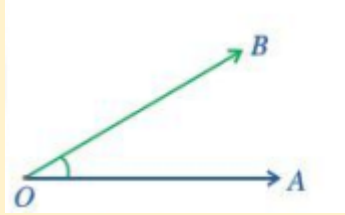


PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa

1. Tích vô hướng của hai vector có cùng điểm đầu

Cho hai vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng



- Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ là góc giữa hai tia OA, OB và được kí hiệu là $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ là một số, kí hiệu $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, được xác định bởi công thức:
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4\text{cm}$.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC .

b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Giải

a) $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$

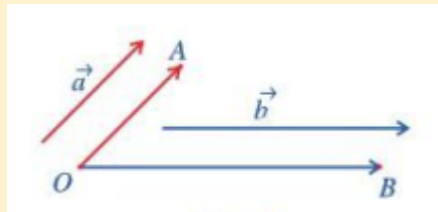
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos BAC = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$= 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos ABC = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$

2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O và vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$



- Góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$. Như vậy, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vectơ bất kì với vectơ $\vec{0}$ là số 0.

Chú ý

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$. Khi đó

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.

- Tích vô hướng của hai vectơ cùng hướng bằng tích hai độ dài của chúng.

- Tích vô hướng của hai vectơ ngược hướng bằng số đối của tích hai độ dài của chúng.

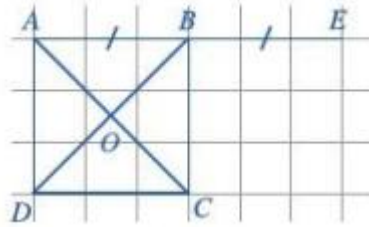
Ta có thể chứng minh chú ý thứ ba như sau:

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Do đó, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vì vậy,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Nếu một trong hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ và $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$ nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Chú ý thứ tư được chứng minh tương tự như trên.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

Giải.

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = BAO = 45^\circ$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

b) Vẽ vector $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = EBD = 135^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2. \end{aligned}$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = EBO = 135^\circ$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}.$$

II. Tính chất

Với hai vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và số thực k tùy ý, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Trong đó, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ và biểu thức này được gọi là bình phương vô hướng của vector $\vec{a}$.

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$.

Giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{0} = 0$$

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (-\overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2) \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Giải

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 90^\circ$$

$$= AB \cdot AC \cdot 0 = 0$$

III. Một số ứng dụng

1. Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

Ví dụ 5. (Định lí cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có;

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Giải

$$\text{Ta có: } \overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$\text{Suy ra: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

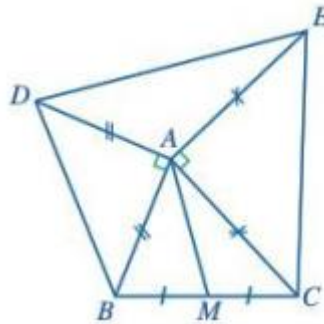
2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vector bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vector $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b .

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, A = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



a) Tính các tích vô hướng $\overline{AB} \cdot \overline{AE}, \overline{AC} \cdot \overline{AD}$;

b) Biểu diễn $\overline{AM}$ theo $\overline{AB}, \overline{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Giải

a) Do $BAE = BAC + CAE = 150^\circ, CAD = CAB + BAD = 150^\circ$ nên

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos BAE = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$= AC \cdot AD \cdot \cos CAD = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

b) Ta có:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}), \overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD}$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot (\overline{AE} - \overline{AD}) = \frac{1}{2}(\overline{AB} \cdot \overline{AE} + \overline{AC} \cdot \overline{AE} - \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \overline{AC} \cdot \overline{AD})$$

$$\text{Vì } AB \perp AD, AC \perp AE \text{ nên } \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0, \overline{AC} \cdot \overline{AE} = 0$$

$$\text{Suy ra } \overline{AM} \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \Rightarrow AM \perp DE$$

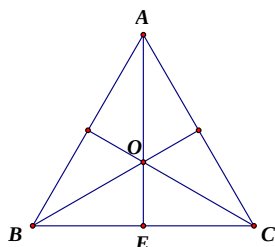
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ, TÍNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
- $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

Lời giải



$$a). \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$b). \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$= -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

$$c). \text{Gọi } E \text{ là trung điểm của } BC \text{ có } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB};$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CB} = 2|\overrightarrow{OE}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CB})$$

$$= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0.$$

d). Khai triển biểu thức, ta được

$$D = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

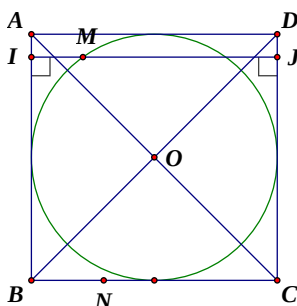
$$\text{Chú ý rằng: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Từ đó } D = a^2 + \frac{3a^2}{2} + a^2 - 3a^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải



a).

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -BA \cdot BC \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$$

$$\bullet (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= 0 + |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a^2$$

b).

$$\bullet \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BO}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (do } \overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0)$$

$$= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\bullet \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$$

c).

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})$$

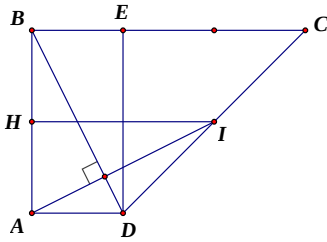
$$= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) = MH^2 - HA^2$$

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b). Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Lời giải



– Dựng $DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD}$

$$= -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2$$

$$- \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot |\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos DBE = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3 \cdot a^2$$

$$- \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2$$

(Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$).

b). Gọi H trung điểm của AB , suy ra HI là đường trung bình của hình thang $ABCD$, do đó

$$HI = \frac{AD + BC}{2} = 2a$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}).$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

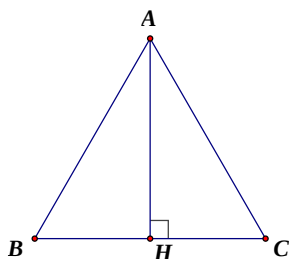
Vậy $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90° .

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.

b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Lời giải



a).

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos BAC = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$- \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \cdot AH \cdot \cos BAH = -a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3a^2}{4}$$

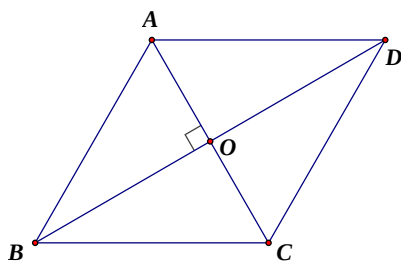
b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$= -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -2 \cdot \frac{a^2}{2} - 3 \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{13a^2}{4}$$

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $BAC = 60^\circ$. Tính:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

Lời giải



Do $BAC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều $\Rightarrow AC = 7, BO = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều $= \frac{\text{cạnh} \cdot \sqrt{3}}{2}$)

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 7 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{49}{2}$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB \cdot AO \cdot \cos 60^\circ = -7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{49}{4}$$

$$- \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \right)$$

$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = BA \cdot BO \cdot \cos ABO = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a^2}{4}$$

Câu 6. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4 - 12\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Câu 7. Cho các vector $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u}\vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \vec{u}^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4.1.1.\cos 60^\circ + 4.1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7}$$

$$\bullet \vec{v}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2.1.1\cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7}.1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 8. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$, $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Trước hết ta có: } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 36, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9, \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ = 6.3.\frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

Vậy:

$$\bullet \vec{a}(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} = 2.36 - 9\sqrt{2} = 72 - 9\sqrt{2}$$

$$\bullet (3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b}) = -6\vec{a}^2 + 12\vec{b}^2 + \vec{a}\vec{b} = -6.36 + 12.9 - 9\sqrt{2} = -108 - 9\sqrt{2}.$$

Câu 9. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $|2\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$- |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = \frac{|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 - \vec{a}^2 - 9\vec{b}^2}{6} = \frac{3^2 - 3^2 - 9.\sqrt{2}^2}{6} = -3$$

$$- |2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 4\vec{a}\vec{b} = 4.3^2 + \sqrt{2}^2 + 4.(-3) = 26 \Rightarrow |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{26}$$

Câu 10. Cho hai vector đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a}\vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \Rightarrow (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 3 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = \frac{3 - 4 - 1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Có } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

DẠNG 2. TÍNH ĐỘ DÀI CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3, BAC=60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính độ dài AM .

