

PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa

Cho số thực $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một số với một vector gọi là phép nhân số với vector.

Ví dụ 1. Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC .

Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{CA} = k\vec{CB}$

b) $\vec{CA} = k\vec{AB}$

Giải

a) Ta có: $\vec{CA}, \vec{CB}$ là hai vector cùng hướng và $|\vec{CA}| = 2|\vec{CB}|$

Suy ra $\vec{CA} = 2\vec{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\vec{CA}, \vec{AB}$ là hai vector ngược hướng và $|\vec{CA}| = 2|\vec{AB}|$.

Suy ra $\vec{CA} = -2\vec{AB}$. Vậy $k = -2$.

Ví dụ 2. Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là $9m/s$ và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là $6m/s$. Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vector vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thoả mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

Giải

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướng nên

hai vector vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = -\frac{3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k = -\frac{3}{2}$.

II. Tính chất

Với hai vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k , ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Nhận xét: $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C . Chứng minh:

a) $2\vec{AB} + 2\vec{BC} = 2\vec{AC}$

b) $3(5\vec{AC}) + \vec{CB} - 14\vec{AC} = \vec{AB}$

Giải

a) Ta có: $2\vec{AB} + 2\vec{BC} = 2(\vec{AB} + \vec{BC}) = 2\vec{AC}$.

b) Ta có: $3(5\vec{AC}) + \vec{CB} - 14\vec{AC} = 15\vec{AC} + \vec{CB} - 14\vec{AC}$
 $= 1\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$.

III. Một số ứng dụng

1. Trung điểm đoạn thẳng

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ với điểm M bất kì.

2. Trọng tâm của tam giác

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$.

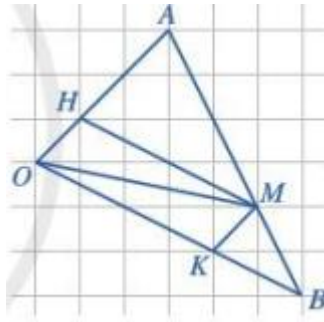
Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 2\vec{0} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vector cùng phương. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 5. Cho tam giác OAB . Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH \parallel OB, MK \parallel OA$



Giả sử $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giải

a) Ta có: $MK \parallel OA, MH \parallel OB$ suy ra

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}, \frac{OH}{OA} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH = \frac{1}{3}OA$ nên $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK = \frac{2}{3}OB$ nên $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}$.

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vector $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. DỰNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VEC – TƠ

Câu 1. Cho tam giác ABC cạnh a . Gọi điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC, CA . Dựng các vec – tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

d) $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

Lời giải.

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NM}$$

$$\Rightarrow \left| \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \right| = MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

b) Theo quy tắc trừ ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AM}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{MN} \right| = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

c) Gọi F là điểm đối xứng của A qua C, Điểm E là đỉnh của hình bình hành ABEF,

Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$$

Gọi I là hình chiếu của E lên AC.

Vì $AB \parallel EF \Rightarrow \angle EIF = \angle CAB = 60^\circ$

$$\sin \angle IFE = \frac{IE}{EF} \Rightarrow IE = EF \sin \angle IFE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \angle IFE = \frac{IE}{EF} \Rightarrow IE = EF \cos \angle IFE = a \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

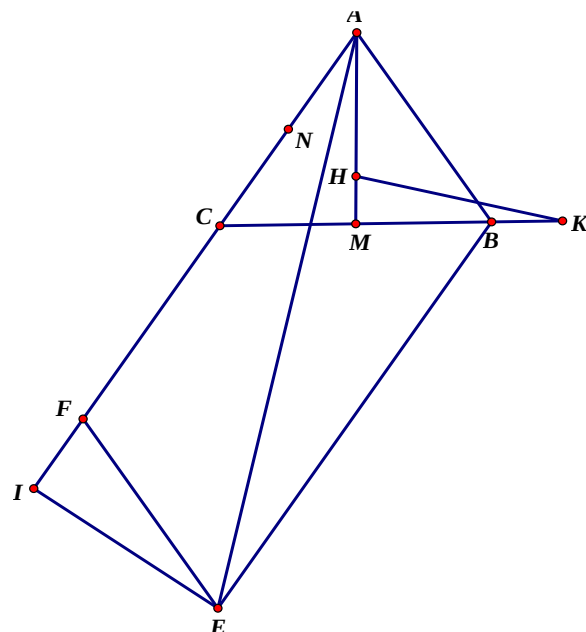
$$\text{Áp dụng định lí Pitago ta có: } AE = \sqrt{AI^2 + IE^2} = \sqrt{\left(2a + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{28}}{2}$$

$$\text{Suy ra } \left| \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AE = \frac{a\sqrt{28}}{2}$$

d) Lấy Lấy các điểm H, K sao cho $\frac{1}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH}; \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK}$.

$$\text{Suy ra } \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KH}$$

$$\text{Do đó } \left| \frac{1}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MB} \right| = KH = \sqrt{\left(\frac{AM}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}MB\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{8}$$



Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Điểm M là trung điểm BC. Dựng các véc-tơ sau và tính độ dài của chúng

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA}$. b) $\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{MB}$

Lời giải.

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}$ nên theo quy tắc ba điểm, ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CA}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{MA} \right| = CA = a$$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ,

$$\text{ta có } \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$$

Theo định lí Pitago ta có

$$MA = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } \left| \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right| = MA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và AQP N là hình bình hành.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}, 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A lên P N. Vì MN // AC nên $\angle ANL = \angle MNB = \angle CAB = 60^\circ$.

$$\text{Xét tam giác vuông ANL ta có } \sin \angle ANL = \frac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN \sin \angle ANL = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \angle ANL = \frac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN \cos \angle ANL = \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a}{4}$$

$$\text{Ta lại có } AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9a}{4}$$

$$\text{Tam giác ALP có } AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

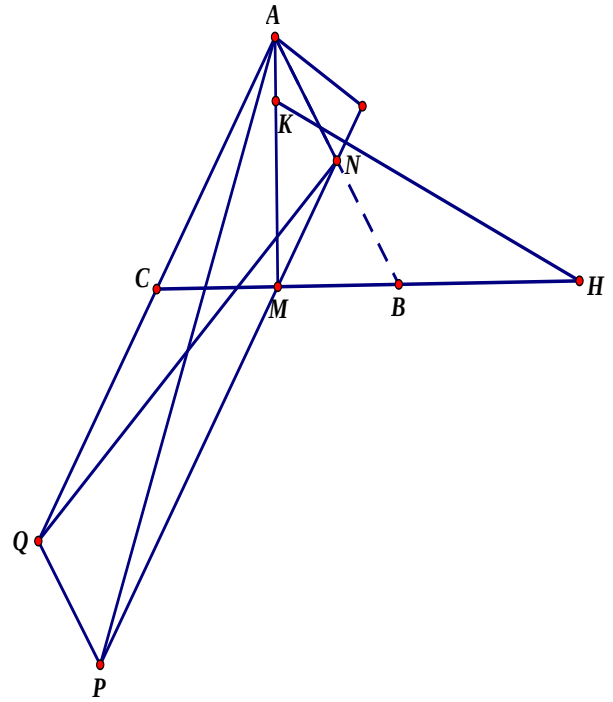
d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \frac{3}{4}MA$. Gọi H là điểm thuộc tia MB sao

cho $MH = \frac{5}{2}MB$.

$$\text{Khi đó } \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}; \frac{5}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}. \text{ Suy ra } \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HK}$$

$$\text{Ta có } MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}, MH = \frac{5}{2}MB = \frac{5a}{4}$$

$$\text{Tam giác MKH có } KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}.$$



$$\text{Vậy } \left| \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{MB} \right| = KH = \frac{a\sqrt{128}}{8}$$

Câu 3. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA=OB=a$. Đặt và tính độ dài các véc-tơ $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}$; $\frac{11}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải.

Vẽ điểm C, D sao cho $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OB}$, vẽ hình bình hành $CODE$ thì

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow \left| 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} \right| = OE = 5a$$

Vẽ điểm H, K sao cho $\overrightarrow{OH} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$ thì

$$\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KH} \text{ và } \left| \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} \right| = KH = \sqrt{\left(\frac{11}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{7}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6037}}{28}a$$

DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

Sử dụng các tính chất phép toán véc-tơ, ba quy tắc phép toán véc-tơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

Câu 4. Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC .

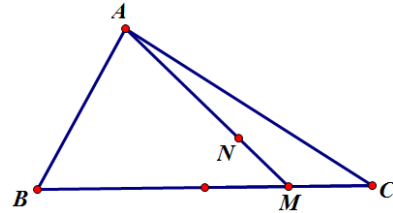
- a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$
 b) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC}; \overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải.

a) Theo giả thiết $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}.$$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{MN} &= -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}) \\ &= -\frac{1}{14}(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) - \frac{3}{14}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}.\end{aligned}$$

Câu 5. Cho $\triangle ABC$. Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

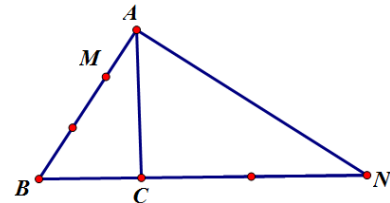
Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Câu 6. Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

- a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,
 $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.



Lời giải.

a) Vì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên M thuộc cạnh AB và $AM = \frac{1}{3}AB$.

Vì $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$ nên N thuộc tia BC và $CN = 2BC$.

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}.$$

$$\text{Và } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}.$$

Tương tự $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$.

Câu 7. Cho $\triangle ABC$. Gọi I, J là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng IJ qua trọng tâm G của tam giác $\triangle ABC$

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{IG} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\overrightarrow{IJ} = \frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$. Suy ra IJ qua trọng tâm G của tam giác $\triangle ABC$.

Câu 8. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm của CD . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Do hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Do E là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Câu 10. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$.

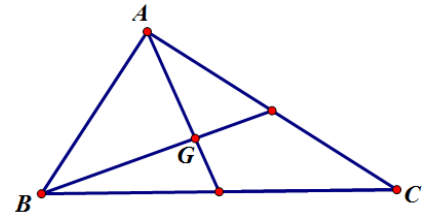
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \vec{b} - \vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.

Và $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \vec{a} - (-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b}$.

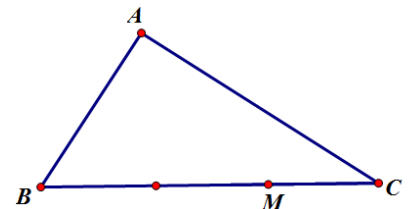


Câu 11. Cho $\triangle ABC$. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Câu 12. Cho $\triangle ABC$. Điểm M trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm MN . Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 13. Cho tam giác OAB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh OA, OB . Tìm các số m, n của mỗi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 0\overrightarrow{OB}$, nên $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$.

Và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, nên $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OB}$, nên $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1$.

Câu 14. Một đường thẳng cắt cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M . Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n .

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM}$ thì $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - m\overrightarrow{DA} = (x - m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$.

Và $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA} + (x - n)\overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x - m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x - n)\overrightarrow{DC}$.

Do $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên $\begin{cases} x - m = xy \\ x = y(x - n) = xy - yn \end{cases}$.

Giải hệ trên ta được $y = -\frac{m}{n}$ và $x = \frac{mn}{m + n}$.

Vậy $\overrightarrow{DM} = \frac{mn}{m + n}\overrightarrow{DB}$.

Câu 15. Điểm M được gọi là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (1 - k)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}$.

Vì $k \neq 1$ nên $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$.

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VEC-TƠ

Sử dụng kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng.

- Các tính chất phép toán vec-tơ

- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ.

- Tính chất trung điểm

o M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

o M là trung điểm đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ (với O là điểm tùy ý).

- Tính chất trọng tâm

o G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

o G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (với O là điểm tùy ý).

