$2x^2-4x+m+\sqrt{-x^2+2x}=-1$$

- A. $-\frac{9}{8} \leq m \leq 0$ B. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$ C. $-1 \leq m$ D. $-\frac{9}{8} \leq m \leq -1$

Lời giải:

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x}=\sqrt{-(x-1)^2+1} \in [0;1]$. Bài toán trở thành: tìm m để phương

trình $2t^2-t-1=m$ có nghiệm $t \in [0;1]$. Lập bảng biến thiên của hàm số

$$f(t)=2t^2-t-1, t \in [0;1] \text{ ta tìm được tập giá trị của nó là } \left[-\frac{9}{8};0\right]$$

Câu 101. Cho phương trình $\sqrt{x^2(1-2x)}=\sqrt{x^2(m+x)}$. Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm duy nhất?

- A. $m < -\frac{1}{2}$. B. $m=1$. C. $\begin{cases} m=1 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$ D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn C

$$\sqrt{x^2(1-2x)}=\sqrt{x^2(m+x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1-2x) \geq 0 \\ x^2(1-2x)=x^2(m+x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ 1-2x \geq 0 \\ x^2(3x+m-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x=0 \\ x=-\frac{m-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{m-1}{3} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi } \begin{cases} -\frac{m-1}{3}=0 \\ x=-\frac{m-1}{3} > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 102. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3-2x-x^2}$ là:

A. 1.**B. 3.****C. 0.****D. 2.****Lời giải:****Chọn A**

$$\sqrt{3-x^2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3-2x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 3-x^2 + \sqrt{x+3} = 3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(x-1)(x+3) \geq 0 \\ \sqrt{x+3} = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \leq 0 \\ x+3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}.$$

Câu 103. Cho phương trình $4\sqrt{2x^2-3x+1} = \sqrt{9x^2+54x+81}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình?**A. $\frac{13}{23}$.****B. 5.****C. $\frac{102}{23}$.****D. $\frac{125}{23}$.****Lời giải:****Chọn C**

$$4\sqrt{2x^2-3x+1} = \sqrt{9x^2+54x+81} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ 32x^2-48x+16 = 9x^2+54x+81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\ 23x^2-102x-65=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ x=5 \\ x=-\frac{13}{23} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-\frac{13}{23} \end{cases} \Rightarrow 5 + \left(-\frac{13}{23}\right) = \frac{102}{23}.$$

Câu 104. Biết phương trình $\sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2} = \sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2}$ có tập nghiệm S . Phát biểu nào là đúng trong các phát biểu sau?**A. $S \cap \left(0; \frac{1}{4}\right) = \emptyset$.****B. $S = \square$.****C. $S = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.****D. S có hai phần tử.****Lời giải:****Chọn A**

$$\sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2} = \sqrt{(x^2-3x)}\sqrt{2x^2-5x+2} \Leftrightarrow (x^2-3x)\sqrt{2x^2-5x+2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ \begin{cases} 2x^2-5x+2 > 0 \\ x^2-3x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \\ x \geq 3 \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Câu 105. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\sqrt{m-x^2} + \sqrt{2x+9} = \sqrt{x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m > -5$.

B. $m < -3$.

C. $m \in \square$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải:

Chọn D

$$\begin{aligned} \sqrt{m-x^2} + \sqrt{2x+9} = \sqrt{x-x^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-x^2 \geq 0 \\ m-x^2 + \sqrt{2x+9} = x-x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{2x+9} = x-m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq m \\ 2x+9 = (x-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 (*) \\ x \geq m (**) \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 9 = 0 (1) \end{cases}. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa điều kiện (*), (**)

$$(1): \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow m > -5.$$

Khi đó hai nghiệm thỏa (*), (**) khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} f(0) \geq 0; f(1) \geq 0; f(m) \geq 0 \\ 0 \leq \frac{S}{2} \leq 1; m \leq \frac{S}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 9; f(0) = m^2 - 9; f(1) = m^2 - 2m - 10; f(m) = -2m - 9.$$

$$\frac{S}{2} = m+1.$$

Giải hệ ta được hệ vô nghiệm.

Câu 106. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x} - \sqrt{17-x} = 2$ là:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện xác định: $-17 \leq x \leq 17$

$$\begin{aligned} \sqrt{17+x} - \sqrt{17-x} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{17+x} &= 2 + \sqrt{17-x} \\ \Leftrightarrow 17+x &= 4 + 4\sqrt{17-x} + 17-x \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{17-x} &= x-2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 = 64 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 8 \end{aligned}$$

Câu 107. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{17+x} + \sqrt{17-x} = 8$ là:

A. 5.

B. 2.

C. 128.

D. 256.

Lời giải:

Chọn C

Điều kiện xác định: $-17 \leq x \leq 17$

$$\sqrt{17+x} + \sqrt{17-x} = 8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{17+x} \cdot \sqrt{17-x} = 15$$

$$\Leftrightarrow 289 - x^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 8$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm là 128

Câu 108. Số nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x^2 + 16} = \frac{40}{\sqrt{x^2 + 16}}$ là:

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải:

Chọn C

$$x + \sqrt{x^2 + 16} = \frac{40}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \sqrt{x^2 + 16} + x^2 + 16 = 40$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 16} = 24 - x^2$$

$$\Rightarrow x^4 + 16x^2 = 576 - 48x^2 + x^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Thử lại ta có: $x = 3$ thỏa mãn còn $x = -3$ không thỏa mãn phương trình

Câu 109. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ là:

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Tập xác định: $D = [-1; 1]$. Đặt $x = \cos t$, ($t \in [0; \pi]$)

Phương trình trở thành: $4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t} \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$.