Lời giải

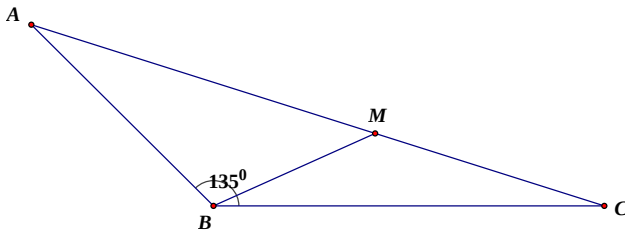
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 - 2.\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 - \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{9}.2^2 + \frac{4}{9}.3^2 - \frac{4}{9}.3 = \frac{28}{9} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB=a\sqrt{2}, BC=5a, ABC=135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC$

a). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

b). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính BM .

Lời giải



a). $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|\cos ABC = a\sqrt{2}.5a.\cos 135^\circ = -5a^2$

b). Do M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} (*)$. Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là hai vector không cùng

phương nên biểu thức (*) duy nhất $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)^2 \Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + 2.\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}.\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}.2a^2 + \frac{9}{25}.25a^2 + \frac{12}{25}(-5a^2) = \frac{173}{25}a^2$

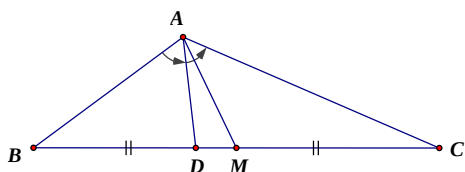
$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{173}}{5}$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3, BAC=120^\circ$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC . Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD .

Lời giải



a). Có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \right]^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2 + 2 \cdot (-3)) = \frac{7}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

b).

Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DB = \frac{2}{3}DC$, do $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ là hai vectơ

ngược hướng nên có $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \right)^2 \Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25}AB^2 + \frac{4}{25}AC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25} \cdot 2^2 + \frac{4}{25} \cdot 3^2 + \frac{12}{25} \cdot (-3)$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{36}{25}$$

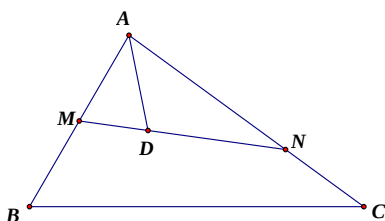
$$\Leftrightarrow AD = \frac{6}{5}.$$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB , N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$

a). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

Lời giải



$$\text{Do } AN = 2NC \Rightarrow AN = \frac{2}{3}AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\bullet \quad 2DM = DN \Rightarrow 2\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DN} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

b). Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Do đó $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(2a)^2 + (3a)^2 - (a\sqrt{7})^2}{2} = 3a^2$$

Theo câu a) thì $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{27}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}(2a)^2 + \frac{4}{9}(3a)^2 + \frac{4}{27} \cdot 3a^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{44}{9}a^2 \Rightarrow AD = \frac{2a\sqrt{11}}{3}$$

DẠNG 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG

Sử dụng định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Sử dụng quy tắc chen điểm, quy tắc công trừ các vector và một số quy tắc trung điểm, trọng tâm, tính chất hình bình hành...

Tính chất giao hoán và phân phối về tích vô hướng.

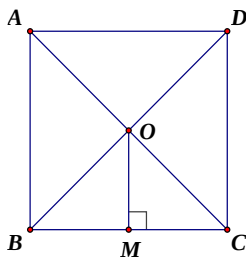
Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng, ta chú ý có thể chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD .

a). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

b). Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Lời giải



a).

$$\text{Do } ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = a.$$

$$\text{Theo định nghĩa có: } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \cdot AC \cdot \cos CAD = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$

b).

$$\bullet \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \cos BAC = \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

$$\bullet 2(OC^2 - OM^2) = 2MC^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

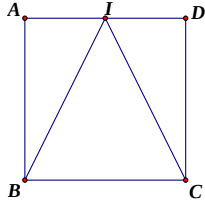
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Câu 16. Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

Lời giải



a).

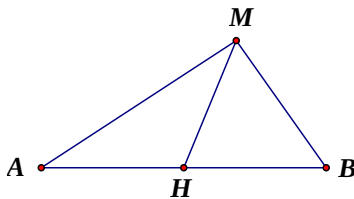
$$\begin{aligned} \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{4}(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})(2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}[(2\overrightarrow{BA})^2 - \overrightarrow{BC}^2] \\ &= \frac{1}{4}(4BA^2 - BC^2) = \frac{1}{4} \cdot 3AB^2 = \frac{9a^2}{4} \end{aligned}$$

b). Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \quad (\text{do } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad (\text{Do } \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0) \end{aligned}$$

Câu 17. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) \\ &= \overrightarrow{MH}^2 - \overrightarrow{HA}^2 = HM^2 - HA^2 \quad (\text{Do H trung điểm của AB nên có } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA}) \end{aligned}$$

Câu 18. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (\text{hệ thức Ô - le}).$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

$$= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})$$

$$= \vec{0}$$

Câu 19. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

b). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

Lời giải

a).

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (1)$$

b). $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$= AB^2 + AC^2 - 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \quad (2)$$

Chú ý: Các công thức (1) và (2) thường xuyên được sử dụng trong khi giải các bài tập khác. Đặc biệt, (2) được gọi là định lý hàm số cosin, trong chương sau ta sẽ đề cập nhiều đến định lý này.

Câu 20. Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC . Chứng minh:

a). $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

b). $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).

Lời giải

a). Ta có: $AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$

$$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 \quad (\text{I trung điểm của BC} \Rightarrow \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB})$$

$$= 2AI^2 + 2BI^2 = 2AI^2 + 2 \cdot \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad (\text{đpcm}).$$

b). $AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB} \cdot 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HI}$

$$= 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$$

Câu 21. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$

b). $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$

Lời giải

a). Cách 1:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2}{4} = \frac{(2\overrightarrow{AM})^2 - \overrightarrow{CB}^2}{4}$$

$$= \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{BC^2}{4}$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AI^2 - IB^2 = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$b). \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})]$$

$$= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2]$$

$$= \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \quad (\text{đpcm}).$$

Đây chính là công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, sẽ được đề cập nhiều ở phần sau.

