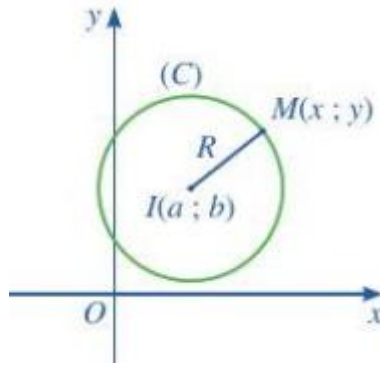


PHẦN A. LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn



Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R là $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Phương trình đường tròn ở dạng trên thường được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn.

Ví dụ 1. Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

- Đường tròn tâm O bán kính R ;
- Đường tròn tâm $I(-1; 3)$ bán kính 7 .

Giải

- a) Phương trình đường tròn tâm O bán kính R là

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

- b) Phương trình đường tròn tâm $I(-1; 3)$ bán kính 7 là

$$[x-(-1)]^2 + (y-3)^2 = 7^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 49.$$

Ví dụ 2. Tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình là

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$$

Giải

Ta có: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9 \Leftrightarrow [x-(-2)]^2 + (y-5)^2 = 3^2$.

Vậy đường tròn đã cho có tâm là $I(-2; 5)$ bán kính $R=3$

Nhận xét: Ta có thể viết phương trình $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ của đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R về phương trình có dạng là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Dạng đó thường được gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.

Ví dụ 3

- a) Phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ có phải là phương trình đường tròn không? Nếu phải, xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

- b) Xác định điều kiện của a, b, c để phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn.

Khi đó, xác định tọa độ tâm và bán kính theo a, b, c .

Giải

- a) Ta có:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2.$$

Phương trình trên là phương trình đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R=3$.

- b) Ta có:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) = a^2 + b^2 - c$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Do đó, phương trình trên là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 > c$. Lúc này đường tròn đã cho có tâm $I(a; b)$ bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

2. Phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng

Do có duy nhất một đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước nên ta có thể lập được phương trình đường tròn đó khi biết toạ độ của ba điểm nói trên.

Ví dụ 4. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1;1), B(0;-2), C(0;2)$.

Giải

Giả sử tâm của đường tròn là điểm $I(a;b)$. Ta có $IA = IB = IC \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$. Vì $IA^2 = IB^2, IB^2 = IC^2$ nên

$$\begin{cases} (-1-a)^2 + (1-b)^2 = (0-a)^2 + (-2-b)^2 \\ (0-a)^2 + (-2-b)^2 = (0-a)^2 + (2-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a - 2b + 2 = a^2 + b^2 + 4b + 4 \\ a^2 + b^2 + 4b + 4 = a^2 + b^2 - 4b + 4 \end{cases}$$

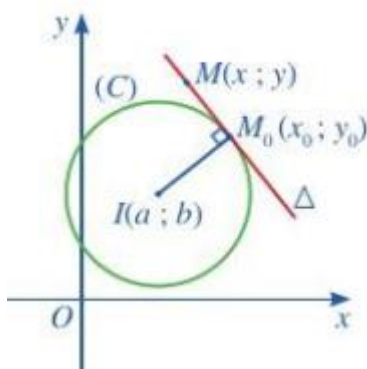
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 4b + 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Đường tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $R = IC = \sqrt{a^2 + b^2 - 4b + 4} = \sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2$.

Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn



- Đường thẳng M_0t đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vector pháp tuyến

$$\overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a; y_0 - b).$$

- Phương trình tiếp tuyến M_0t là

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Ví dụ 5. Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

Giải

Đường tròn có tâm $I(1;3)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2;1)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ là

$$(2-1)(x-2) + (1-3)(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1(x-2) - 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , một vật chuyển động tròn đều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn tâm $I(3;2)$ bán kính 5 dưới tác dụng của lực căng dây. Khi vật chuyển động tới điểm $M(6;6)$ thì dây căng bị đứt.