Câu 16. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh với điểm O bất kỳ ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BI} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Câu 17. Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

a) Tìm số k mà $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Vậy } k = \frac{3}{5}.$$

$$b) \quad 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}) + 3(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MI} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}.$$

Câu 18. Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

$$a) \quad \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}.$$

$$b) \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

$$c) \quad \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}.$$

Lời giải

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông. Nếu tam giác ABC không vuông, gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó:

BH // DC (vì cùng vuông góc với AC);

BD // CH (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra BDCH là hình bình hành, theo quy tắc hình bình hành thì

$$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}. \quad (1)$$

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}. \quad (2)$$

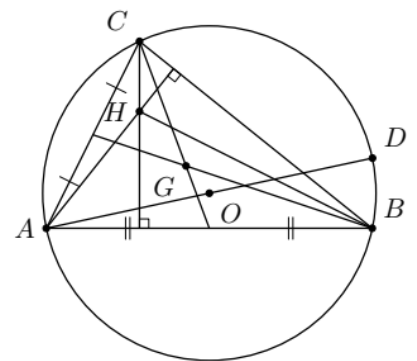
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{HO}.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} \text{ (đpcm).}$$



c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Suy ra $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH}) - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$ (đpcm).

Câu 19. Cho tam giác ABC . Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với M là trung điểm của BC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh

a) Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

b) Nếu $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm G .

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

b) Áp dụng câu a) ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{MG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Rightarrow M \equiv G$$

Câu 21. Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP . Chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Lời giải

Cách 1

Vì M, N, P là trung điểm 3 cạnh nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}\end{aligned}$$

Cách 2

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = -\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

Câu 22. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$. Chứng minh rằng các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

b) Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Vậy D là đỉnh của hình bình hành $BACD$, không phụ thuộc vào vị trí của M . Tương tự E và F lần lượt là các đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCE$ và $BCAF$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).$$

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$.

Câu 23. Cho tam giác ABC với cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$.

a) Gọi CM là đường phân giác trong của góc C . Hãy biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{CM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{AM}{BM} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$ suy ra $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{MB}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a}\overrightarrow{CB}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}.$$

b) Cách 1

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM . Bởi vậy theo câu a) ta có thể biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \frac{AC}{AC+AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AM}{AC+AM}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{b+\frac{bc}{a+b}} \cdot \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{bc}{a+b}}{b+\frac{bc}{a+b}}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC} = \frac{b}{a+b+c}(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}) + \frac{c}{a+b+c}(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}). \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \left(1 - \frac{b+c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{IA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Cách 2

$$\text{Ta có } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = \frac{-a}{c}\overrightarrow{IA} + \frac{-b}{c}\overrightarrow{IB}.$$

Qua đỉnh C , vẽ 2 đường thẳng song song với 2 phân giác AI, BI tạo thành hình bình hành $CA'IB'$. Sử dụng quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'}$ và dùng tính chất đường phân giác để suy ra kết quả.

Câu 24. Cho tam giác ABC đều, tâm O . Gọi M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC và D, E, F lần

lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải

Qua M dựng các đoạn $A_1B_2 // AB$; $B_1C_2 // BC$; $C_1A_2 // CA$ với $A_1, A_2 \in AC$; $B_1, B_2 \in BC$; $C_1, C_2 \in AB$.

Các tam giác $MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2$ là những tam giác đều và E, D, F là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 .

Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}) + (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2}) + (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MA_2}) + (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_2}) \right] = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \\
&= \frac{3}{2} \overrightarrow{MO} \quad (\text{Vì } O \text{ là trọng tâm của tam giác đều } ABC).
\end{aligned}$$

Câu 25. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ .

Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.

Lời giải

a) Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ (đpcm).

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$ (đpcm).

c) Theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

Do đó với mọi điểm M thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 26. Cho tứ giác $ABCD$. Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh

với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác

$ABCD$

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$$

Vậy G là trung điểm của đoạn MN

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2.2\overrightarrow{OG} = 4\overrightarrow{OG}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

a) Với điểm M bất kỳ ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

b) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$

Lời giải.

$$\text{a) Vì O là trung điểm của AC, BD nên } \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$$

$$\text{b) Vì ABCD là hình bình hành nên } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}$$

Câu 28. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Lời giải.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\text{Vậy } 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \text{ (vì M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD)}$$

Dạng 4. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc tơ

* Ta biến đổi đẳng thức véc – tơ về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một véc – tơ bằng véc – tơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn véc – tơ này chính là điểm M

* Ta biến đổi về đẳng thức véc – tơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Câu 29. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Vậy I là điểm thuộc đoạn AB mà } AI = \frac{3}{4}AB$$

Câu 30. Xác định các điểm I, J, K, L biết

$$\text{a) } \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \quad \text{b) } \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC} \quad \text{d) } 2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IB}$$

Vậy I là điểm đối xứng của A qua B

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{c) Ta có } \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{BK} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{d) Ta có } 2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{LA} - (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC}) = 4\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\text{nên } 2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{LA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Câu 31. Cho tam giác ABC

$$\text{a) Tìm điểm K sao cho } \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\text{b) Tìm điểm M sao cho } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Vậy K là trọng tâm của tam giác ABC

b) Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (I là trung điểm của AB)

Vậy M là trung điểm của BC

Câu 32. Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

Do đó

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}.$$

Suy ra M là trung điểm AI với I là trung điểm BC

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$$\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK} + 2\overrightarrow{NH} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NH} = \vec{0}$$

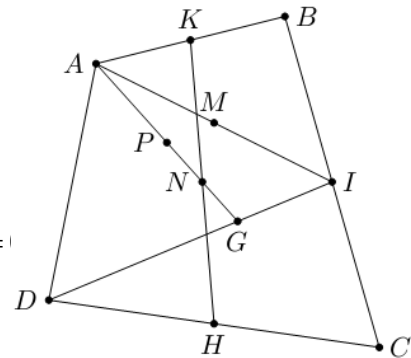
Vậy N là trung điểm của KH

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, khi đó ta có

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{PG}$$

$$\text{Suy ra } 3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} = \vec{0}$$

Vậy P là trung điểm AG



DẠNG 4. CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC VÉC – TỔ KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO ĐIỂM DI ĐỘNG

Câu 33. Cho tam giác ABC

a) Với M là điểm bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CK}$

Lời giải.

a) Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

$$= (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) + 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) - 3\overrightarrow{MC}$$

$$= \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} \text{ (không đổi vì A, B, C cố định)}$$

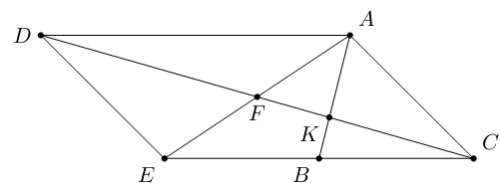
Do đó $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Gọi E là điểm đối xứng của C qua B, ta có $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CB}$

Với $\overrightarrow{CD} = \vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$ nên ACED là hình bình hành

Gọi F là trung điểm của AE, K là trọng tâm của $\triangle ACE$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CK}$$



Câu 34. Cho tam giác ABC cố định và điểm M di động. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) + 4(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) - 5\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB}$$

Vì A, B, C cố định nên $\vec{v}$ không đổi

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu 35. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Đặt điểm D sao cho $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CO}$$

(Với O là trung điểm của AB)

Vậy $\vec{v} = 2\overrightarrow{CO}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Vì $\overrightarrow{CD} = \vec{v} = 2\overrightarrow{CO}$ nên D là điểm đối xứng của C qua O

Câu 36. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu 37. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Chứng minh rằng $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow \vec{v} = -2\overrightarrow{OA}$$

Suy ra $\vec{v} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

DẠNG 5. CHỨNG MINH HAI ĐIỂM TRÙNG NHAU, HAI TAM GIÁC CÓ CÙNG TRỌNG TÂM

Để chứng minh hai điểm A_1, A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau

Cách 1. Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$

Cách 2. Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tùy ý

Để chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm ta làm như sau

Cách 1. Chứng minh G là trọng tâm $\triangle ABC$ trùng với G' là trọng tâm $\triangle A'B'C'$

Cách 2. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ (tức là có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$) ta đi chứng minh $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

Câu 38. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau
Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}; \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0} \text{ hay I trùng với J}$$

Câu 39. Cho tam giác ABC . Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C} + 2012\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$; $2011\overrightarrow{C'A} + 2012\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Ta có $2011\overrightarrow{A'B} + 2012\overrightarrow{A'C} = \vec{0} \Leftrightarrow 2011(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) + 2012(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4023\overrightarrow{A'A} + 2011\overrightarrow{AB} + 2012\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Tương tự ta có $4023\overrightarrow{B'B} + 2011\overrightarrow{BC} + 2012\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$$4023\overrightarrow{C'C} + 2011\overrightarrow{CA} + 2012\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

Cộng về với về lại ta được

$$4023(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Do đó G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$

Câu 40. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ lần lượt có trọng tâm là G, G' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra “Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ ”

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} \quad (1)$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \quad (3)$$

Cộng về với về ta được

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'}$$

Vì G, G' là trọng tâm của tam giác $ABC, A'B'C'$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0} \\ \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} = \vec{0} \end{cases}$

Từ đẳng thức trên ta thấy G trùng G' khi và chỉ khi $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ tức là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Câu 41. Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B , B' là điểm đối xứng với B qua C và C' là điểm đối xứng với C qua A . Chứng minh rằng các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}$

Vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Câu 42. Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\frac{AM}{AB} = k$ suy ra $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CA}$.

Cách 1. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$.

Suy ra $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{MG'} + \overrightarrow{NG'} + \overrightarrow{PG'} = \vec{0} \quad (*)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M} = k\overrightarrow{AB}$.

Tương tự $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N} = k\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M} = k\overrightarrow{BC}$.

Cộng vế theo vế từng đẳng thức trên ta được

$$(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P}) = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}).$$

Kết hợp với (*) ta được $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$ suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}\end{aligned}$$

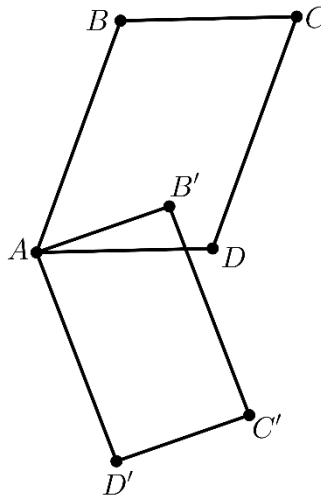
Ta có

$$\begin{aligned}&= k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} \\ &= k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Vậy hai tam giác ABC và NMP có cùng trọng tâm.

Câu 43. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A . Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}. \quad (1)$$

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) - \overrightarrow{AC'} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC'} \\ &= \vec{0} \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác $B'CD'$

Câu 44. Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm G . Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$. Chứng minh rằng G cùng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

Lời giải

Ta cần chứng minh

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} + \overrightarrow{GG_4} = \vec{0}. \quad (*)$$

Vì G_1 là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_1}.$$

Tương tự

$$\begin{cases} \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG_2} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GG_3} \\ \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GG_4}. \end{cases}$$

Do đó

$$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$

Câu 45. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA . Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ANP .

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}) + (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{AC} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Vậy G cũng là trọng tâm của tam giác CMQ .

Câu 46. Cho điểm G là trọng tâm tứ giác $ABCD$ và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC .

a. Chứng minh rằng G là điểm chung của các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' .

b. Điểm G chia các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' theo các tỉ số nào?

c. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

Lời giải

a. Vì G là trọng tâm tứ giác $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Mà A' là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA'}$

Do đó $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GA'}$ nên G, A và A' thẳng hàng

Chứng minh tương tự

$$\overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC} = -3\overrightarrow{GC'}, \overrightarrow{GD} = -3\overrightarrow{GD'}$$

Nên G, B, B' thẳng hàng; G, C, C' thẳng hàng; G, D, D' thẳng hàng.

Vậy G là điểm chung của bốn đoạn AA', BB', CC' và DD' .

b. Từ kết quả trên ta có điểm G chia các đoạn AA', BB', CC' và DD' theo tỉ số $k = -3$.

c. Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -3(\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'}) = \vec{0}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}.$$

Vậy G cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

Câu 47. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA . Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EA}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}) = \vec{0}.$$

Do đó hai tam giác MPR và NQS cùng trọng tâm.