Câu 22. Cho tam giác ABC, biết $AB = c, BC = a, AC = b$. Có trọng tâm G. Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{hệ thức Lep - nit}).$$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 = 0$$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) - (GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB})$$

$$- (GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}) - (GC^2 + GA^2 - 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})^2$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2$$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{đpcm})$$

Câu 23. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$$

Lời giải

Ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$$

$$= 3MG^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$$

Nhận xét:

a). Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.

b). Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì:

$$3(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ (Với } M \equiv O \text{)}.$$

Câu 24. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Lời giải

Theo tính chất trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$\Rightarrow 9\overrightarrow{MG}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + (MA^2 + MB^2 - AB^2) + (MB^2 + MC^2 - BC^2)$$

$$+ (MA^2 + MC^2 - AC^2)$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

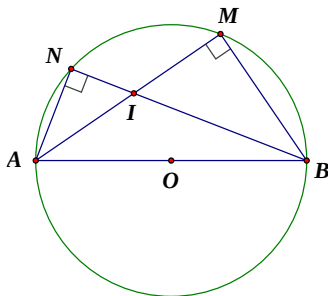
$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Câu 25. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

b). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$

Lời giải



Vì $BM \perp AI$ nên $\overrightarrow{AM}$ là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI. Vậy ta có:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$$

Chứng minh tương tự $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

b). Ta có: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB}$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2$$

Câu 26. Cho hình chữ nhật ABCD có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$

Lời giải

a). Vì AC là đường kính, ta có:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - R^2 \text{ (do } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} \text{)}$$

Tương tự: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$

Vậy $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

$$b). \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$$

Câu 27. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R .

a). Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O) .

b). Chứng minh với mọi điểm M :

$$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$

Lời giải

a). Vì tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác, do đó ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}_{\vec{0}}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + 3R^2$$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 \Leftrightarrow 3MO^2 + 3R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow MO^2 = R^2 \Leftrightarrow MO = R \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (O) .

$$\begin{aligned} b). MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 - 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2) + 2(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2) - 3(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2) \\ &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}) \\ &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{MC}) \\ &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Câu 28. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD . Chứng minh rằng

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

Lời giải

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2$$

$$\Leftrightarrow (AD^2 - AC^2) - (BD^2 - BC^2) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ (đúng).}$$

Câu 29. Cho tam giác ABC , biết $AB=c, BC=a, CA=b$, các đường trung tuyến tương ứng AA', BB', CC' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi M bất kì, ta có

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} VT &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA'}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 2(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG}) + \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'} \\ &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA'} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} \end{aligned}$$

Vì G là trọng tâm nên $2\overrightarrow{GA'} = -\overrightarrow{GA}$

$$\text{Vậy } VT = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_0\right) - \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$$

Mà:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA}^2 &= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right)^2 = \frac{4}{9}AA'^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9} \\ \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} &= \frac{GB^2 + GC^2 - BC^2}{2} = \frac{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9} - a^2}{2} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18} \\ \Rightarrow VT &= 3MG^2 - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9} + \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} \end{aligned}$$

Câu 30. Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$$

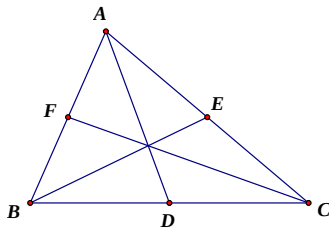
Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH})\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}[\overrightarrow{BH}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CH}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})] \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2 \end{aligned}$$

Câu 31. Cho tam giác ABC , có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} = 0$$

Lời giải



$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = \\
 & = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\
 & = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}) \\
 & = \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC})}_0 \right] \\
 & = 0 \\
 & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0
 \end{aligned}$$

DẠNG 4. CHỨNG MINH SỰ VUÔNG GÓC CỦA HAI VECTO, HAI ĐƯỜNG THẲNG.

Điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Điều kiện $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

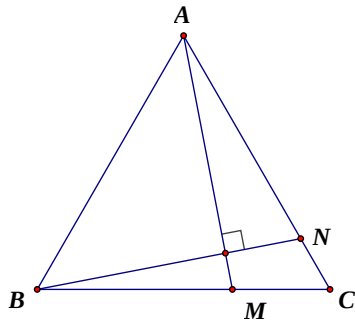
Lưu ý chọn gốc, chọn hệ cơ sở để biểu diễn và chứng minh vuông góc.

Câu 32. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

b). Chứng minh AM vuông góc với BN .

Lời giải



a).

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos BAC = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\bullet \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \cdot CA \cdot \cos BCA = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

b).

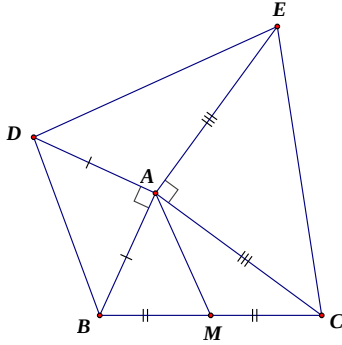
$$\bullet 3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\bullet 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA}) = 4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} &= \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \right) \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \overrightarrow{AC} \right) \\
&= -\frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15} \overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{15} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15} \overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}^2 \\
&= -\frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{8}{15} \cdot a^2 - \frac{1}{3} a^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BN} \Leftrightarrow AM \text{ vuông góc với } BN.
\end{aligned}$$

Câu 33. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

Lời giải

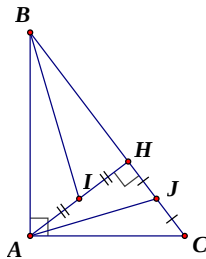


Ta chứng minh $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Thật vậy:

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AE \cdot \cos(90^\circ + A) - AC \cdot AD \cdot \cos(90^\circ + A) = 0 \text{ (do } AB = AD, AE = AC \text{)}.
\end{aligned}$$

Câu 34. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $BI \perp AJ$

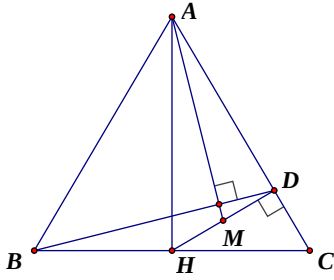
Lời giải



$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}); \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) \\
\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4} (-\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{4} (-AH^2 - HB \cdot HC \cdot \cos BHC) \\
&= \frac{1}{4} (-AH^2 + HB \cdot HC) = 0
\end{aligned}$$

Câu 35. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC , M trung điểm của đoạn HD . Chứng minh AM vuông góc với DB .

Lời giải



Vì M trung điểm của HD, nên có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$

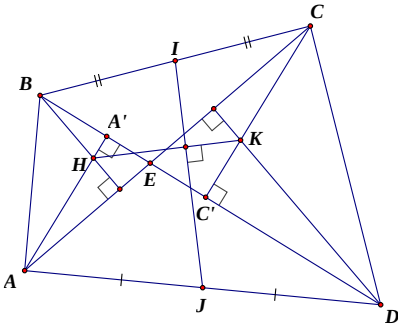
$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}) = \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}}_0 \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BH} \\ &= \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD}. \text{ Vậy AM vuông góc với BD.} \end{aligned}$$

Câu 36. Cho tứ giác ABCD có E là giao của hai đường chéo AC và BD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE.

a). Chứng minh $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b). Chứng minh $HK \perp IJ$

Lời giải



a). Hạ AA', CC' lần lượt vuông góc BD, ta có:

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

b) Tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\text{suy ra } \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$\text{Thành tử } \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0$$

Vậy $HK \perp IJ$

Câu 37. Cho tứ giác ABC có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M. Gọi P là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

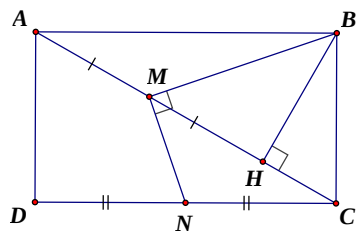
Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \underbrace{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}}_0 - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB}$$

Câu 38. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh $BM \perp MN$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}); \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC})$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = HA \cdot HC \cdot \cos \angle AHC = HA \cdot HC \cdot \cos 180^\circ = -HA \cdot HC = -BH^2$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MN}.$$

Cách 2:

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NH}) = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CH})$$

$$= -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right)$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{BM} = \left[-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right) \right] \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}) + \frac{1}{8}(-\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CH})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8} \left(\underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right) + \frac{1}{8} \left(-\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right)$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} - 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD}) \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

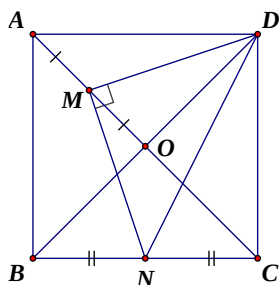
$$2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CH}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}) = 2\underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA}$$

$$= 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA} = 2CH \cdot AH = 2BH^2$$

$$\text{Do đó } (*) = -\frac{1}{8}(BH^2 - AB^2 + CD^2 + BH^2 - 2BH^2) = 0$$

Câu 39. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.