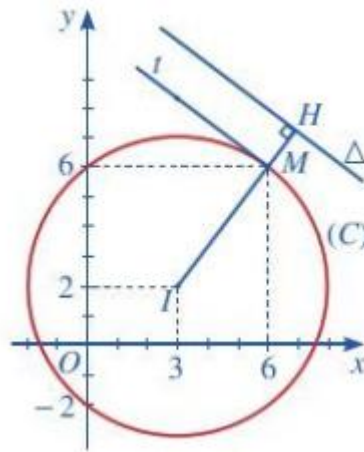
a) Viết phương trình quỹ đạo chuyển động của vật sau khi dây bị đứt, biết rằng vật chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây trong bài toán này.

b) Một vật khác chuyển động thẳng đều trên đường thẳng có phương trình

$$\Delta: 3x + 4y + 23 = 0.$$

Chứng minh hai vật này không gặp nhau tại bất kì thời điểm nào.

Giải



a) Quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất trước khi dây bị đứt là đường tròn (C) có phương trình:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

Khi dây bị đứt, do vật thứ nhất chỉ chịu tác động của duy nhất lực căng dây nên vật đó tiếp tục chuyển động theo tiếp tuyến Mt tại điểm M(6;6) thuộc đường tròn (C). Phương trình tiếp tuyến Mt là:

$$(6-3)(x-6) + (6-2)(y-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-6) + 4(y-6) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 42 = 0.$$

Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thứ nhất sau khi dây bị đứt là tia Mt, đường thẳng Mt có phương trình là: $3x + 4y - 42 = 0$.

b) Khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng $\Delta: 3x + 4y + 23 = 0$ là:

$$IH = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 8 > 5.$$

Vì khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ lớn hơn bán kính của đường tròn (C) nên đường tròn (C) và đường thẳng Δ không có điểm chung, tức là vật thứ hai không gặp vật thứ nhất khi dây chưa đứt. Mặt khác, vì $\Delta \nparallel Mt$ nên vật thứ hai không gặp vật thứ nhất sau khi dây bị đứt. Vậy hai vật không bao giờ gặp nhau.

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = P(*)$

- Nếu $P > 0$ thì (*) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{P}$

- Nếu $P \leq 0$ thì (*) không phải là phương trình đường tròn.

Câu 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$ (1) b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ (2)

c) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ (3) d) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ (4)

Lời giải.

a) Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = -1; b = 2; c = 9$

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 < 0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có $a^2 + b^2 - c = 9 + 4 - 13 = 0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có $(3) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0(1)$

a) Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn, hãy tìm tâm và bán kính theo m .

Lời giải.

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$

Với $a = m; b = 2(m-2); c = 6 - m$

$$\text{Hay } m^2 + 4(m-2)^2 - 6 + m > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m; 2(m-2))$ và bán kính $R = \sqrt{5m^2 - 15m + 10}$.

Câu 3. Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0(2)$

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn.

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải.

a) Ta có

$$x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m+2)x + \frac{(m+2)^2}{4} + y^2 - (m+4)y + \frac{(m+4)^2}{4} = \frac{(m+2)^2}{4} + \frac{(m+4)^2}{4} - m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{m+2}{2}\right]^2 + \left[y + \frac{m+4}{2}\right]^2 = \frac{(m+2)^2}{4} + \frac{(m+4)^2}{4} - m - 1$$

$$\text{Do } \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - m - 1 = \frac{(m+2)^2 + 4}{2} > 0$$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m .

b) Đường tròn có tâm $(I): \begin{cases} x_1 = -\frac{m+2}{2} \\ y_1 = \frac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_1 + y_1 - 1 = 0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$

c) Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

$$x_o^2 + y_o^2 + (m+2)x_o - (m+4)y_o + m+1 = 0, \forall m$$

Khi đó ta có: $\Leftrightarrow (x_o - y_o - 1)m + x_o^2 + y_o^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - y_o + 1 = 0 \\ x_o^2 + y_o^2 + 2x_o - 4y_o + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_o = 1 \\ y_o = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;2)$

Dạng 2. Thiết lập phương trình đường tròn

Cách 1:

- Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C) .
- Tìm bán kính R của đường tròn (C) .
- Viết phương trình đường tròn (C) theo dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (Hoặc $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$).