DẠNG 6: THẲNG HÀNG, CỐ ĐỊNH, ĐỒNG QUI

- Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

- Hai đường thẳng AB và MN song song khi $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{MN}$ và điểm A không thuộc đường thẳng MN

Chú ý: Việc chọn cơ sở để biểu diễn là 2 véc-tơ cùng gốc và không cùng phương

Câu 48. Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A, B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho $\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1-\alpha) \overrightarrow{OB}$. Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB ?

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1-\alpha) \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \alpha (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \alpha (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow M \in d$$

Vì $\overrightarrow{BM} = \alpha \overrightarrow{BA}$ nên M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0 \leq \alpha \leq 1$

Câu 49. Cho tam giác ABC . Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J là điểm mà

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}.$$

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ b) Chứng minh B, I, J thẳng hàng

Lời giải

$$\text{a) } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3} \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \right) = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

Vậy $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BI}$. Suy ra ba điểm B, I, J thẳng hàng

Câu 50. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O .

a) Chứng minh tứ giác $HCDB$ là hình bình hành

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. Suy ra ba điểm O, H, G thẳng hàng (G là trọng tâm tam giác ABC)

Lời giải

a) Vì AD là đường kính của đường tròn tâm O nên $BD \perp AB$, $DC \perp AC$. Ta có:

$$\begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CH \parallel BD \\ BH \parallel DC \end{cases}$$

Vậy tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

b) Vì $HCDB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$

Do đó, $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$

Theo quy tắc ba điểm:

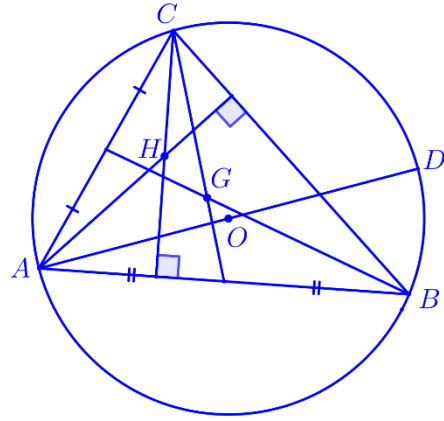
$$\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.



Câu 51. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải

Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\ &= \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \vec{u} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\ &= \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \end{aligned}$$

Và

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}) = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$$

$$\text{Do đó } 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \text{ nên } \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$$

Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 52. Cho tam giác ABC . Dựng $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$. Chứng minh các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$ nên tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow A \text{ là trung điểm của } B'C'$$

Vì tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành nên CC' chứa trung tuyến của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh C .

Tương tự với AA', BB' , do đó AA', BB', CC' đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC .

Câu 53. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA . Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua trung điểm I, K, J của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng

a) Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy

b) Đường thẳng MM_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M di động

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{KJ} \text{ và } \overrightarrow{B'A'} = 2\overrightarrow{KJ} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$$

Vậy $ABB'A'$ là hình bình hành, nên AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng. Tương tự, BB' và CC' cũng cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng.

b) Ta có $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MM_1}$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MG}$ (G là trọng tâm $\triangle ABC$) hay $\overrightarrow{MM_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$

Nên M, M_1, G thẳng hàng. Vậy đường thẳng MM_1 luôn đi qua điểm G cố định khi M di động.

Câu 54. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC, CA sao cho $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC} = p\overrightarrow{PA}$ (m, n, p đều khác 1). Chứng minh rằng:

a) M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (định lý Mê-nê-la-uyt)

b) AN, CM, BP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$ (định lý Xê-va)

Lời giải

a) Ta chọn gốc C . Theo giả thiết thì có

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m}; \quad \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{1-n}; \quad \overrightarrow{CP} = \frac{-p\overrightarrow{CA}}{1-p}.$$

Nên

$$\overrightarrow{CB} = (1-n)\overrightarrow{CN}; \quad \overrightarrow{CA} = \frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$$

Do đó

$$\overrightarrow{CM} = \frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP} - \frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}.$$

Điều kiện cần và đủ để ba điểm M, N, P thẳng hàng là

$$\frac{p-1}{p(1-m)} - \frac{m(1-n)}{1-m} = 1 \Leftrightarrow p-1-pm(1-n) = p(1-m) \Leftrightarrow mnp = 1.$$

b) Ta chuyển về điều kiện thẳng hàng ở trên và điều kiện cùng phương.

Câu 55. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

hay $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

nên $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$

Do đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

mà M không thuộc đường thẳng AC nên $MN \parallel AC$.

Câu 56. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP & NQ . Chứng minh $IJ \parallel AE$ & $IJ = \frac{1}{4}AE$.

Lời giải

Ta có: $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Do đó: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

Vậy: $IJ \parallel AE$ và $IJ = \frac{1}{4}AE$

Câu 57. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC lấy các điểm tương ứng $C_1; A_1; B_1$ sao cho $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \frac{1}{k}$. Trên các cạnh $A_1B_1; B_1C_1; C_1A_1$ của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm tương ứng $C_2; A_2; B_2$ sao cho $A_1C_2 : C_2B_1 = B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = k$. Chứng minh rằng: $A_2C_2 \parallel AC; C_2B_2 \parallel CB; B_2A_2 \parallel BA$.

Lời giải

Lấy điểm O bất kì làm gốc, đặt: $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$
 $\vec{OA_1} = \vec{a_1}, \vec{OB_1} = \vec{b_1}, \vec{OC_1} = \vec{c_1}$
 $\vec{OA_2} = \vec{a_2}, \vec{OB_2} = \vec{b_2}, \vec{OC_2} = \vec{c_2}$

Theo giả thiết, ta có ($k > 0$): $\vec{c_1} = \frac{\vec{b} + k\vec{a}}{1+k}, \vec{a_1} = \frac{\vec{c} + kb}{1+k}, \vec{b_1} = \frac{\vec{a} + kc}{1+k}$
 $\vec{a_2} = \frac{\vec{b_1} + kc_1}{1+k}, \vec{b_2} = \frac{\vec{c_1} + ka_1}{1+k}, \vec{c_2} = \frac{\vec{a_1} + kb_1}{1+k}$

Do đó:

$$\begin{aligned} \vec{A_2C_2} &= \vec{c_2} - \vec{a_2} = \frac{1}{1+k} (\vec{a_1} + kb_1) - \frac{1}{1+k} (\vec{b_1} + kc_1) \\ &= \frac{1}{k+1} (\vec{a_1} + (k-1)\vec{b_1} - k\vec{c_1}) \\ &= \frac{1}{(k+1)^2} (\vec{c} + kb + (k-1)\vec{a} + k(k-1)\vec{c} - kb - k^2\vec{a}) \\ &= \frac{1}{(k+1)^2} ((k^2 - k + 1)\vec{c} - (k^2 - k + 1)\vec{a}) \\ &= \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2} (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2} \vec{AC} \end{aligned}$$

Vì $k^2 - k + 1 > 0$ nên $A_2C_2 \parallel AC$.

Chứng minh tương tự ta được $C_2B_2 \parallel CB; B_2A_2 \parallel BA$.

Câu 58. Cho ba dây cung song song $AA_1; BB_1; CC_1$ của đường tròn (O) . Chứng minh rằng trục tâm của tam giác $ABC_1; BCA_1$ & CAB_1 nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Gọi $H_1; H_2; H_3$ lần lượt là trục tâm của ba tam giác $ABC_1; BCA_1; CAB_1$. Ta có:

$$\begin{aligned} \vec{OH_1} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC_1} \\ \vec{OH_2} &= \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA_1} \\ \vec{OH_3} &= \vec{OC} + \vec{OA} + \vec{OB_1} \end{aligned}$$

Suy ra $\vec{H_1H_2} = \vec{OH_2} - \vec{OH_1} = \vec{OC} - \vec{OC_1} + \vec{OA_1} - \vec{OA} = \vec{C_1C} + \vec{AA_1}$
 $\vec{H_1H_3} = \vec{OH_3} - \vec{OH_1} = \vec{OC} - \vec{OC_1} + \vec{OB_1} - \vec{OB} = \vec{C_1C} + \vec{BB_1}$

Vì các dây cung $AA_1; BB_1; CC_1$ song song với nhau nên ba vectơ $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ cùng phương. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{H_1H_2}; \overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương, hay ba điểm $H_1; H_2; H_3$ thẳng hàng.

DẠNG 7. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THOẢ MÃN ĐẲNG THỨC VEC TƠ.

Để tìm tập hợp điểm M thoả mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau:

- Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB .
- Nếu $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C , bán kính bằng $k|\overrightarrow{AB}|$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì:
 - + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in \mathbb{R}$.
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$.
 - + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}, B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC .

Câu 59. Cho điểm O cố định và hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= m\vec{u} + (1-m)\vec{v} \\ \hat{U} \quad \overrightarrow{OM} &= m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB} \\ \hat{U} \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} &= m(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \\ \hat{U} \quad \overrightarrow{BM} &= m\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng BC .

Câu 60. Cho hai điểm A, B . Tập hợp các điểm M sao cho

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. b) $|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{2MB}|$

Lời giải

a) Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \hat{U} \quad 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB} \hat{U} \quad \overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ (với I là trung điểm của AB).

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{2}$, với I là trung điểm AB .

b) Gọi K là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$; L là điểm thoả mãn $\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

Ta có: $|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{ML}$

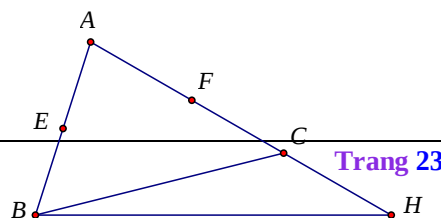
Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn KL .

Câu 61. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$, với k là số thực thay đổi khác 0.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, AC suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{ME}| = |2\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow ME = MF$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực EF .

a) Ta có

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HB} \text{ (với H}$$

là điểm thỏa mãn, $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$)

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} = 2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{HB}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB .

Câu 62. Cho tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm I thỏa $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm thỏa mãn $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Lời giải

a) Ta có $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$$

suy ra I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a), ta có

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI}$$

$$\text{và } \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \text{ nên } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \Leftrightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}.$$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Câu 63. Cho $\triangle ABC$. Tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|. \text{ b) } |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

Lời giải

a) Gọi K là điểm thỏa $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$, L là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có: } |2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{ML}|.$$

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn KL .

b) Với I là trung điểm BC . Gọi J là điểm thỏa $4\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Ta có:

$$|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |6\overrightarrow{MJ}| = |2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |6\overrightarrow{MJ}| = |2\overrightarrow{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính $R = \frac{1}{3}IA$.

Câu 64. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M trong mỗi trường hợp sau:

$$\text{a) } \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \text{ b) } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \text{ c) } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|.$$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow B \equiv A$ trái với giả thiết.

Vậy không có điểm M thỏa mãn.

b) Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC .

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}; \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Nên } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$$

Như vậy M cách đều 2 điểm cố định I, J nên tập hợp các điểm M thỏa điều kiện đề Câu là đường trung trực của IJ .

Câu 65. Cho tam giác ABC và ba vectơ cố định $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Với mỗi số thực t , ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}, \overrightarrow{BB'} = t\vec{v}, \overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ khi t thay đổi.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = t\vec{u} + t\vec{v} + t\vec{w} \\ &= t(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

Đặt $\vec{\alpha} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ thì vectơ $\vec{\alpha}$ xác định và $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}t\vec{\alpha}$

Suy ra nếu $\vec{\alpha} = \vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G , còn nếu $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vectơ $\vec{\alpha}$.

Câu 66. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

Lời giải

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC , ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}; \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OO'}$$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD & MN nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{OI}$

Do đó $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}$ Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO' .

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. DÙNG VÀ TÍNH ĐỘ DÀI VEC – TƠ

Câu 1. Khẳng định nào **sai**?