Lời giải



Gọi $a > 0$ là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Nên có $AC = a\sqrt{2}$, $CM = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Áp dụng định lí hàm số cosin cho các tam giác CMN và CDM:

- $$MN^2 = CN^2 + CM^2 - 2CN \cdot CM \cdot \cos MCN$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (1)$$

- $$MD^2 = CD^2 + CM^2 - 2CD \cdot CM \cdot \cos DCM$$

$$= a^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (2)$$

- $$DN^2 = CD^2 + CN^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

Ta có $MN^2 + MD^2 = ND^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DMN$ vuông tại M (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra DMN vuông cân tại M.

Cách 2:

Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ & $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}(3\vec{a} - \vec{b})$$

Ta có $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{16}(3\vec{a}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2)$

$$= \frac{1}{16}(3a^2 - 3b^2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MD} \quad (4).$$

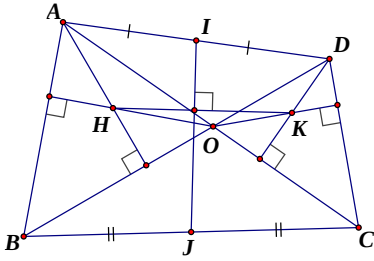
- $$|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (5)$$

- $$|\overrightarrow{MD}|^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} - \vec{b})^2 = \frac{1}{16}(9\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra DMN vuông cân tại M.

Câu 40. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh $HK \perp IJ$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \underbrace{\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}}_0 + 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$$

$$2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{HK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OH}$$

Câu 41. Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .

Lời giải

Chọn hệ vec tơ cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}$$

$$\text{Để } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{c} + 2\vec{b}) \cdot (a\vec{c} - x\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a\vec{c}^2 - x\vec{b} \cdot \vec{c} + 2a\vec{b} \cdot \vec{c} - 2x\vec{b}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\vec{c}^2 + (2a - x)\vec{b} \cdot \vec{c} - 2x\vec{b}^2 = 0$$

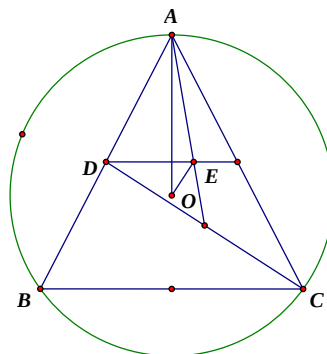
$$\Leftrightarrow a.9a^2 + (2a - x).a.a.\cos 60^\circ - 2x.9a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left(9a + a - \frac{x}{2} - 2x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10a - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 4a$$

Câu 42. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm của AB , E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh $OE \perp CD$

Lời giải



Ta có

$$\begin{aligned}
- \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) \\
- \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC}\right] \\
&= \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \\
\text{Do đó } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{12}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \\
&= \frac{1}{12}(3OA^2 + OB^2 - 4OC^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \text{ tức } OE \perp CD
\end{aligned}$$

DẠNG 5. TẬP HỢP ĐIỂM

Dạng 1: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

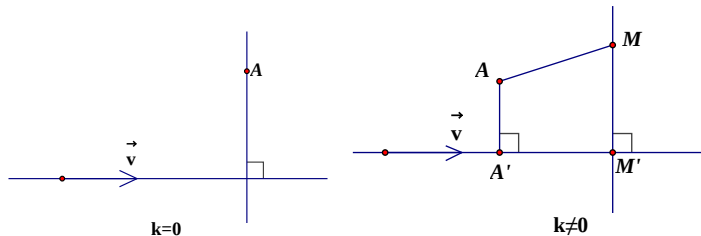
+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I.

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

Dạng 2: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$

$k \neq 0$: Gọi $A'M'$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vector $\vec{v}$; ta có: (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$ (định lý hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của $\vec{v}$ định bởi $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{v}$). Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vector $\vec{v}$ tại M' .



Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định, α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

- Cho hai điểm A, B cố định α, β là hằng số thỏa $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$.
- Cho ba điểm A, B, C cố định α, β, γ là hằng số thỏa $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MI}$.

Câu 43. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow AB \perp CM$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C vuông góc với AB.

Câu 44. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

b). $\overrightarrow{MB} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

c). $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

d). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Lời giải

a). Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MA \perp MI$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường là đường tròn đường kính IA.

b). $\overrightarrow{MB} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

$$\text{Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, nên có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MB} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BG.

$$c). (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$$

Gọi điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 4\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = 4\overrightarrow{MI}$$

Gọi điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J \text{ là điểm cố định.}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$$

$$= 6\overrightarrow{MJ} + \underbrace{(\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC})}_{\vec{0}} = 6\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ, với I, J xác định ở trên.

$$d). \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}^2 + 4\overrightarrow{MC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 + 4\overrightarrow{MC}^2 - 8\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} \cdot 2\overrightarrow{MF} = 4\overrightarrow{CB}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2 \text{ (Với E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB).}$$

Gọi K trung điểm của EF

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KF}) = \overrightarrow{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE}) = \overrightarrow{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}^2 - \overrightarrow{KE}^2 = \overrightarrow{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{KE}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2$$

$$\text{Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm K, bán kính } R = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2}$$

Câu 45. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow MA \text{ vuông góc với } BC.$$

Vì A, B, C cố định $\Leftrightarrow$ tập hợp những điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

Câu 46. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}^2$

Lời giải

$$\text{Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$$

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC, thì K cố định và hình chiếu của $\overrightarrow{MG}$ trên BC là $\overrightarrow{HK}$, theo định lý hình chiếu ta có: $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC}$, suy ra

$$(*) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2, \text{ suy ra H cố định (H thuộc đường thẳng BC định bởi } \overrightarrow{HK} = \frac{AB^2}{3BC}). \text{ Vậy}$$

tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với BC tại H.

Câu 47. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = a, BC = 3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Lời giải

$$2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = MB^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + MC^2$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\text{Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{I là điểm cố định và nằm giữa hai điểm A và B. Do}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow |\overrightarrow{AI}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AI = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3} \Rightarrow BI = \frac{a}{3}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2 + 4\overrightarrow{MB}^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 2IA^2 + 4IB^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} = BC^2$$

$$\Rightarrow 6MI^2 = BC^2 - (2IA^2 + 4IB^2) = 9a^2 - \left[2 \cdot \left(\frac{2a}{3} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3} \right)^2 \right] = \frac{23a^2}{3}$$

$$\Rightarrow MI^2 = \frac{23a^2}{18} \Leftrightarrow MI = a\sqrt{\frac{23}{18}}$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R = a\sqrt{\frac{23}{18}}$.

Câu 48. Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$$

Lời giải

$$\text{Gọi I là trung điểm của đoạn AD ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\text{Gọi J là điểm thỏa mãn hệ thức: } \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J \text{ là}$$

điểm cố định.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$$

$$= 6\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}} = 6\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MJ} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MJ \text{ vuông góc với MI.}$$

Do I, J cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ.

Câu 49. Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

Lời giải

Gọi O là trung điểm của đoạn AB .