- Từ điều kiện của đề Câu thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c .

Giải hệ để tìm a, b, c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C) .

Câu 4. Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

- Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.
- Nhận AB làm đường kính với $A(1;1), B(7;5)$.

Lời giải.

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ nên có phương trình là:
 $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 26$.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra $I(4;3), AI = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$.
 Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính
 $R = AI = \sqrt{13}$ nên có phương trình là $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(-3;-1), B(-1;3), C(-2;2)$.

Lời giải.

Cách 1. Phương trình đường tròn có dạng $(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, với $a^2 + b^2 - c > 0$.

Vì A, B, C thuộc (C) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6a + 2b - c = 10 \\ 2a - 6b - c = 10 \\ 4a - 4b - c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

Cách 2. Gọi $I(a;b)$ là tâm của (C) .

Vì A, B, C thuộc (C) nên

$$\begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (-1-a)^2 + (3-b)^2 \\ (-3-a)^2 + (-1-b)^2 = (-2-a)^2 + (2-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+8b=0 \\ 2a+6b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Suy ra $I(2; -1)$, bán kính $IA=5$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Câu 6. Cho hai điểm $A(8;0), B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB .

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB .

Lời giải.

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của

cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{(8-4)^2+(0-3)^2}=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

b) Ta có $OA=8; OB=6; AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

Mặt khác $\frac{1}{2}OA \cdot OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC).

Suy ra $r = \frac{OA \cdot OB}{OA+OB+AB} = 2$.

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $I(2;2)$.

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x-y-5=0$ và hai điểm $A(1;2), B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B .

Lời giải.

Cách 1. Gọi I là tâm của (C) . Do $I \in d$ nên $I(t; 2t-5)$.

Hai điểm A, B cùng thuộc (C) nên

$$IA=IB \Leftrightarrow (1-t)^2 + (7-2t)^2 = (4-t)^2 + (6-2t)^2 \Leftrightarrow t=1$$

Suy ra $I(1; -3)$ và bán kính $R=IA=5$.

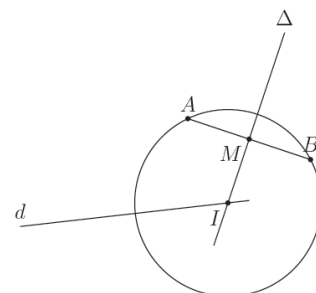
Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Cách 2. Gọi $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB . Đường trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận

$\overrightarrow{AB}=(3;-1)$ làm vecto pháp tuyến nên có phương trình

$$\Delta: 3x-y-6=0.$$

Tọa độ tâm I của (C) là nghiệm của hệ



$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; -3).$$

Bán kính của đường tròn bằng $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm

$$(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: x+3y+8=0, d_2: 3x-4y+10=0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1 , đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2

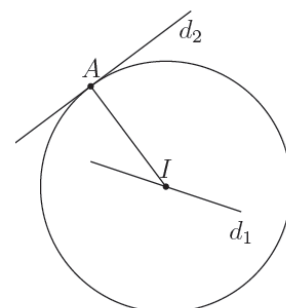
Lời giải.

Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d_1$ nên $I(-3t-8; t)$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} d(I, d_2) &= IA \\ \Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{25} &= \sqrt{(-3t-8+2)^2 + (t-1)^2} \\ \Leftrightarrow t &= -3 \end{aligned}$$

Suy ra $I(1; -3)$ và $R=5$

Vậy phương trình (C) là $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.



Câu 9. Trong mặt phẳng oxy cho 2 điểm A(-1; 1), B(3; 3) và đường thẳng $d: 3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc d .

Lời giải.