A. $1.\vec{a} = \vec{a}$

B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$

C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$

D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ)

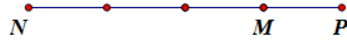
Câu 2. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



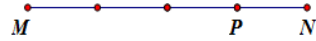
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3

B. Hình 4

C. Hình 1

D. Hình 2

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ ngược hướng với } \overrightarrow{MP} \text{ và } |\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MP}|.$$

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$

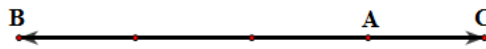
B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn D



Câu 4. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

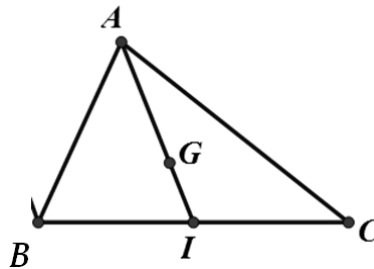
A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

B. $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$

C. $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$

D. $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

Lời giải



Chọn A

Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vector $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$

B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$

C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$

D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn B

Câu 6. Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O . Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$

B. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

C. $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$

D. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -4\vec{a} - 3\vec{a} = -7\vec{a}.$$

Câu 7. Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

A. $m = 3$

B. $m = -\frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{3}$

D. $m = -3$

Lời giải

Chọn B

Do $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng nên $m = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm của BC
B. M là trung điểm của IC
C. M là trung điểm của IA
D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Lời giải

Chọn B

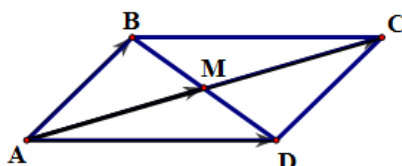
$$\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + 2\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MI} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } IC.$$

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}$. Khi đó điểm M là:

- A. Trung điểm của AC B. Điểm C
C. Trung điểm của AB D. Trung điểm của AD

Lời giải

Chọn A



Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

Câu 10. Cho đoạn thẳng AB . Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM = \frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{MA} = \frac{1}{3}\vec{MB}$ B. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ C. $\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BA}$ D. $\vec{MB} = -3\vec{MA}$

Câu 11. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\vec{AM} = \frac{1}{5}\vec{AB}$ B. $\vec{MA} = -\frac{1}{4}\vec{MB}$ C. $\vec{MB} = -4\vec{MA}$ D. $\vec{MB} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$

Lời giải

Chọn D



Ta thấy $\vec{MB}$ và $\vec{AB}$ cùng hướng nên $\vec{MB} = -\frac{4}{5}\vec{AB}$ là sai.

Câu 12. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

- A. $AB = AC$ B. $\exists k \neq 0: \vec{AB} = k\vec{AC}$ C. $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ D. $\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MC}, \forall$ điểm M

Lời giải

Chọn B

Câu 13. Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vector nào sau đây cùng phương?

- A. $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$ B. $\vec{a} - 2\vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$ C. $5\vec{a} + \vec{b}$, $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ D. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2.(5\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow 5\vec{a} + \vec{b}$ và $-10\vec{a} - 2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 14. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vector nào sau đây cùng phương?

- A. $-3\vec{a} + \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$ B. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $2\vec{a} + \vec{b}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - 2\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Câu 15. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vector nào sau đây là cùng phương?

- A. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ B. $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$
C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$ D. $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

Lời giải

Chọn D

Câu 16. Biết rằng hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

- A. -7 B. 7 C. 5 D. 6

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hai vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ cùng phương là: $\frac{x+1}{3} = \frac{4}{-2} \Leftrightarrow x = -7$.

Câu 17. Biết rằng hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vector $2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Lời giải

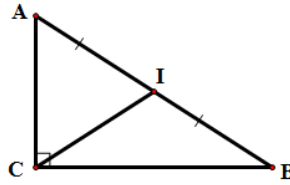
Chọn C

Câu 18. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC đều B. Tam giác ABC cân tại C
C. Tam giác ABC vuông tại C D. Tam giác ABC cân tại B

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AB . Ta có:

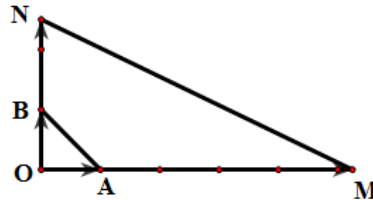
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = AB \\ \Leftrightarrow |2\overrightarrow{CI}| &= AB \Leftrightarrow 2CI = AB \Leftrightarrow CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } C. \end{aligned}$$

Câu 19. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

- A. $\frac{a\sqrt{140}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{321}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{520}}{4}$ D. $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

Lời giải

Chọn D



Dựng điểm M, N sao cho: $\overrightarrow{OM} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

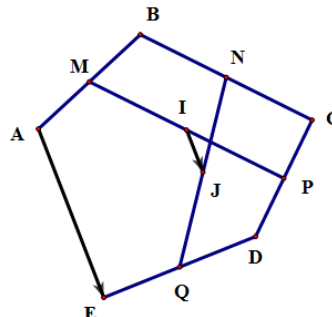
$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{541}}{4}.$$

Câu 20. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}), \overrightarrow{PN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

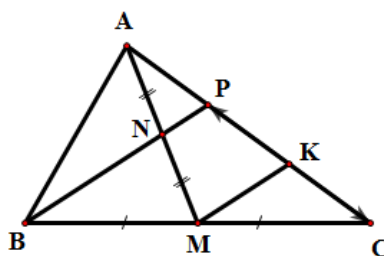
$$\text{Suy ra: } 2\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}.$$

Câu 21. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM . Đường thẳng BN cắt AC tại P . Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn C



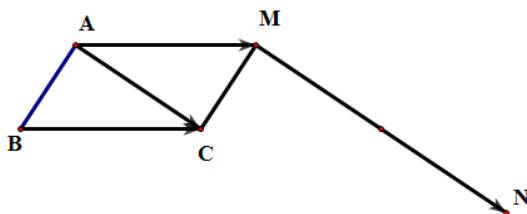
Kẻ $MK // BP$ ($K \in AC$). Do M là trung điểm của BC nên suy ra K là trung điểm của CP .
 Vì $MK // BP \Rightarrow MK // NP$ mà N là trung điểm của AM nên suy ra P là trung điểm của AK .
 Do đó: $AP = PK = KC$. Vậy $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CP} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. $MN \perp AC$ B. $MN // AC$
 C. M nằm trên đường thẳng AC D. Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M \notin AC$ (1)

Cộng vế theo vế hai đẳng thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, ta được:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{AC} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN // AC$.

Câu 23. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Tính độ dài vector $\vec{v} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$.

- A. $2a$ B. $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Lời giải

Biểu diễn vector $\vec{v}$ theo 2 vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

$$\text{Áp dụng Pitago ta có: } |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{11a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{6073}}{28}a.$$

Đáp án B.

Câu 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính độ dài vector: $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

- A. $|\vec{u}| = 4a\sqrt{2}$ B. $|\vec{u}| = a\sqrt{2}$ C. $|\vec{u}| = 3a\sqrt{2}$ D. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA} \Rightarrow |\vec{u}| = 2OA = AC = a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Đáp án B.

Câu 25. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Tính độ dài vector $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2,5\overrightarrow{OB}$

- A. $\frac{\sqrt{541}}{4}a$ B. $\frac{\sqrt{520}}{4}a$ C. $\frac{\sqrt{140}}{4}a$ D. $\frac{\sqrt{310}}{4}a$

Lời giải

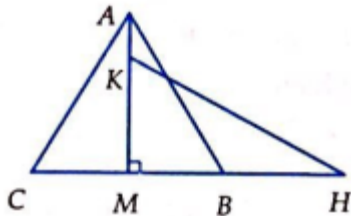
Đáp án A

$$\text{Áp dụng Pitago: } |\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2 + (2,5a)^2} = \frac{\sqrt{541}}{4}a$$

Câu 26. Cho tam giác đều ABC cạnh a điểm M là trung điểm của BC . Tính độ dài vector $\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$.

- A. $\frac{a\sqrt{127}}{4}$ B. $\frac{a\sqrt{127}}{8}$ C. $\frac{a\sqrt{127}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{127}}{2}$

Lời giải



Đáp án B

$$\text{Gọi } K \in AM : MK = \frac{3}{4}MA \quad H \in MB : MH = 2,5MB$$

$$\text{Do đó: } \left| \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} \right| = |\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH}| = |\overrightarrow{HK}|$$

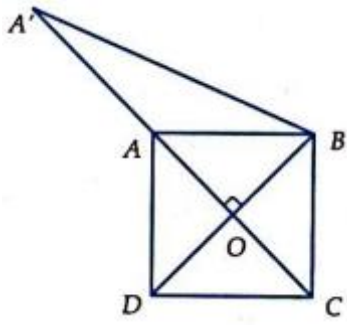
$$\text{Ta có: } MK = \frac{3}{4}AM = \frac{3\sqrt{3}a}{8}, MH = \frac{5a}{4} \Rightarrow KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Câu 27. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính độ dài vector $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

- A. $|\vec{u}| = a\sqrt{5}$ B. $|\vec{u}| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ C. $|\vec{u}| = 3a\sqrt{5}$ D. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{5}$

Lời giải

Đáp án A



$$\vec{u} = 4(\vec{MO} + \vec{OA}) - 3(\vec{MO} + \vec{OB}) + (\vec{MO} + \vec{OC}) - 2(\vec{MO} + \vec{OD}) = 3\vec{OA} - \vec{OB}$$

Trên OA lấy A' sao cho $OA' = 3OA \Rightarrow \vec{u} = \vec{OA'} - \vec{OB} \Rightarrow BA' = \sqrt{OB^2 + OA^2} = a\sqrt{5}$

Câu 28. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài vector $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x = \frac{4}{5}$

B. $x = \frac{5}{6}$

C. $x = \frac{6}{5}$

D. $x = \frac{5}{4}$

Lời giải

Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$

Kẻ $EF \perp BC, F \in BC \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{ME}| \geq EF$

Do đó: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC , Q là hình chiếu của B trên BC . Ta có $BP = \frac{3}{4}BE$

$$\triangle BPQ \sim \triangle BEF \Rightarrow \frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} \Rightarrow PQ$ là đường trung bình của $\triangle AHC \Rightarrow \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{HC} = \frac{5}{8}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC} \Rightarrow x = \frac{5}{6}.$$

Đáp án B.

Câu 29. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . M là trung điểm BC . Tính độ dài $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right|$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Gọi N là trung điểm của AB , Q là điểm đối xứng với A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A trên PN .

$$MN \parallel AC \Rightarrow \angle ANL = \angle MNB = \angle CAB = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông ANL có: $\sin \angle ANL = \frac{AL}{AN}$

$$\Rightarrow AL = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow NL = AN \cdot \cos ANL = \frac{a}{4} \Rightarrow PL = PN + NL = \frac{9a}{4}$$

$$\text{Xét tam giác vuông } APL \text{ có: } AP = \sqrt{AL^2 + PL^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}.$$

DẠNG 2. PHÂN TÍCH VÉC-TƠ

Câu 30. Cho AK và BM là hai trung tuyến của $\triangle ABC$. Hãy phân tích vector $\overrightarrow{AB}$ theo hai vector $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$ B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$ C. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$ D. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BM})$

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BM} \text{ (vì } KM = \frac{1}{2}AB)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$$

Cách 2: Giả sử có cặp số m, n sao cho $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AK} + n\overrightarrow{BM}$, với $G = AK \cap BM$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$$

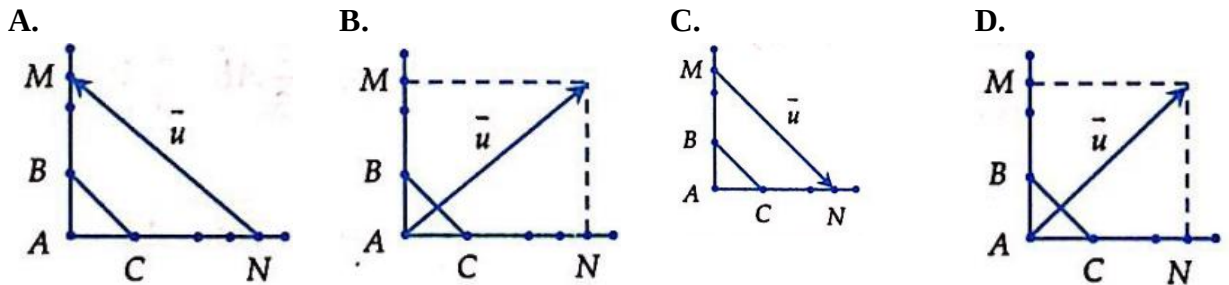
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{3}{2}m\overrightarrow{AG} - \frac{3}{2}n\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}m - 1\right)\overrightarrow{AG} = \left(-\frac{3}{2}n - 1\right)\overrightarrow{BG} \quad (*)$$

$$\text{Do } \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG} \text{ không cùng phương} \Rightarrow (*) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}m - 1 = 0 \\ -\frac{3}{2}n - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM}).$$

Đáp án A.