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2$$

$$= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}_0 \right) = 2MO^2 + OA^2$$

$$= 2MO^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do } MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}$. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính

$$R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}.$$

$$\text{Nếu } \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow MO = 0 \Rightarrow M \equiv O$$

$$\text{Nếu } \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 < 0 \text{ nên tập điểm là rỗng.}$$

Câu 50. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$\text{a) } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0;$$

$$\text{b) } (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0.$$

Lời giải

$$\text{a) Gọi } I \text{ là trung điểm đoạn } BC. \text{ Khi đó } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI.$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn đường kính AI .

$$\text{b) Gọi } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC. \text{ Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow CA \perp MG$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và vuông góc với AC .

Câu 51. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$$\text{a) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0;$$

$$\text{b) } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0;$$

$$\text{c) } (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0;$$

$$\text{d) } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB.$$

Lời giải

$$\text{a) Giả sử } M \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow M \text{ nằm trên đường tròn đường kính } AB.$$

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC \Leftrightarrow M \text{ nằm trên đường thẳng qua } A \text{ và vuông góc với } BC.$$

c) Gọi I là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MG \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính IG.

d) Giả sử $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}| \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -MA \cdot MB$

$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 180^\circ \Leftrightarrow M$ nằm bên trong đoạn thẳng AB

Câu 52. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thỏa điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Lời giải

Với O là trung điểm AB. Ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + OA^2$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + OB^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + OA^2 + OB^2 \quad (1)$$

Vì O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ và OA = OB, do đó (1) trở thành

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2OA^2.$$

Gọi tập hợp các điểm M cần tìm là (L). Ta có:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(MO^2 + OA^2) = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2}{2} - OA^2 \quad (2)$$

Đặt $OA^2 = \frac{m^2}{2}$. (2) trở thành $MO^2 = \frac{1}{2}(k^2 - m^2)$. Xảy ra:

i) $k^2 < m^2$ thì $MO^2 < 0$: (L) = $\emptyset$.

ii) $k^2 = m^2$ thì $MO^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$: (L) = { O }.

iii) $k^2 > m^2 \Leftrightarrow MO = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)}$: (L) là đường tròn tâm O có bán kính là

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)}.$$

Câu 53. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$, E là trung điểm của DC. Ta có $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow MI \perp ME$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính IE.

Câu 54. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a). $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b). $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

Lời giải

Dựng hình bình hành ABEC, ta có:

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow MB^2 + MC^2 - MA^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2$$

$$= ME^2 + 2\overrightarrow{ME}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA}) + EB^2 + EC^2 - EA^2$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow ME^2 = EA^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Nếu A tù: Tập hợp điểm M là $\emptyset$

Nếu A vuông: Tập hợp điểm M là $\{E\}$

Nếu A nhọn: Tập hợp điểm M là đường tròn $(E; \sqrt{2AB \cdot AC \cdot \cos A})$

b).

Cách 1: Gọi I trung điểm của BC , J là trung điểm của AI . Ta có $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{BC^2}{2} - 2MA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - MI^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng vuông góc với AI tại điểm H , xác định bởi:

$$\overline{JH} = \frac{BC^2}{8AI}$$

Cách 2: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , G là trọng tâm tam giác ABC .

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp AG$$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng qua O vuông góc với AG .

Câu 55. Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} \quad (*)$$

$$\text{Gọi } I \text{ trung điểm của } AB, \text{ khi đó có } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\text{Thay vào (*) ta được: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

$$\bullet \quad k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Rightarrow M \text{ tập rỗng.}$$

$$\bullet \quad k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Rightarrow M \equiv I$$

$$\bullet k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Rightarrow M \text{ chạy trên đường tròn tâm I bán kính } R = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$$

Câu 56. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Lời giải

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) = AB^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = AB^2 \Leftrightarrow MB \cdot GC \cdot \cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{GC}) = AB^2 (*)$$

Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B trên GC , trên CB_1 ta lấy điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{B_1H} = \frac{AB^2}{GC}$

$\overrightarrow{B_1H} \uparrow \overrightarrow{B_1C} \uparrow \overrightarrow{GC}$, vì B_1 cố định nên H cố định $\Rightarrow M$ chạy trên đường thẳng CG đi qua H .

Câu 57. Trong mặt phẳng Oxy cho cho tam giác ABC có trọng tâm G .

a). Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b). Chứng minh C, G, P thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

Lời giải

a). Gọi I là trung điểm của AB , theo tính chất đường trung tuyến $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PI} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CP}) - 4\overrightarrow{CP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CI} \quad (1)$$

b). Theo tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IG} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IC} - 3\overrightarrow{IG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG} \quad (2)$$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{GI}$

$$c). |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + 4\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CI}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HM} + 2(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HM})| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow \underbrace{|\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HC} - 3\overrightarrow{HM}|}_{\vec{0}} = |\overrightarrow{CI}|$$

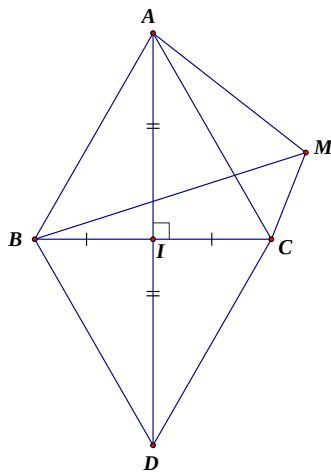
$$\Leftrightarrow 3|\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow HM = \frac{CI}{3} \Rightarrow \text{Tập hợp điểm M là đường tròn tâm H bán kính } R = \frac{CI}{3}.$$

Câu 58. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

Lời giải



a). Nhận xét: AD và BC có trung điểm I chung.

$$\begin{aligned}\overline{BM} \cdot \overline{CM} &= \overline{MB} \cdot \overline{MC} = (\overline{MI} + \overline{IB})(\overline{MI} + \overline{IC}) = \overline{MI}^2 - \overline{IB}^2 = MI^2 - \frac{a^2}{4} \\ \overline{AM} \cdot \overline{AD} - \overline{AM}^2 &= \overline{AM}(\overline{AD} - \overline{AM}) = \overline{AM} \cdot \overline{MD} = -\overline{MA} \cdot \overline{MD} \\ &= -(\overline{MI} + \overline{IA})(\overline{MI} + \overline{ID}) = -\overline{MI}^2 + \overline{IA}^2 = -MI^2 + \frac{3a^2}{4} \\ \Rightarrow \overline{BM} \cdot \overline{CM} + \overline{AM} \cdot \overline{AD} - \overline{AM}^2 &= \frac{a^2}{2} \text{ không đổi.}\end{aligned}$$

b). Theo câu a), ta có:

$$\begin{aligned}\overline{BM} \cdot \overline{CM} + \overline{AM} \cdot \overline{AD} &= k \Leftrightarrow AM^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow AM^2 = k - \frac{a^2}{2} \\ \text{– Nếu } k < \frac{a^2}{2} &\text{ thì quỹ tích là tập rỗng.} \\ \text{– Nếu } k = \frac{a^2}{2} &\text{ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm } A. \\ \text{– Nếu } k > \frac{a^2}{2} &\text{ thì quỹ tích là đường tròn tâm A, bán kính là } \sqrt{k - \frac{a^2}{2}}.\end{aligned}$$

Câu 59. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

- a). $\overline{AM} \cdot \overline{BC} - 2\overline{BM} \cdot \overline{CA} + 2\overline{CM} \cdot \overline{AB} = k$
b). $\overline{BM} \cdot \overline{CM} - 2\overline{CM} \cdot \overline{AM} + 2\overline{AM} \cdot \overline{BM} = k$
(với k là một số cho trước).