Đường trung trực Δ của AB đi qua M(1; 2) là trung điểm AB có phương trình là

$$\Delta: 2x + y - 4 = 0.$$

Gọi tâm I của (C) thuộc Δ là $I(t; 4-2t)$

$$\text{Ta có } d(I, d) = IA \Leftrightarrow \sqrt{(-1-t)^2 + (2t-3)^2} = \frac{|3t-4(4-2t)+8|}{\sqrt{9+16}}$$

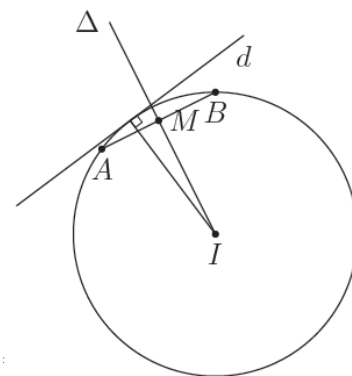
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{31}{2} \end{cases}$$

□ Với $t = 3$, suy ra tâm $I(3; -2)$. Bán kính $R=IA=5$

$$\text{Phương trình (C): } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$$

□ Với $t = \frac{31}{2}$, suy ra tâm $I(\frac{31}{2}; -27)$ và $R = \frac{65}{2}$

$$\text{Phương trình (C): } (x-\frac{31}{2})^2 + (y+27)^2 = \frac{4225}{4}.$$



Câu 10. Trong mặt phẳng oxy cho $d: 2x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc d .

Lời giải.

Gọi $I(m; 2m-4)$ thuộc d là tâm của đường tròn (C).

$$\text{Ta có } d(I; Ox) = d(I; Oy) \Leftrightarrow |2m-4| = |m| \Leftrightarrow m = 4 \text{ hoặc } m = \frac{4}{3}.$$

□ Với $m = \frac{4}{3}$ thì $I(\frac{4}{3}; \frac{-4}{3})$, $R = \frac{4}{3}$ ta có

$$(C): (x - \frac{4}{3})^2 + (y + \frac{4}{3})^2 = \frac{16}{9}$$

□ Với $m = 4$ thì $I(4; 4)$, $R = 4$ ta có

$$(C): (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16.$$

Câu 11. Trong mặt phẳng oxy cho $d: 2x - y - 4 = 0$: viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d đồng thời tiếp xúc với $\Delta_1: 3x + 4y + 5 = 0$ và $\Delta_2: 4x - 3y - 5 = 0$

Lời giải.

Gọi $I(6t + 10; t) \in d$ ta có

$$d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|22t + 35|}{5} = \frac{|21t + 35|}{5} \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = \frac{-70}{43}$$

□ Với $t = 0$ suy ra $I(10; 0)$, $R = 7$

$$\text{Phương trình (C): } (x - 10)^2 + y^2 = 49.$$

□ Với $t = \frac{-70}{43}$ suy ra $I(\frac{10}{43}; \frac{-70}{43})$, $R = \frac{7}{43}$.

$$\text{Phương trình (C): } (x - \frac{10}{43})^2 + (y + \frac{70}{43})^2 = \frac{49}{1849}.$$

Câu 12. Trong mặt phẳng oxy cho $d: x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta: x + 3y - 5 = 0$ viết phương trình (C) có bán kính $R = \frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ .

Lời giải.

Gọi $I(-2a + 3; a) \in d$ là tâm của (C). Ta có

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2. \end{cases}$$

□ Với $a = 6$ suy ra $I(-9; 6)$. Phương trình (C): $(x + 9)^2 + (y - 6)^2 = \frac{8}{5}$.

□ Với $a = -2$ suy ra $I(7; -2)$. Phương trình (C): $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = \frac{8}{5}$.