Câu 31. Cho $\triangle ABC$ vuông cân, $AB = AC$. Khi đó vector $\vec{u} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?



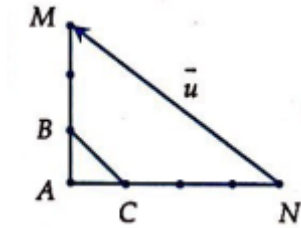
Lời giải

$$\text{Theo hình vẽ } \overrightarrow{AM} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \text{Chọn đáp án D.}$$

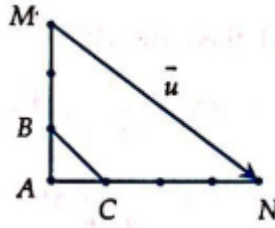
Đáp án D.

Câu 32. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , vector $\vec{u} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

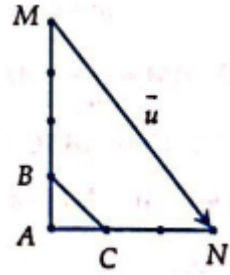
A.



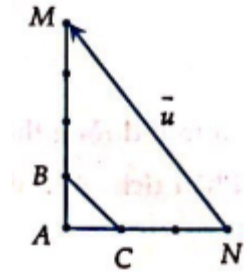
B.



C.



D.



Lời giải

Đáp án A

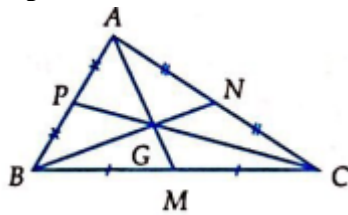
Câu 33. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Phân tích $\vec{AB}$ theo hai vector $\vec{BN}$ và $\vec{CP}$.

A. $\vec{AB} = \frac{4}{3}\vec{BN} - \frac{2}{3}\vec{CP}$ B. $\vec{AB} = -\frac{4}{3}\vec{BN} + \frac{2}{3}\vec{CP}$

C. $\vec{AB} = -\frac{4}{3}\vec{BN} - \frac{2}{3}\vec{CP}$ D. $\vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{BN} - \frac{4}{3}\vec{CP}$

Lời giải

Đáp án C



$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{AM} + \vec{MB} = 3\vec{GM} + (\vec{GB} - \vec{GM}) = 2\vec{GM} + \vec{GB} \\ &= \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GB} = 2\vec{GB} + \vec{GC} = -\frac{4}{3}\vec{BN} - \frac{2}{3}\vec{CP}\end{aligned}$$

Câu 34. Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên đường thẳng BC sao cho $\vec{MB} = k\vec{MC}$ ($k \neq 1$). Phân tích $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}, \vec{AC}$.

A. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + k\vec{AC}}{1-k}$ B. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} - k\vec{AC}}{1+k}$ C. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} - k\vec{AC}}{1-k}$ D. $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + k\vec{AC}}{1-k}$

Lời giải

Đáp án C

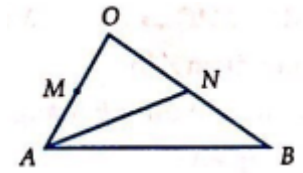
$$\vec{MB} = k\vec{MC} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AM} = k(\vec{AC} - \vec{AM}) \Leftrightarrow \vec{AM} = \frac{\vec{AB} - k\vec{AC}}{1-k}$$

Câu 35. Cho $\triangle OAB$ với M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Tìm số m, n thích hợp để $\vec{NA} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$.

A. $m = -1, n = \frac{1}{2}$ B. $m = 1, n = -\frac{1}{2}$ C. $m = 1, n = \frac{1}{2}$ D. $m = -1, n = -\frac{1}{2}$

Lời giải

Đáp án B



$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$ có E, N lần lượt là trung điểm của BC, AE . Tìm các số p và q sao cho $\overrightarrow{DN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$.

- A. $p = \frac{5}{4}; q = \frac{3}{4}$ B. $p = -\frac{4}{3}; q = \frac{2}{3}$ C. $p = -\frac{4}{3}; q = -\frac{2}{3}$ D. $p = \frac{5}{4}; q = -\frac{3}{4}$

Lời giải

Đáp án D

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

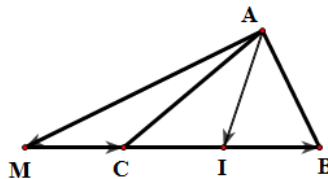
$$\text{Vậy } p = \frac{5}{4}, q = -\frac{3}{4}$$

Câu 37. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC . Khi đó C là trung điểm của MI . Ta có:

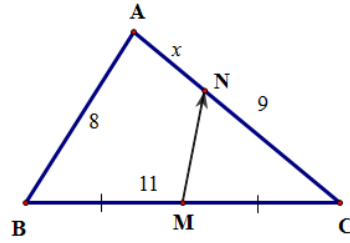
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 38. Cho tam giác ABC biết $AB = 8, AC = 9, BC = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN = x (0 < x < 9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
C. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{x}{9}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

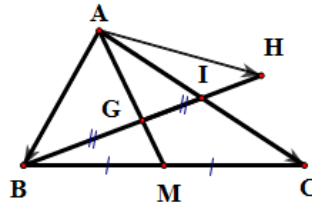
Câu 39. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AC .

Ta thấy $AHCG$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC}$$

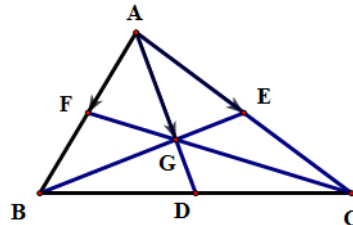
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Câu 40. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

Lời giải

Chọn D



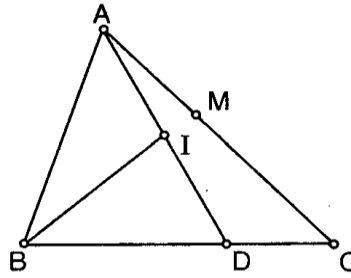
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AF} + 2\overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}.$$

Câu 41. Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của cạnh AD , M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vector $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vector $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

- A. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: I là trung điểm của cạnh AD nên

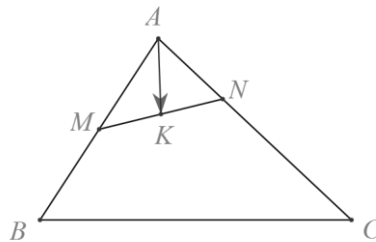
$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

Câu 42. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

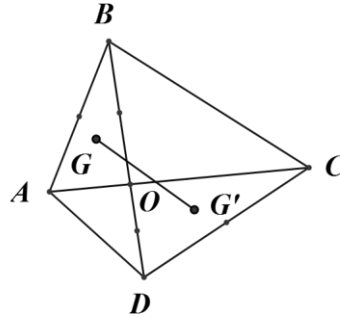
$$\text{Do đó } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 43. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. B. $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. C. $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. D. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Lời giải

Chọn D



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$. (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên: $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$ (2)

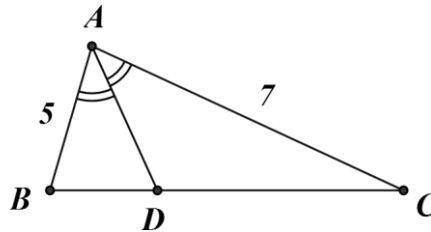
Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 44. Cho tam giác ABC với phân giác trong AD . Biết $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

- A. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. B. $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. C. $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. D. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C



Vì AD là phân giác trong của tam giác ABC nên:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{5}{7}\overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 45. Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB=4$, $BC=5$ và $CA=6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

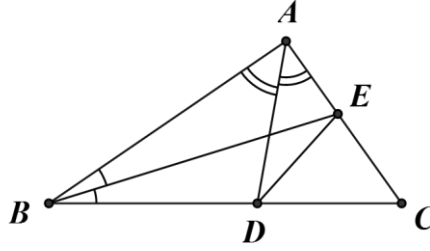
B. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$.

C. $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

D. $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A



AD là phân giác trong của tam giác ABC nên $\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{6}{6+4}$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{6}{10} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}.$$

Tương tự: $\frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA}.$

Vậy $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}.$

Câu 46. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm BC, CD . Biết $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{AL} = \vec{b}$. Biểu diễn $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$

A. $\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

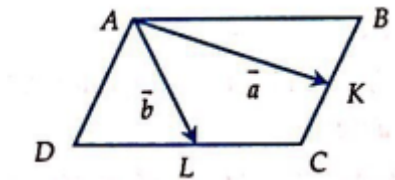
B. $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

C. $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

D. $\overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

Lời giải

Đáp án D



$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}) = 2\overrightarrow{BA} + 2\vec{a} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -2\vec{a}$$

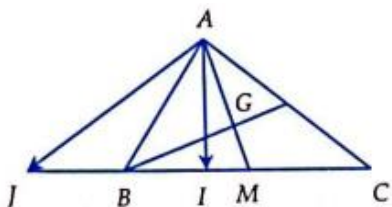
$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{LD} = 2(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BC} - 2\vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = -2\vec{b}$$

Từ đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -2\vec{a} \\ \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = -2\vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} \end{cases}$$

- Câu 47.** Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I là điểm trên BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$
- C. $\overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

Lời giải

Đáp án B



Gọi M là trung điểm BC :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Tương tự: } \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \\ \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \\ + \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$$

- Câu 48.** Cho $\triangle ABC$. Điểm M nằm trên đường thẳng BC sao cho $n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}$ ($n, m \neq 0$). Phân tích vector $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án D

$$n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow n(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Leftrightarrow (m+n)\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

- Câu 49.** Một đường thẳng cắt các cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M . Biết rằng $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m, n .

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

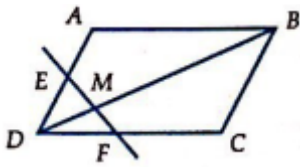
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m-n}\overrightarrow{DB}$

Lời giải

Đáp án A



Đặt $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$ nên

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - m\overrightarrow{DA} = (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$$

Ta có: $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x-n)\overrightarrow{DC}$

Do DA và DC không cùng phương nên:
$$\begin{cases} x-m=xy \\ x=y(x-n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m.n}{m+n} \\ y=-\frac{m}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n} \overrightarrow{DB}$$

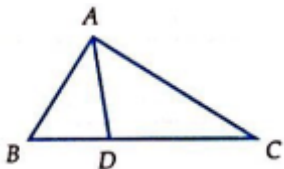
Câu 50. Cho $\triangle ABC$. Trên BC lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Khi đó phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án A



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Câu 51. Cho $\triangle ABC$. Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng.

A. $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MN}$

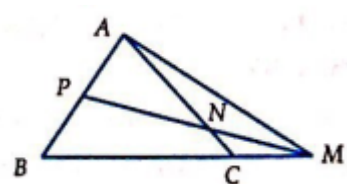
B. $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$

C. $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$

D. $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{MN}$

Lời giải

Đáp án C



$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Do đó

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng.

Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên cạnh AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}$. Xác định m để AI đi qua G .