Phương trình này có 3 nghiệm thuộc $[0; \pi]$ là: $\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$. Do vậy pt đã cho có 3 nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x_2 = \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$x_3 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Tổng bình phương 3 nghiệm bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 110. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 1} - x = m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình có nghiệm:

A. $m \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

B. $m \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

C. $m \in [-2; 0) \cup [2; +\infty)$.

D. $m \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải:

Chọn B

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = m \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = m + x \Leftrightarrow \begin{cases} m + x \geq 0 \\ x^2 - 1 = (m + x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ 2mx = -m^2 - 1 \end{cases} \quad (2)$$

Với $m = 0$ phương trình (2) vô nghiệm.

Với $m \neq 0$, phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm thỏa mãn $x \geq -m$

$$\Leftrightarrow -\frac{m^2 + 1}{2m} \geq -m \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{2m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ -1 \leq m < 0 \end{cases}$$

Câu 111. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình vô nghiệm:

A. $m > 1$

B. $m \leq -1$.

C. $m > 3$.

D. $m \geq 2$

Lời giải:

Chọn A

$$\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x - m \geq 0 \\ 2x^2 + mx - 3 = (x - m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ f(x) = x^2 + 3mx - 3 - m^2 = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (*)$$

pt(1) vô nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) vô nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq x_2 < m$.

$$\Delta = 9m^2 + 4(3 + m^2) = 13m^2 + 12 \geq 12 \forall m,$$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 - m < 0 \\ x_2 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ (x_1 - m) + (x_2 - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - m^2 + 3m^2 + m^2 > 0 \\ -3m - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 3 \\ -5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Câu 112. Cho phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt:

A. $m \in [2; 6]$

B. $m \in [4; 6)$.

C. $m \in [2; 5)$.

D. $m \in [4; 5)$

Lời giải:

Chọn D

$$\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + m = (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) = x^2 - 4x - 1 + m = 0 \end{cases} \quad (2) \quad (*)$$

pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (*) có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt mãn $1 \leq x_1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 1 \geq 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 5 - m > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ -1 + m - 4 + 1 \geq 0 \\ 4 - 2 > 0 \forall m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < 5$$

Cách khác:

$$\sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \quad (1)$$

Ta có

$$pt(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + m = (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x - 1 = -m \end{cases} \quad (2) \quad (*)$$

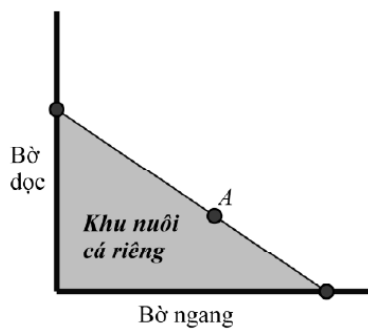
pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (*) có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt mãn $1 \leq x_1 < x_2$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x - 1$ trên $[1; +\infty)$ cắt đường thẳng $y = -m$ tại hai điểm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
y	$y(1) = -4$	$y(2) = -5$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: pt(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-5 < -m \leq -4 \Leftrightarrow 4 \leq m < 5$

Câu 113. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A. Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là $12m$.



A. $120m^2$.

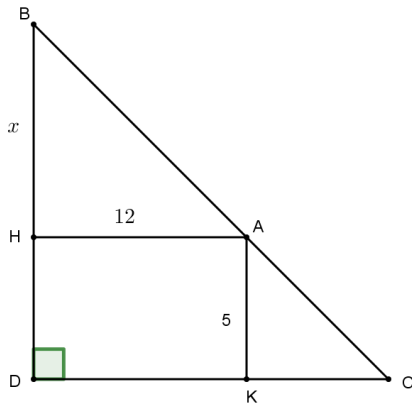
B. $156m^2$.

C. $238,008(3)m^2$.

D. $283,003(8)m^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K là hình chiếu của A trên bờ dọc và bờ ngang. Đặt $BH = x (x > 0)$.

Khi đó, $\frac{BH}{HD} = \frac{BA}{AC} = \frac{DK}{KC} \Rightarrow KC = \frac{HD \cdot DK}{BH} = \frac{60}{x}$.

Diện tích khu nuôi cá là:

$$S = \frac{1}{2} BD \cdot DC = \frac{1}{2} (x + 5) \left(\frac{60}{x} + 12 \right) = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} + 60 \text{ (bất đẳng thức Côsi)}$$

$\Rightarrow S \geq 120, S = 120$ khi $x = 5$. Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng là $120m^2$.