Câu 13. Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$ tia oy cắt (C) tại A. Viết phương trình (C') có bán kính $R' = 2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3}; 0)$ bán kính $R=4$.

$$\text{Tọa độ A là nghiệm hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (y > 0)$$

Ta được $A(0; 2)$.

$$\text{Đường thẳng IA đi qua 2 điểm I và A nên có phương trình } \begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2. \end{cases}$$

Đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên tâm I' thuộc IA, nên $I'(2\sqrt{3}t; 2t + 2)$.

$$\text{Hơn nữa, } R = 2R' \text{ nên } \overline{AI} = 2\overline{I'A} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} - 0 = 2(0 - 2\sqrt{3}t) \\ 0 - 2 = 2(2 - 2t - 2) \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Với $t = \frac{1}{2}$, suy ra $I'(\sqrt{3}; 3)$. Phương trình đường tròn (C'): $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4$

Câu 14. Trong mặt phẳng oxy cho (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5; 1)$ biết (C') cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm I (1; -2), bán kính $R = \sqrt{3}$

Phương trình đường thẳng nối 2 tâm IM: $3x - 4y - 11 = 0$

Gọi $H(x; y)$ là trung điểm AB.

$$\text{Ta có } \begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{5} \\ y = \frac{-29}{10} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{-11}{10} \end{cases}$$

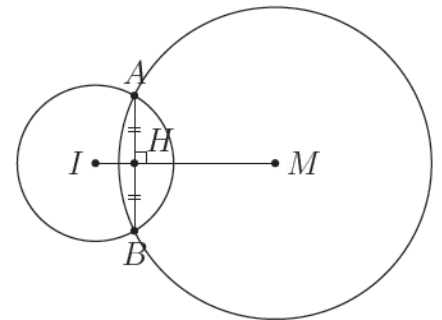
Suy ra $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ hoặc $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$

□ Với $H(\frac{-1}{5}; \frac{-29}{10})$ ta có $R'^2 = 43$

Phương trình (C'): $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 43$.

□ Với $H(\frac{11}{5}; \frac{-11}{10})$ ta có $R'^2 = 13$

Phương trình (C'): $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$



Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ hệ oxy cho đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn

$(C_1): (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 8$; $(C_2): (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên.

Lời giải.

Gọi I, I_1, I_2, R, R_1, R_2 lần lượt là tâm và bán kính của 3 đường tròn (C) , (C_1) và (C_2) .

Giả sử $I(t; t-1) \in d$. Theo giả thiết Câu toán: (C) tiếp xúc ngoài (C_1) và (C_2) nên

$$\begin{cases} II_1 = R + R_1 \\ II_2 = R + R_2 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} II_1 - R_1 &= II_2 - R_2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)^2 + (t+3)^2} - 2\sqrt{2} &= \sqrt{(t-5)^2 + (t+5)^2} - 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow t &= 0 \end{aligned}$$

Với $t=0$ suy ra $I(0; -1)$ và $R = \sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C) : $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

Dạng 3. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

1. Vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn

1.1. Phương pháp 1

Cho đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) có tâm I bán kính R

- Nếu $d(I; \Delta) < R$ thì (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d(I; \Delta) = R$ thì (Δ) tiếp xúc với (C)
- Nếu $d(I; \Delta) > R$ thì (Δ) và (C) không có điểm chung.

1.2. Phương pháp 2

Cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

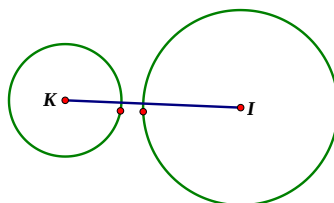
$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases} \quad (I)$$

- Nếu hệ (I) có hai nghiệm thì (Δ) cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu hệ (I) có một nghiệm thì (Δ) tiếp xúc (C) .
- Nếu hệ (I) vô nghiệm thì (Δ) và (C) không có điểm chung.