A. $m = \frac{6}{11}$

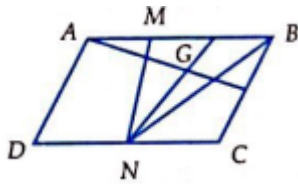
B. $m = \frac{11}{6}$

C. $m = \frac{6}{5}$

D. $m = \frac{18}{11}$

Lời giải

Đáp án A



Ta có: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BM}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$

Để AI đi qua G thì $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AG}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AG}$

$$\Rightarrow (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = k \cdot \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + k \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} 1-m = \frac{5k}{18} \\ m = \frac{k}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{11} \\ k = \frac{18}{11} \end{cases}$$

Câu 53. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AD . Xét các điểm M, N, P cho bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AD}$. Tìm m để M, N, P thẳng hàng.

A. $m = \frac{1}{6}$

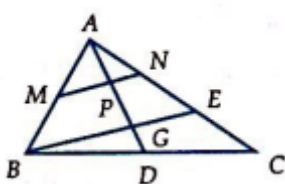
B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{4}$

D. $m = \frac{2}{3}$

Lời giải

Đáp án B



Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow MN \parallel BE \Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABE$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \text{ nên } M, N, P \text{ thẳng hàng} \Rightarrow P \text{ là trung điểm } AG. \text{ Vậy } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$$

Câu 54. Cho $\triangle ABC$. M và N là hai điểm xác định thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, N, B thẳng hàng?

A. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BN}$ B. $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BN}$ C. $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BN}$ D. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BN}$

Lời giải

Đáp án B

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM} + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \quad (1)$$

Theo bài ra:

$$\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{BN} + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BN}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \quad (2)$$

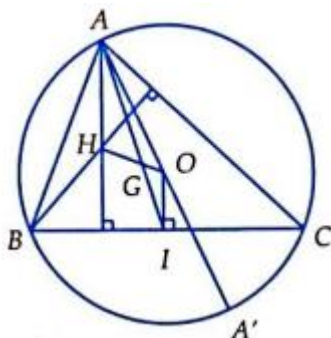
$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow 4\overrightarrow{BM} = 6\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BN}$$

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để H, O, G thẳng hàng?

A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2} \overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

Đáp án C



Lời giải chi tiết ở phần dạng toán 2.

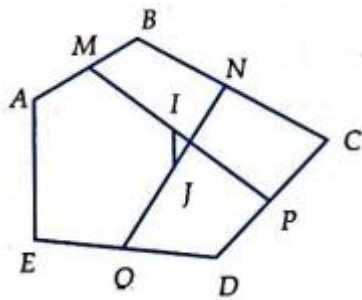
Nhận xét: Đường thẳng đi qua 3 điểm trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là đường $O - I$.

Câu 56. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn MP và NQ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IJ \parallel AE$?

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE}$ B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{4} \overrightarrow{AE}$ C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AE}$ D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$

Lời giải

Đáp án C



$$\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IJ}$$

Câu 57. Cho $\triangle ABC$. Các điểm I, J thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $IC \parallel BJ$?

- A. $\overrightarrow{CI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ B. $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{BJ}$ C. $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$ D. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

Lời giải

Đáp án C

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$$

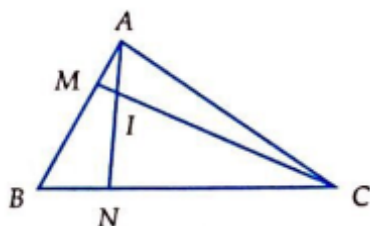
Câu 58. Cho $\triangle ABC$. Trên các cạnh AB, BC lấy các điểm M, N sao cho $AM = \frac{2}{5}MB$, $\frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$. Gọi I là

giao điểm của AN và CM . Tính tỉ số $\frac{AI}{AN}$ và $\frac{CI}{IM}$.

- A. $\frac{AI}{AN} = \frac{3}{7}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$ B. $\frac{AI}{AN} = \frac{4}{11}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{2}$
C. $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{4}$ D. $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$

Lời giải

Đáp án D



$$\text{Đặt } \overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CI} = y\overrightarrow{CM}$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AI} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3x}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{21x}{8}\overrightarrow{AM} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Vì } M, C, I \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{21x}{8} + \frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{8}{23}. \text{ Tương tự ta chưa tìm được } \frac{IC}{IM} = \frac{21}{2}$$

Câu 59. Cho $\triangle ABC$ và trung tuyến AM . Một đường thẳng song song với AB cắt các đoạn thẳng AM , AC và BC lần lượt tại D , E , và F . Một điểm G nằm trên cạnh AB sao cho FG song song với AC . Tính $\frac{ED}{GB}$.

A. $\frac{1}{2}$

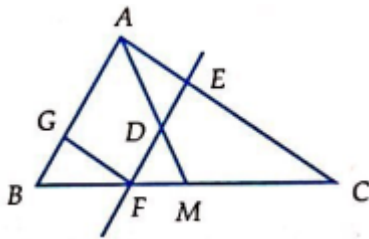
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. 1

Lời giải

Đáp án D



$$\text{Ta đặt: } \overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}. \text{ Khi đó } \overrightarrow{CM} = \frac{b}{2}\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$$

Vì E nằm ngoài AC nên có số k sao cho: $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CA} = k\vec{a}$ với $0 < k < 1$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{CB} = k\vec{b}.$$

Điểm D nằm trên AM và EF nên có số x này:

$$\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CA} + (1-x)\overrightarrow{CM} = y\overrightarrow{CE} + (1-y)\overrightarrow{CF}$$

$$\text{Hay } x\vec{a} + \frac{1-x}{2}\vec{b} = ky\vec{a} + k(1-y)\vec{b}$$

$$\text{Vì } \vec{a}, \vec{b} \text{ không cùng phương nên } x = ky \text{ và } \frac{1-x}{2} = k(1-y)$$

Suy ra $x = 2k - 1$ do đó

$$\overrightarrow{CD} = (2k-1)\vec{a} + (1-k)\vec{b}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow (1-k)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} \Rightarrow \frac{ED}{GB} = 1$$

Câu 60. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N . Biết $OA = 1, OB = 2, OC = 3, OD = 4$. Tính $\frac{CN}{ND}$.

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

Lời giải

Đáp án C

$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA} \text{ Vì } \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON} \text{ cùng phương} \Rightarrow \exists k \text{ sao cho}$$

$$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \text{ Đặt } \frac{CN}{ND} = k, k > 0$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{ON} = \frac{-3}{1+k} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{2k}{k+1} \overrightarrow{OB} \Rightarrow \frac{-6}{k(k+1)} = \frac{-4k}{k(k+1)} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Câu 61. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là các điểm nằm trên các cạnh AB và CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm của $\triangle BMN$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$ C. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG} \text{ mà } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Đáp án C.

Câu 62. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên tia đối của BC sao cho $5JB = 2JC$. Tính $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ B. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI})$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Ta lại có: } 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Đáp án A.

Câu 63. Cho tứ giác $ABCD$. Trên AB và CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$, $k \neq 1$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{MN} = (1+k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$ D. $\overrightarrow{MN} = -k\overrightarrow{AD} + (k+1)\overrightarrow{BC}$

Lời giải

$$\text{Với điểm } O \text{ bất kì: } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{ON} = (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (1-k)(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$$

Đáp án C.

Câu 64. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm AM và K là điểm trên AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm B, I, K thẳng hàng.

A. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

B. $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

C. $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI}$

D. $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow B, I, K \text{ thẳng hàng.}$$

Đáp án B.

Câu 65. Cho $\triangle ABC$, E là trung điểm BC , I là trung điểm của AB . Gọi D, I, J, K lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{IK} = m\overrightarrow{IJ}$. Tìm m để A, K, D thẳng hàng.

A. $m = \frac{5}{6}$

B. $m = \frac{1}{3}$

C. $m = \frac{1}{2}$

D. $m = \frac{2}{5}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A, K, D \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = n\overrightarrow{AK} = n(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IK}) \quad (1)$$

$$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= 3\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}) = \frac{9}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{IK} = m\overrightarrow{IJ} \text{ nên } 2\overrightarrow{AD} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{2m}\overrightarrow{IK} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{9}{4}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{4m}\overrightarrow{IK} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{3}{4m} \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Đáp án B.

Câu 66. Cho $\triangle ABC$. Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $MN \parallel AC$.

A. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$$

Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow ABCM$ là hình bình hành hay $M \notin AC$

$\Rightarrow MN // AC \Rightarrow$ Chọn đáp án **A.**

Đáp án A.

Câu 67. Cho $\triangle ABC$; M và N xác định bởi $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Trọng tâm $\triangle ABC$ là G . Gọi P là điểm trên cạnh AC sao cho $\frac{PA}{PC} = 4$. Các đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để M, G, N, P thẳng hàng.

A. $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

B. $5\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

C. $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{PQ} - 3\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

D. $3\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$ và $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$

Lời giải

+ Ta có: $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = 7\overrightarrow{GM}$

Tương tự: $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GB}) - 3(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{NG} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GN}$.

Vậy $7\overrightarrow{GM} = -2\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$

+ Gọi E là trung điểm $BC \Rightarrow 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AN}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ (1)

$\frac{PA}{PC} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{PC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{PA} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AP}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AP}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{PG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PN} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$.

Đáp án A.

Câu 68. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của $\triangle ADC$ và $\triangle ABC$. Đẳng thức nào là điều kiện cần và đủ để $IJ // AB$.

A. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm $DU\text{OC}$. Ta có: $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Đáp án A.

Câu 69. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB ; $N \in$ cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Gọi

O là giao điểm của CM và BN . Tính tỉ số $\frac{ON}{OB}$ và $\frac{OM}{OC}$ tương ứng.

A. $\frac{1}{9}$ và $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{6}$ và $\frac{1}{9}$

Lời giải

Giả sử: $\overrightarrow{ON} = n\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{CM}$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AM} - m\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - m(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$

Tương tự: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{AN} - n\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}(1-n)\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AB}$

Và $\overrightarrow{AO}$ chỉ biểu diễn duy nhất qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(1-m) = n \\ \frac{3}{4}(1-n) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{ON}{OB} = \frac{1}{9}; \frac{OM}{OC} = \frac{2}{3}.$$

Đáp án A.

Câu 70. Cho hình bình hành $ABCD$. M thuộc AC sao cho: $AM = kAC$. Trên cạnh AB, BC lấy các điểm P, Q sao cho $MP \parallel BC, MQ \parallel AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP . Tính tỉ số $\frac{AN}{AQ}$ và $\frac{CN}{CP}$ theo k .

A. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 + k + 1}$

B. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 - k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 - k + 1}$

C. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 + k - 1}$

D. $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1-k}{k^2 + k + 1}$

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AQ}; \overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CP}$

Ta có: $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ})$

$$= \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} + x\frac{BQ}{BC}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} - x\frac{BQ}{BC}\overrightarrow{DA}$$

Vì $MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{BQ}{BC} = \frac{AM}{AC} = k \Rightarrow \overrightarrow{DN} = (1-kx)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$ (1)

Mặt khác: $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} + y\frac{BP}{BA}\overrightarrow{BA}$

Vì: $MP \parallel BC \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{CM}{CA} = \frac{CM - AM}{CA} = 1 - k$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{DA} - y(1-k)\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{DA} + (1-ky-y)\overrightarrow{DC}$$
 (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} y = 1 - kx \\ x = 1 + ky - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{k^2 - k + 1} \\ y = \frac{1-k}{k^2 - k + 1} \end{cases}$

Đáp án B.

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉC-TƠ

Câu 71. Cho hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G và G' . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = 3\overrightarrow{GG'}$

B. $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$

C. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}$

D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

Lời giải

Đáp án D

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Câu 72. Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

Lời giải

Đáp án D

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}\end{aligned}$$

Câu 73. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M tùy ý. Chọn hệ thức đúng?

A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$ B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$

Lời giải

Đáp án C

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

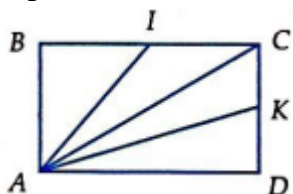
Câu 74. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$ D. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án D



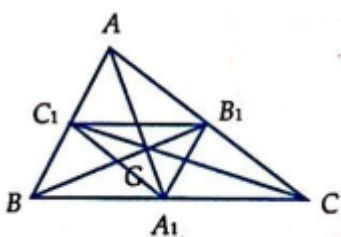
$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Câu 75. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chọn đẳng thức sai.