Lời giải

a).

$$\begin{aligned}\overline{AM} \cdot \overline{BC} - 2\overline{BM} \cdot \overline{CA} + 2\overline{CM} \cdot \overline{AB} &= \overline{AM} \cdot \overline{BC} - 2(\overline{AM} - \overline{AB})\overline{CA} + 2(\overline{AM} - \overline{AC})\overline{AB} \\ &= \overline{AM}(\overline{BC} - \overline{CA} + 2\overline{AB}) + 2\overline{AB} \cdot \overline{CA} - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AM} \cdot \overline{AD} - 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}\end{aligned}$$

(Với D là điểm sao cho $\overline{AD} = \overline{BC} - \overline{CA} + 2\overline{AB}$).

Do đó điểm M thỏa mãn $\overline{AM} \cdot \overline{AD} - 4\overline{AB} \cdot \overline{AC} = k$

$$\Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AD} = k + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM'} \cdot \overline{AD} = k + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM'} = \frac{k + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AD}} \text{ (Với M' là hình chiếu của M trên AD).}$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường thẳng vuông góc với AD tại điểm M' sao cho

$$\overline{AM'} = \frac{k + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

b).

trước hết ta có

$$2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - (\overline{MC} - \overline{MB})^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{BC}^2 \text{ nên}$$

$$\overline{BM} \cdot \overline{CM} = \frac{\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - \overline{BC}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{BM} \cdot \overline{CM} - 2\overline{CM} \cdot \overline{AM} + 2\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \frac{3}{2}\overline{MB}^2 - \frac{1}{2}\overline{MC}^2 - \frac{1}{2}\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2$$

$$\text{Do vậy điểm M thỏa mãn } \frac{3}{2}\overline{MB}^2 - \frac{1}{2}\overline{MC}^2 - \frac{1}{2}\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2k + \overline{BC}^2 - 2\overline{CA}^2 + 2\overline{AB}^2 \quad (1)$$

Gọi G là điểm thỏa mãn $3\overline{GB} - \overline{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2\overline{MG}^2 + 3\overline{GB}^2 - \overline{GC}^2, \text{ mà } \overline{GB} = \frac{\overline{BC}}{2}, \overline{GC} = \frac{2\overline{BC}}{2} \text{ nên}$$

$$3\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2\overline{MG}^2 - \frac{3}{2}\overline{BC}^2$$

$$\text{Thành thử điều kiện (1) trở thành: } 2\overline{MG}^2 - \frac{3}{2}\overline{BC}^2 = 2k + \overline{BC}^2 - 2\overline{CA}^2 + 2\overline{AB}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MG}^2 = k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2 \text{ (với a, b, c là độ dài ba cạnh BC, CA, AB).}$$

$$\text{– Nếu } k < -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích là tập rỗng.}$$

$$\text{– Nếu } k = -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm M.}$$

$$\text{– Nếu } k > -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích điểm M là đường tròn tâm G bán kính } \sqrt{k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2}.$$

Câu 60. Cho tam giác ABC số a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 4\overline{MC}^2 = a$.

Lời giải:

Chú ý, tổng các hệ số $3+1-4=0$ nên không tồn tại tâm tỉ cự của hệ điểm A, B, C.

$$\text{Gọi I là điểm sao cho } 3\overline{IA} + 3\overline{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overline{IA} + (\overline{AB} - \overline{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\overline{AI} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$

Do đó I cố định và

$$3\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 3\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 3(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2$$

$$= 4\overline{MI}^2 + 3\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + 2\overline{MI}(\overline{3IA} + \overline{IB})^2$$

$$= 4\overline{MI}^2 + 3\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0}$$

$$= 4\overline{MI}^2 + 3\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2.$$

Ta có

$$3\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 4\overline{MC}^2 = a \Leftrightarrow 4\overline{MI}^2 + 3\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 - 4\overline{MC}^2 = a$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 - \overline{MI}^2 = \frac{3\overline{IA}^2 + \overline{IB}^2 - a}{4}.$$

Đặt $k = \frac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}$ không đổi, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$MC^2 - MI^2 = k.$$

Gọi O là trung điểm của CI và H là hình chiếu của M trên CI , ta có

$$MC^2 - MI^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MI}^2 = (\overline{MC} + \overline{MI})(\overline{MC} - \overline{MI}) = 2\overline{MO} \cdot \overline{IC} = 2\overline{HO} \cdot \overline{IC}.$$

Do đó

$$MC^2 - MI^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{HO} \cdot \overline{IC} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot \overline{CI} = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot \overline{CI} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot (\overline{CI})^2 = k \cdot \overline{CI}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{k}{2\overline{CI}^2} \overline{CI}.$$

Nên điểm H cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H xác định ở trên.

Câu 61. Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

Lời giải:

Gọi I là điểm sao cho

$$2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 5\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overline{IA} + 3(\overline{AB} - \overline{AI}) + 5(\overline{AC} - \overline{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{AB} + 5\overline{AC} = 10\overline{AI} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{3}{10}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Do đó điểm I xác định duy nhất và

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 &= 2\overline{MA}^2 + 3\overline{MB}^2 + 5\overline{MC}^2 \\ &= 2(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 3(\overline{MI} + \overline{IB})^2 + 5(\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overline{MI}(2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 5\overline{IC}) \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0} \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = k^2 \Leftrightarrow 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{10}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2).$$

□ Nếu $k^2 > 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính

$$R = \sqrt{\frac{1}{10}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2)}.$$

□ Nếu $k^2 = 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M gồm chỉ một điểm O .

□ Nếu $k^2 < 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là rỗng.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- Câu 2.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- A.** $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

- Câu 3.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- A.** $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

- Câu 4.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc A nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

- Câu 5.** Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. **D.** $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

- Câu 6.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

Câu 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

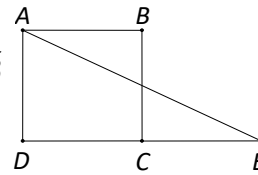
Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2$.



Câu 8. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 9. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. D. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh về trái với về phải.

Phương án A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BC}$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot AC \cos 120^\circ = -2$ nên loại B.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$ nên chọn C.

Câu 10. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = BA \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} a^2$.

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ và $\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = AB \cdot AB \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot DC \cdot \cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ nên chọn C.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A: Do $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = DA \cdot CB \cdot \cos 0^\circ = a^2$ nên loại A.

Phương án B: Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = -a^2$ nên chọn B.

Câu 13. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng :

- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0. D. $9a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = -\frac{9a^2}{2}$ nên chọn B.

Câu 14. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $B = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 130^\circ$ nên loại A.

Phương án B: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 40^\circ$ nên loại B.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$ nên loại C.

Phương án D: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$ nên chọn D.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ sau đó mới tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

- A. 0. B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Câu 18. Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:

- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$ nên loại **A**.

Phương án B: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên loại **B**.

Phương án C: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$ nên loại **C**.

Phương án D: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên chọn **D**.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A. $\frac{3a^2}{4}$. B. $\frac{-3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-3a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

Câu 20. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng

- A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
D. A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \text{ nên } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng}$$

Câu 21. Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A. $\sqrt{21}$. B. $\sqrt{61}$. C. 21. D. 61.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}.$$

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $3a$. D. 0 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

Câu 23. Cho 2 vector đơn vị $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

- A. 7 . B. 5 . C. -7 . D. -5 .

Lời giải

Chọn C

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7.$$

Câu 24. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

- A. $-9a^2$. B. $15a^2$. C. 0 . D. $9a^2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2 \text{ nên chọn } \text{A.}$$

Câu 25. Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. 9 . B. 81 . C. 3 . D. 5 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81 \text{ nên chọn } \text{B.}$$

Câu 26. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A. $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$. B. $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$. C. $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. D. $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

Câu 27. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 28. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 29. Cho hai điểm $A(2, 2)$, $B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\angle AMB = 90^\circ$

- A. $M(1, 6)$. B. $M(6, 0)$. C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$. D. $M(0, 1)$.