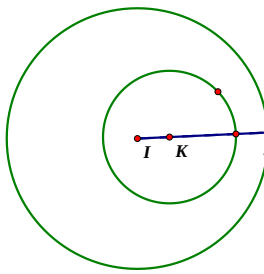
2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

- Cho hai đường tròn $(C_1); (C_2)$ có tâm lần lượt là $I; K$ bán kính $R_1; R_2$. Ta có

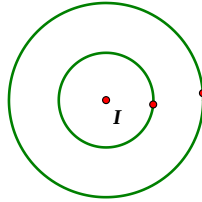
+) (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK > R_1 + R_2$



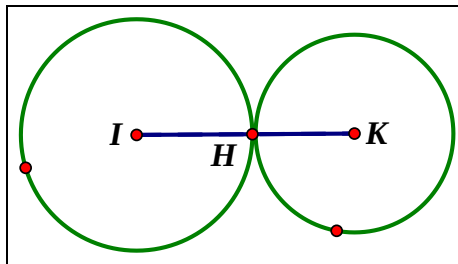
+) (C_1) và (C_2) đựng nhau (không có điểm chung) khi và chỉ khi $IK < |R_1 - R_2|$



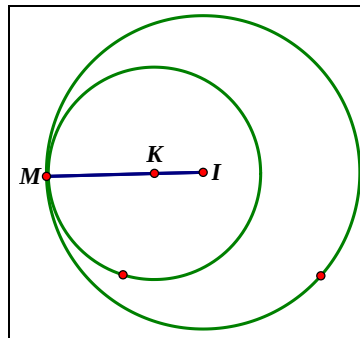
+) (C_1) và (C_2) đồng tâm (không có điểm chung) khi và chỉ khi $I \equiv K; R_1 \neq R_2$



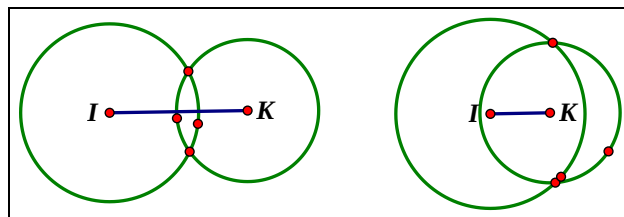
+) (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $I_1I_2 = R_1 + R_2$



+) (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong khi và chỉ khi $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$



+) (C_1) và (C_2) cắt nhau khi và chỉ khi $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$



Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ và đường tròn (C):

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

a) Chứng minh $M(2;1)$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=3$. Ta có

$IM = 2 < 3 = R$. Do đó M nằm trong (C).

b) $d(I; \Delta) = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ oxy, cho 2 đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(1; 3) và bán kính $R=5$.

Đường tròn (C') có tâm I'(3; 1) và bán kính $R = \sqrt{13}$.

Mà $II' = 2\sqrt{2}$, do đó $|R - R'| < II' < |R + R'|$ nên 2 đường tròn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B.

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ Và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$. Tìm m để (C) cắt Δ tại 2 điểm phân biệt.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính $R=3$

Để (C) cắt Δ tại 2 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3 \Leftrightarrow 5m^2 + 5m^2 + 17 > 0. \text{ Đúng với mọi } m.$$

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và đường thẳng $\Delta: mx - y - 3m - 2 = 0$. Biện luận theo m số giao điểm của Δ và (C).

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính $R = \sqrt{5}$.

$$\text{Ta có } h = d(I; \Delta) = \frac{|m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

□ Nếu $h < \sqrt{5} \Leftrightarrow m > 2$ hoặc $m < -\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

□ Nếu $h = \sqrt{5} \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc (C).

□ Nếu $h > \sqrt{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 2 \Rightarrow \Delta$ không cắt (C).

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$ và: $(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$. Tìm m để hai đường tròn tiếp xúc trong.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm O(0; 0) và bán kính $R = 1$.

Đường tròn (C_m) có tâm $I(m+1; -2m)$ và bán kính $R = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$.

$$\text{Mà } OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}.$$

Để 2 đường tròn tiếp xúc trong thì $R' - R = OI$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5} - 1 = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}$$

Giai phương trình ta được $m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{5}$.

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn: $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và $(C_2): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$. Viết phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường tròn đó.