A. $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$ C. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC_1}$

Lời giải

Đáp án D



Câu 76. Cho $\triangle ABC$ với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp trọng tâm. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ B. $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$ C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (1)

Gọi I là trung điểm BC , A' đối xứng với A qua O .

Dễ thấy $HBA'C$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{HO}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} = 3\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

Đáp án C.

Câu 77. Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ D. $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Lời giải

$$+ \text{ B đúng vì } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$$

$$= 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$+ \text{ C đúng vì } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$+ \text{ D đúng vì } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

Đáp án A.

Câu 78. Cho $\triangle ABC$, M là một điểm trên cạnh BC . Khi đó đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{BM} = \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
C. $3\overrightarrow{CM} = \frac{MB}{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ D. $2\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

Lời giải

Kẻ $MN \parallel AC, N \in AB$.

$$\text{Áp dụng định lí Ta-lét ta có } \overrightarrow{AN} = \frac{AN}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad \overrightarrow{NM} = \frac{NM}{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Đáp án A.

Câu 79. Cho $\triangle ABC$, AM, BN, CP là các trung tuyến. D, E, F là trung điểm của AM, BN và CP . Với O là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ B. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$ D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OD} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OE} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OF} \quad (3)$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được đáp án **A.**

Đáp án A.

Câu 80. Cho tam giác ABC đều tâm O , M là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh lần lượt là D, E, F . Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MO}$

B. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{MO}$

D. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$

Lời giải

Qua M kẻ các đường thẳng $A_1B_1 // AB, A_2C_1 // AC, B_2C_2 // BC$

$\Rightarrow$ Các tam giác đều $\Delta MB_1C_1, \Delta MA_1C_2, \Delta MA_2B_2$

Ta có: $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}), \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2}), \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MA_2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}.$

Đáp án D.

Câu 81. Cho tứ giác $ABCD$. I, J lần lượt là trung điểm của AB và DC . G là trung điểm của IJ . Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$ (II) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IG}$ (III) $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JI}$

Mệnh đề sai là:

A. (I) và (II)

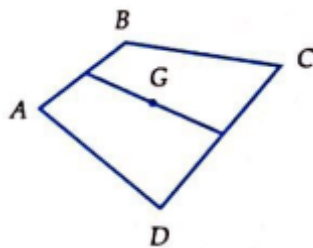
B. (II) và (III)

C. Chỉ (I)

D. Tất cả đều sai

Lời giải

Đáp án B



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD})$

$= 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{GJ} = 4\overrightarrow{AG}$

(II) và (III) sai vì G không phải là trung điểm của AC và BD .

Câu 82. Cho tứ giác $ABCD$, các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}$.

Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}$

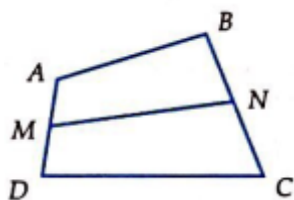
B. $\overrightarrow{AM} = \frac{n\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AB}}{m+n}$

C. $\overrightarrow{BN} = \frac{n\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{CD}}{m+n}$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{n\overrightarrow{CD} + m\overrightarrow{AD}}{m+n}$

Lời giải

Đáp án A



Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n\overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BN} \\ m\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{MD} + m\overrightarrow{DC} + m\overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow (m+n)\overrightarrow{MN}$$

$$= (n\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MD}) + (n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}) + (n\overrightarrow{BN} + m\overrightarrow{CN}) = \vec{0} + n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC} + \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}$$

Câu 83. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M bất kì trong tam giác. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

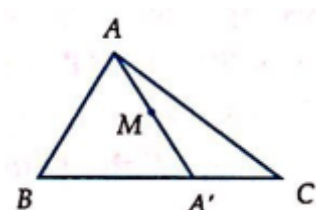
B. $S_a \cdot \overrightarrow{AB} + S_b \cdot \overrightarrow{BC} + S_c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

C. $S_a \cdot \overrightarrow{MC} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

D. $S_a \cdot \overrightarrow{AC} + S_b \cdot \overrightarrow{AB} + S_c \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Lời giải

Đáp án A



Gọi $A' = AM \cap BC$

Ta có $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC} \overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC} \overrightarrow{MC}$

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c} \Rightarrow \frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c}; \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_b + S_c}$$

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c} \overrightarrow{MC} (*) \text{ Mặt khác } \frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \frac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Ma'} = \frac{-S_a}{S_b + S_c} \overrightarrow{MA}, \text{ thay vào } (*) \text{ ta được: } -S_a \overrightarrow{MA} = S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Câu 84. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $a \cdot \overrightarrow{IM} + b \cdot \overrightarrow{IN} + c \cdot \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

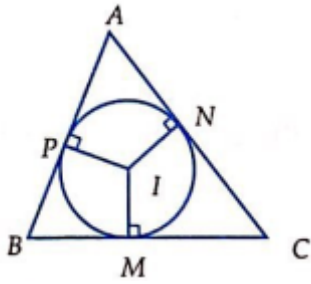
B. $a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{NB} + c \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

C. $a \cdot \overrightarrow{AM} + b \cdot \overrightarrow{BN} + c \cdot \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

D. $a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{BC} + c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Lời giải

Đáp án A



Gọi p là nửa chu vi $\triangle ABC$, ta có:

$$AP = AN = p - a$$

$$BM = BP = p - b$$

$$CN = CM = p - c$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IM} = \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} = (p-c)\overrightarrow{IB} + (p-b)\overrightarrow{IC} \quad (1)$$

Tương tự:

$$b\overrightarrow{IN} = (p-a)\overrightarrow{IC} + (p-c)\overrightarrow{IA} \quad (2), \quad c\overrightarrow{IP} = (p-b)\overrightarrow{IA} + (p-a)\overrightarrow{IB} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta được:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} \\ &= (2p-b-c)\overrightarrow{IA} + (2p-a-c)\overrightarrow{IB} + (2p-a-b)\overrightarrow{IC} = a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{aligned}$$

Nhận xét: Áp dụng kết quả nếu I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ thì

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

DẠNG 4. XÁC ĐỊNH ĐIỂM, TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN

Câu 85. Cho hai điểm A và B . Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

A. Điểm I ngoài đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$

B. Điểm I thuộc đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$

C. Điểm I là trung điểm đoạn AB

D. Điểm I nằm khác phía với B đối với A và $IB = \frac{1}{3}AB$.

Lời giải

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}.$$

Vậy I thuộc đoạn AB sao cho $IB = \frac{1}{3}AB$.

Đáp án B.

Câu 86. Cho đoạn thẳng AB . Hình nào sau đây biểu diễn điểm I sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

A.

B.

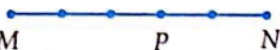
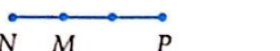
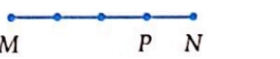
C.

D.

Lời giải

Đáp án B.

Câu 87. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Hình vẽ nào sau đây xác định đúng vị trí điểm M .

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Lời giải

Đáp án C

Ta có: $MN = 3MP$ và P, N khác đối với M

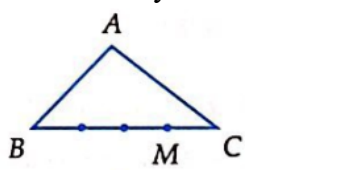
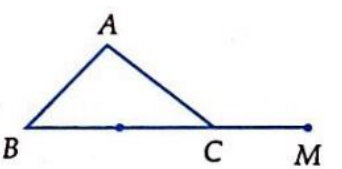
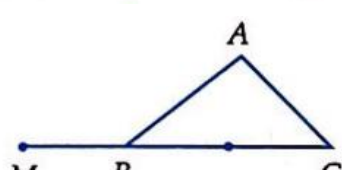
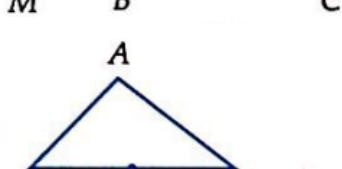
Câu 88. Cho đoạn thẳng AB và điểm M là một điểm trong đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k để $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

- A. $k = \frac{1}{4}$ B. $k = 4$ C. $k = -\frac{1}{4}$ D. $k = -4$

Lời giải

Đáp án C

Câu 89. Cho $\triangle ABC$. Trên đường thẳng BC lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Điểm M được vẽ đúng trong hình nào sau đây?

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

Lời giải

Đáp án B

Câu 90. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. Điểm M là trung điểm cạnh AC .
 B. Điểm M là trung điểm cạnh GC .
 C. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số 4.

D. Điểm M chia đoạn GC thỏa mãn $\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GM}\end{aligned}$$

Đáp án D.

Câu 91. Cho $\triangle ABC$, I là trung điểm của AC . Vị trí điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$ xác định bởi hệ thức:

A. $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$ B. $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$ C. $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ D. $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NB} &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI} = -\overrightarrow{NB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}\end{aligned}$$

Đáp án C.

Câu 92. Cho 2 điểm A, B là hai số thực a, b sao cho $a + b \neq 0$. Xét các mệnh đề:

(I) Tồn tại duy nhất một điểm M thỏa mãn $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

(II) $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

(III) M là điểm nằm trên đường thẳng AB .

Trong các mệnh đề trên thì:

- A. (I) và (III) tương đương nhau B. (II) và (III) tương đương nhau
C. (I) và (II) tương đương nhau D. (I), (II), (III) tương đương nhau

Lời giải

$$a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

Do giả thiết M được xác định duy nhất trên đường thẳng AB .

Đáp án C.

Câu 93. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, AC = b, AB = c$. Nếu điểm I thỏa mãn hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ thì:

- A. Điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
B. Điểm I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.
C. Điểm I là trực tâm của $\triangle ABC$.
D. Điểm I là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Lời giải

Lấy A' sao cho $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ hay AA' là đường phân giác.

$$\text{Ta có: } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow I \text{ thuộc đoạn } AA' \text{ và } \frac{IA}{IA'} = \frac{b+c}{a} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{BA}{BA'}$$

$\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Đáp án B.

Câu 94. Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm I sao cho: $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$.

- A. Điểm I là trung điểm của cạnh AC

- B. Điểm C là trung điểm của cạnh IA
 C. Điểm C chia đoạn IA theo tỉ số -2
 D. Điểm I chia đoạn AC theo tỉ số 2

Lời giải

Đáp án C

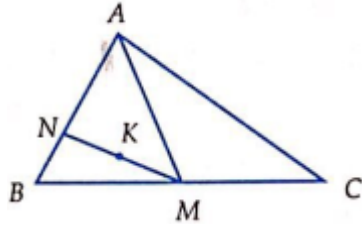
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} &= 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -2\overrightarrow{CA} \end{aligned}$$

Câu 95. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm AB và N trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Xác định điểm K sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

- A. Điểm K là trung điểm cạnh AM
 B. Điểm K là trung điểm cạnh BN
 C. Điểm K là trung điểm cạnh BC
 D. Điểm K là trung điểm cạnh MN

Lời giải

Đáp án D



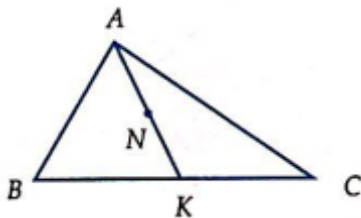
$$\begin{aligned} M \text{ là trung điểm } AB \text{ nên } \overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AM} + 6\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \Rightarrow K \text{ là trung điểm của } MN. \end{aligned}$$

Câu 96. Cho $\triangle ABC$. Tìm điểm N sao cho: $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

- A. N là trọng tâm $\triangle ABC$
 B. N là trung điểm của BC
 C. N là trung điểm của AK với K là trung điểm của BC
 D. N là đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận AB và AC làm 2 cạnh

Lời giải

Đáp án C



$$\text{Gọi } K \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NK}$$

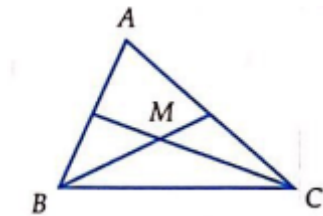
$$\text{Nên } 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NK} = \vec{0} \Rightarrow N \text{ là trung điểm } AK$$

Câu 97. Cho $\triangle ABC$. Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$.