Lời giải**Chọn C**

Gọi $M(x, 0)$, với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = (x-2; -2)$, $\overrightarrow{BM} = (x-5; 2)$. Theo YCBT ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow M(1; 0) \\ x=6 \Rightarrow M(6; 0) \end{cases}, \text{ nên chọn } \underline{\text{C.}}$$

Câu 30. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải**Chọn C**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$, $\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và **D.**

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) \quad \text{Chọn C.}$$

$$\bullet \text{ A đúng, vì } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\bullet \text{ B đúng, vì } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

Câu 31. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải**Chọn C**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc B nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 32. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc A nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos B = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2\text{ cm}$, $BC = 3\text{ cm}$, $CA = 5\text{ cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4; -1)$. nằm giữa A, C .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$$

$$\text{Cách khác. Ta có } AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

Câu 35. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$$

Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$ B. $P = 3a^2$ C. $P = -3a^2$ D. $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ giả thiết suy ra } AC = a\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2 \end{aligned}$$

Câu 37. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2} \end{aligned}$$

Câu 38. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

- A.** tam giác OAB đều. **B.** tam giác OAB cân tại O .
C. tam giác OAB vuông tại O . **D.** tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 &= 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA \end{aligned}$$

Câu 39. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Câu 40. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

Câu 41. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

Lời giải

Chọn D.

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI} \text{ . } (*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

Câu 42. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG} \text{ . } (*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

Câu 43. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

- A. một điểm. **B. đường thẳng.** C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB$.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB .

Câu 44. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

- A. một điểm.** B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$

$$= \overline{MI}^2 - \overline{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Theo giả thiết, ta có $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \rightarrow M \equiv I.$

Câu 45. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Tính tích vô hướng

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB}$$

A. $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 4a^2.$

B. $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -a^2.$

C. $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -4a^2.$

D. $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -2a^2.$

Lời giải

Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -a^2, \overline{BC} \cdot \overline{CA} = -3a^2.$

Suy ra $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB})$$

Ta có $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$

Câu 46. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC})$

A. $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = 3a^2.$

B. $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = 2a^2.$

C. $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = a^2.$

D. $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = 4a^2.$

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$

Do đó $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cos ACB$

$(\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 \text{ vì } \overline{AC} \perp \overline{BD})$

Mặt khác $ACB = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2.$

Câu 47. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}, CD = BD = 5\sqrt{2}, AD = 3\sqrt{10}, AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vector $\overline{AC}$ và $\overline{DB}$

A. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}.$

B. $-\frac{3}{5\sqrt{2}}.$

C. $\frac{4}{5\sqrt{2}}.$

D. $\frac{3}{5\sqrt{2}}.$

Lời giải

Với điểm O bất kỳ ta có:

$$2\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 2(\overline{OC} - \overline{OA})(\overline{OB} - \overline{OD}) = 2\overline{OC} \cdot \overline{OB} + 2\overline{OA} \cdot \overline{OD} - 2\overline{OC} \cdot \overline{OD} - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

Mặt khác $2\overline{OC} \cdot \overline{OB} = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - (\overline{OC} - \overline{OB})^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{BC}^2$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$$2\overline{AC} \cdot \overline{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2}{AC \cdot BD} = \frac{20 + 50 - 20 - 90}{10.5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5\sqrt{2}}.$$

Câu 48. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a, MN = a\sqrt{3}$.

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ suy ra

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2a^2.$$

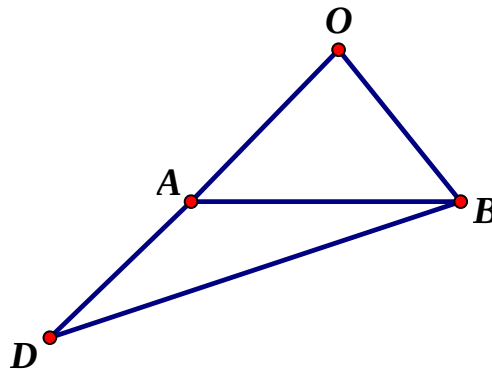
$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ.$$

Câu 49. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

- A. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. B. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
C. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. D. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng của O qua A .

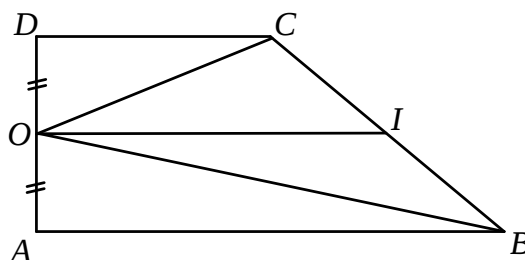
$$|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

Câu 50. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vector tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2OI.$$

Xét hình thang $ABCD$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \frac{AB+CD}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

Câu 51. Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường cao AM trong tam giác đều cạnh $2a$ là: $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy khẳng định đúng là $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Câu 52. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{AB}\right)^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$ (vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$)
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 53. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Rightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$$

$$\Rightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

Câu 54. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

- A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

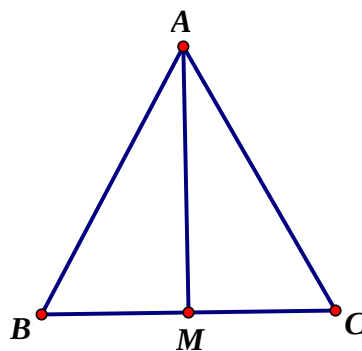
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

- A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \angle BAM = 30^\circ$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

Câu 56. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A. $\sqrt{11}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{12}$.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \left(|\vec{a} + \vec{b}| \right)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$\Rightarrow \left(|\vec{a} + \vec{b}| \right)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

Câu 57. Cho tam giác ABC vuông tại A có $B = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

A. $P = -2$.

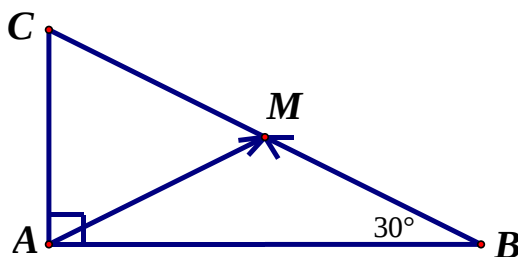
B. $P = 2\sqrt{3}$.

C. $P = 2$.

D. $P = -2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 58. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $\angle BAD = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$.

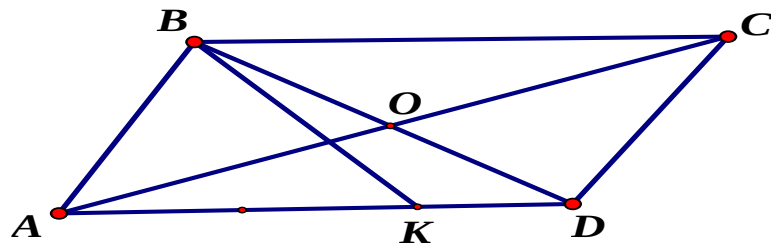
B. $6a^2$.

C. 0.

D. a^2 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$

Câu 59. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Câu 60. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Câu 61. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải

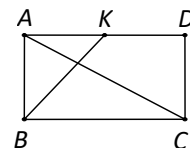
Chọn A

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$



$$\longrightarrow \cos ABC = \sqrt{1 - \sin^2 ABC} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } ABC \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc ABC

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - ABC) = -\cos ABC = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

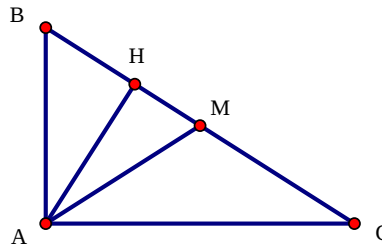
Câu 62. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Tính cạnh AB, AC .