- A. M là trung điểm cạnh AB
 B. M là trung điểm cạnh BC
 C. M chia đoạn AB theo tỉ số 2
 D. M là trọng tâm $\triangle ABC$

Lời giải

Đáp án D



$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow M \text{ là trọng tâm } \triangle ABC$$

Câu 98. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Khi đó điểm M thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

B. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$

C. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

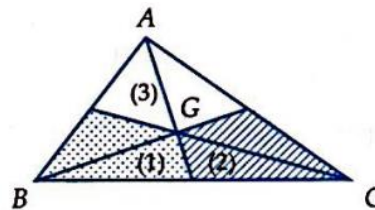
D. $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Lời giải

Đáp án A

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$$

Câu 99. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Nối điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ thì M ở vị trí nào trong hình vẽ:



A. Miền (1)

B. Miền (2)

C. Miền (3)

D. Ở ngoài $\triangle ABC$

Lời giải

Đáp án B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = -3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MC}$$

Hay M là trung điểm của GC

Câu 100. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM}$. Khi đó điểm M trùng với điểm:

A. O

B. I là trung điểm đoạn OA

C. I là trung điểm đoạn OC

D. C

Lời giải

Đáp án A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow M \equiv O$$

Câu 101. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Gọi điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nếu M là trọng tâm $\triangle ABC$ thì α, β thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

B. $\alpha.\beta = 1$

C. $\alpha - \beta = 0$

D. Cả A, B, C đều đúng

Lời giải

Đáp án D

Ta có M là trọng tâm thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

So sánh với $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC} \Rightarrow \alpha = -1; \beta = -1$

Câu 102. Cho $\triangle ABC$. Nếu điểm D thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$ với M tùy ý, thì D là đỉnh của hình bình hành:

A. $ABCD$

B. $ACBD$

C. $ABED$ với E là trung điểm của BC

D. $ACED$ với E là trung điểm của BC

Lời giải**Đáp án D**

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$$

Vậy D là đỉnh của hình bình hành $ACED$.

Câu 103. Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Tìm số $k \in \mathbb{Q}$ sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$.

A. $k = \frac{3}{4}$

B. $k = \frac{3}{5}$

C. $k = \frac{2}{5}$

D. $k = \frac{3}{2}$

Lời giải**Đáp án B**

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{3}{5}$$

Câu 104. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Tập hợp điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$ là:

A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

B. Đường tròn tâm G bán kính là 1.

C. Đường tròn tâm G bán kính là 2.

D. Đường tròn tâm G bán kính là 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow 3|\overrightarrow{MG}| = 6 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = 2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính là 2.

Đáp án C.

Câu 105. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . I là trung điểm của BC . Tập hợp điểm M sao cho:

$$2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \text{ là:}$$

A. đường trung trực của đoạn GI

B. đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

C. đường thẳng GI

D. đường trung trực của đoạn AI

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| = 3|2\overrightarrow{MI}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MI}| \Rightarrow \text{Tập hợp điểm } M \text{ là trung trực của } GI.$$

Đáp án A.

Câu 106. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là

A. một đoạn thẳng

B. một đường tròn

C. một điểm

D. tập hợp rỗng

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MJ} \text{ với } I, J \text{ là trung điểm của } AB, CD$$

$\Rightarrow$ Không có điểm M nào thỏa mãn.

Đáp án D.

Câu 107. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k, k > 0$ là:

A. đường tròn tâm O bán kính là $\frac{k}{4}$

B. đường tròn đi qua A, B, C, D

C. đường trung trực của AB

D. tập rỗng

Lời giải

Đáp án A

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MO}| = k \Leftrightarrow |\overrightarrow{MO}| = \frac{k}{4}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $\frac{k}{4}$

Câu 108. Cho $\triangle ABC$ trọng tâm G . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, AB, CA . Quỹ tích các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|$ là:

A. đường tròn tâm I bán kính $\frac{1}{2}JK$

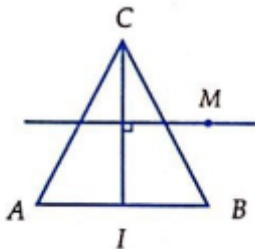
B. đường tròn tâm G bán kính $\frac{1}{3}IJ$

C. đường tròn tâm G bán kính $\frac{1}{3}CA$

D. trung trực AC

Lời giải

Đáp án B



Gọi I là trung điểm của AB thì

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow \text{Tập hợp điểm } M \text{ là trung trực của } IC$$

Câu 109. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, lúc đó:

A. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên đường thẳng AB

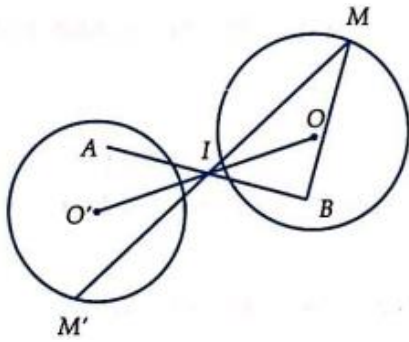
B. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên đường thẳng đối xứng với AB qua O

C. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên một đường tròn cố định

D. Khi M chạy trên $(O; R)$ thì M' chạy trên một đường tròn cố định bán kính R

Lời giải

Đáp án D



Gọi I là trung điểm AB

$\Rightarrow I$ là điểm cố định: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow I$ là trung điểm của MM'

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì O' cố định và $MOM'O'$ là hình bình hành

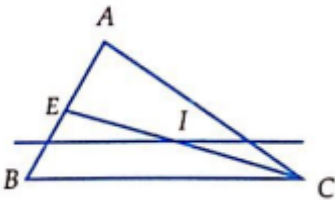
$\Rightarrow OM = OM' = R \Rightarrow M'$ nằm trên đường tròn cố định tâm O' bán kính R .

Câu 110. Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC}$ với $k \in \mathbb{R}$

A. là một đoạn thẳng B. là một đường thẳng C. là một đường tròn D. là một điểm

Lời giải

Đáp án B



Gọi E là trung điểm của AB , I là trung điểm của EC

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MI} \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{k}{4}\overrightarrow{BC}$$

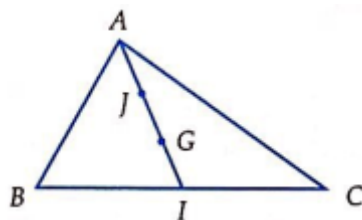
Do I, B, C cố định nên tập hợp điểm M là một đường thẳng đi qua I và song song với BC .

Câu 111. Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ là:

A. đường thẳng qua A B. đường thẳng qua B và C
C. đường tròn D. một điểm duy nhất

Lời giải

Đáp án C



$$\text{GT đã cho} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MA}| = |2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}|$$

$$\Leftrightarrow |3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MA})| = 2|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}| \quad (I \text{ là trung điểm } AB)$$

$$\Leftrightarrow 6|\overrightarrow{MJ}| = 2|\overrightarrow{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA \quad (G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC)$$

$$\Leftrightarrow JM = \frac{1}{2}AG \text{ (} J \text{ là trung điểm của } AG \text{)}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AG}{2}$

Câu 112. Tập hợp điểm M mà $k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $k \neq 1$ là:

- A. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ C B. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ B
C. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ A D. đường trung trực của AB

Lời giải

Đáp án A

$$k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 2k\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MI} \text{ (} I \text{ là trung điểm } AB \text{)}$$

$\Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng CI .

Câu 113. Cho $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn: $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$

- A. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{3}$
B. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{4}$
C. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{9}$
D. Quỹ tích điểm M là một đường tròn bán kính $\frac{AB}{2}$

Lời giải

Đáp án C

Vì A, B, C cố định nên ta chọn điểm I thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$$

$$\Rightarrow I \text{ duy nhất từ đó } 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow |9\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9}$$

Câu 114. Cho $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$, $k \in \mathbb{R}$.

- A. Tập hợp điểm M là đường trung trực của EF , với E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC
B. Tập hợp điểm M là đường thẳng qua A và song song với BC
C. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$
D. Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ thì tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB với E là trung điểm của AB

Lời giải

Đáp án D

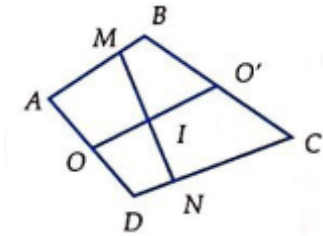
$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \\
&= \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \quad (\text{với } H \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}) \\
&= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{HB} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} = 2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{HB} \Rightarrow \text{Đáp án D}
\end{aligned}$$

Câu 115. Cho tứ giác $ABCD$ với K là số tùy ý. Lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

- A. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AC, BD
 B. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AD, BC
 C. Tập hợp điểm I là đường thẳng OO' với O và O' lần lượt là trung điểm của AB, DC
 D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Đáp án B



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm AD và BC , ta có: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}$

$$\text{và } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OO'}$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm } MN \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{DC}) = k\overrightarrow{OO'}$$

Vậy tập hợp điểm I là đường thẳng OO'

Câu 116. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$ nhận giá trị nhỏ nhất.

- A. Tập hợp điểm M là một đường thẳng
 B. Tập hợp điểm M là một đoạn thẳng
 C. Tập hợp điểm M là một đường tròn
 D. Là một điểm

Lời giải

Đáp án B

Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle DEF$.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = 3|\overrightarrow{MP}| + 3|\overrightarrow{MQ}| \geq 3(MP + MQ) \geq 3PQ$$

Dấu "=" xảy ra khi M thuộc đoạn PQ . Vậy tập hợp điểm M là đoạn thẳng PQ .

Câu 117. Tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức: $2\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k \in \mathbb{R}$ là:

- A. đường thẳng
 B. đường tròn
 C. đoạn thẳng
 D. một điểm

Lời giải

Đáp án A

$$\text{Từ giả thiết } \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC} (*)$$

Gọi I là điểm sao cho: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow IC = 2IA, I \in AC$

Từ (*): $2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{BC}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng qua I và song song với BC .

Câu 118. Cho $\triangle ABC$ và điểm M thỏa mãn đẳng thức: $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$.

Tập hợp điểm M là

- A. một đoạn thẳng B. nửa đường tròn C. một đường tròn D. một đường thẳng

Lời giải

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$

$$\Leftrightarrow |2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{AB}|$$

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EI}$

$$\Leftrightarrow |2(\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{ME})| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{2}$.

Đáp án C.

Câu 119. Tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức: $|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

- A. là một đường tròn có bán kính là $\frac{AB}{2}$ B. là một đường tròn có bán kính là $\frac{BC}{3}$

C. là một đường thẳng qua A và song song với BC

D. là một điểm

Lời giải

Chọn điểm I sao cho

$$3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AI} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) - 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AI} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 3\overrightarrow{MI}$$

$$\Rightarrow |3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 3MI = CB \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}CB$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{CB}{3}$.

Đáp án B.

Câu 120. Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức:

$$2\overrightarrow{MA} - (1+k)\overrightarrow{MB} - 3k\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k \text{ là giá trị thay đổi trên } \mathbb{R}.$$

A. Tập hợp điểm M là một đoạn thẳng.

B. Tập hợp điểm M là một đường tròn.

C. Tập hợp điểm M là một đường thẳng.

D. Tập hợp điểm M là một nửa đường tròn.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết } \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) (*)$$

Gọi I, K là các điểm sao cho $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Thì I, K là các điểm cố định: $I \in AB: IB = 2IA; K \in BC: KB = 3KC$

$$\text{Từ (*)} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = 4k\overrightarrow{MK}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng.

Đáp án C.