A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. **B.** $AB = a, AC = a$.

C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. **D.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có $\overrightarrow{HM}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ lên BC .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}, BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{HM} \text{ cùng chiều } \overrightarrow{BC} \text{ và } HM \cdot BC = \frac{a^2}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Có } BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Có } AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

Câu 63. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

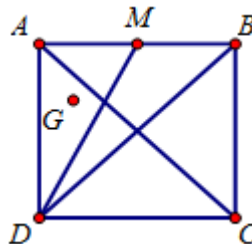
A. $\frac{21a^2}{4}$.

B. $\frac{11a^2}{4}$.

C. $\frac{9a^2}{4}$.

D. $\frac{a^2}{4}$.

Lời giải



$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ADM \text{ nên } \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) &= \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}. \end{aligned}$$

Câu 64. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7} &\Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 65. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

A. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. **B.** $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{6}$. **C.** $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{4}$. **D.** $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(60^\circ) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \vec{u}^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 3$$

$$\vec{v}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

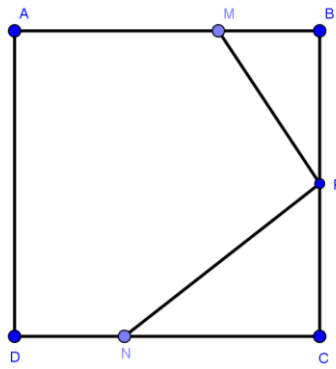
$$\text{Suy ra } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = -\frac{1}{6}$$

Câu 66. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos MNP$.

A. $\cos MNP = \frac{13}{5\sqrt{10}}$. **B.** $\cos MNP = \frac{13}{4\sqrt{10}}$.

C. $\cos MNP = \frac{13}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos MNP = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$

Mặt khác $|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos MNP = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Câu 67. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

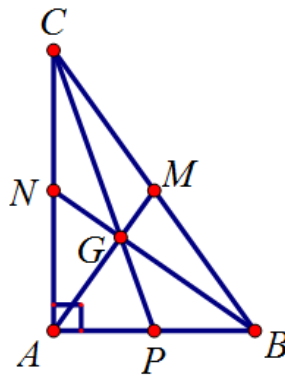
Suy ra $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{3}{8}$.

Câu 68. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$. B. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.

C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.

Lời giải



Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$$

Câu 69. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$.

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vector có giá vuông góc với nhau.

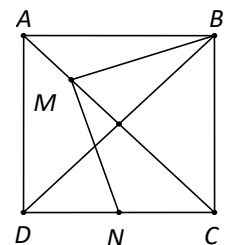
$$\bullet \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{16}(3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{16}(0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$



Câu 70. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R. Tính R.

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

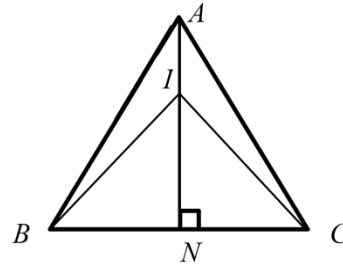
B. $R = \frac{a}{4}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm đoạn BC.

Gọi I là điểm thỏa: $4\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + \vec{IN} = \vec{0}$, nên điểm I thuộc đoạn thẳng AN sao cho $IN = 2IA$.

Khi đó: $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Ta có: $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$.

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 71. Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$$|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$$

A. Tập rỗng.

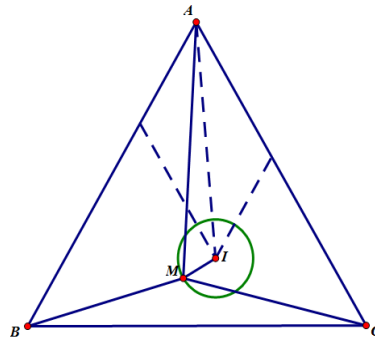
B. Đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3$ cm.

D. Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $|\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{AB}| = 18$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC}$.

Khi đó: $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 9|\vec{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

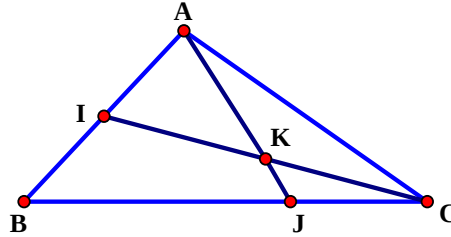
Câu 72. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

- A.** Đường tròn đường kính IJ . **B.** Đường tròn đường kính IK .
C. Đường tròn đường kính JK . **D.** Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$.

$$\text{Nhu vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}).(4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

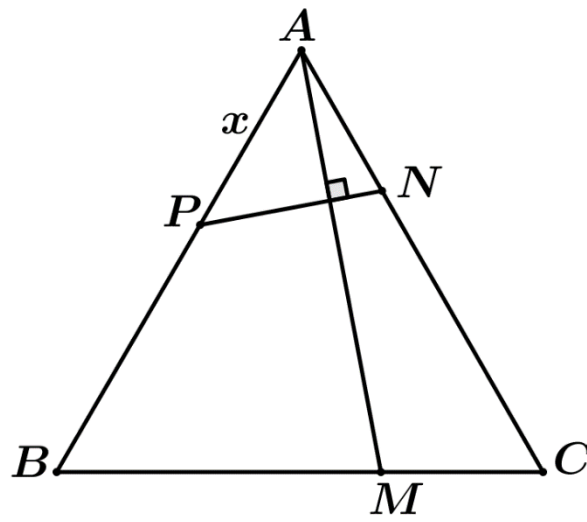
Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định (đpcm).

Câu 73. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

- A.** $x = \frac{5a}{12}$. **B.** $x = \frac{a}{2}$. **C.** $x = \frac{4a}{5}$. **D.** $x = \frac{7a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$, ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3} (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3} (\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{1}{3a} (-3x\vec{b} + a\vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$

$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}$.

Câu 74. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{3}{7}$.

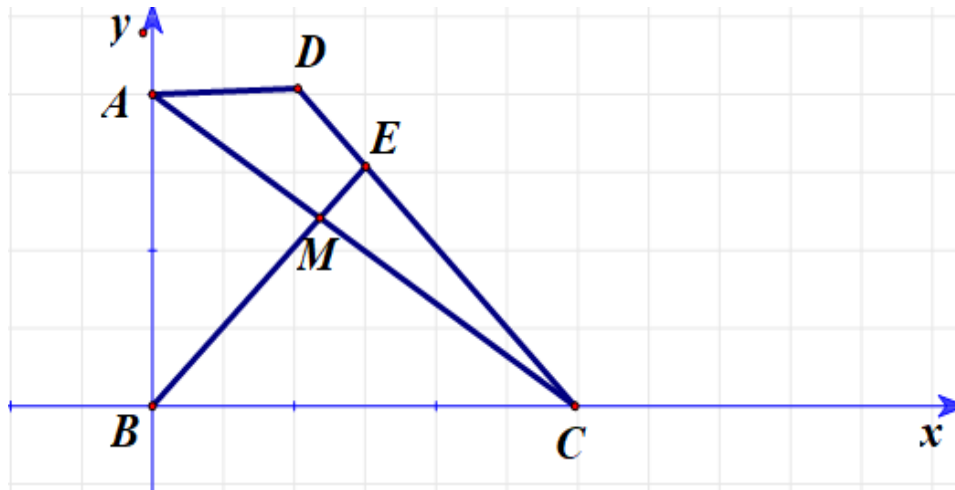
C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B , điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox .



Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; \frac{-4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.