Lời giải

(C_1) có tâm $I_1(1; -2)$ và bán kính $R_1 = 3$

(C_2) có tâm $I_2(-1; 1)$ và bán kính $R_2 = 4$

$$I_1I_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{13}.$$

Ta thấy $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Gọi điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng cần tìm

$$\text{Tọa độ } M \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

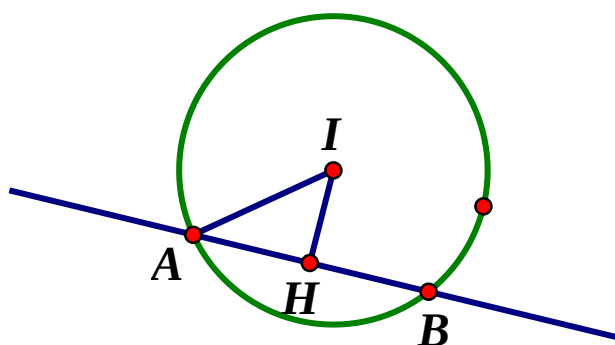
$$\text{Lấy } (1) - (2) \Rightarrow -4x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 5 = 0 \quad (3)$$

Nhận thấy $M(x; y)$ luôn thỏa mãn phương trình (3)

Suy ra đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn là: $2x - 3y - 5 = 0$.

Câu 22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: 3x + 4y - 2 = 0$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Lời giải



- Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ có tâm $I(-1; 4)$ và bán kính $R = 5$

- Đường thẳng d' song song với đường thẳng d nên phương trình của d' là: $3x + 4y + m = 0 (m \neq -2)$

- Kẻ $IH \perp d' \Rightarrow HA = HB = 3$ và IH là khoảng cách từ I đến d' : $IH = \frac{|-3 + 4 + m|}{5} = \frac{|m+1|}{5}$

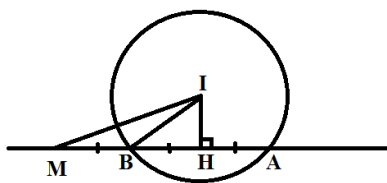
- Xét tam giác vuông IHA : $IH^2 = IA^2 - HA^2 = 25 - 9 = 16$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{25} = 16 \Leftrightarrow |m+1| = 20 \Rightarrow \begin{cases} m = 19 \Rightarrow d': 3x + y + 19 = 0 \\ m = -21 \Rightarrow d': 3x + y - 21 = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy có hai đường thẳng là: $3x + 4y + 19 = 0$; $3x + 4y - 21 = 0$.

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm $M(7;3)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 3MB$

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 5$.

Ta có $IM = 2\sqrt{10} > R \Rightarrow M$ nằm ngoài đường tròn (C)

Gọi H là trung điểm AB mà $MA = 3MB \Rightarrow B$ là trung điểm MH

$$\text{Ta có } \begin{cases} IH^2 + MH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH^2 + 4BH^2 = 40 \\ IH^2 + BH^2 = 25 \end{cases} \text{ suy ra } IH^2 = 20 \Rightarrow IH = 2\sqrt{5}$$

Đường thẳng d qua $M(7;3)$ và có VTPT $\vec{n} = (a;b)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ có phương trình là:

$$a(x-7) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 7a - 3b = 0$$

$$IH = d(I, d) = \frac{|a + b - 7a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |3a + b| = \sqrt{5}\sqrt{a^2 + b^2}$$

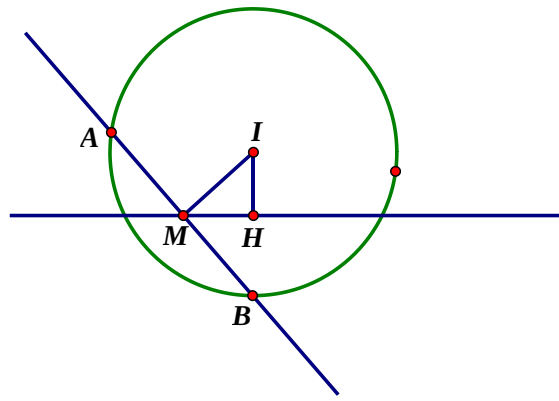
$$9a^2 + 6ab + b^2 = 5(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{2} \\ a = -2b \end{cases}$$

$$\bullet \quad a = \frac{b}{2} \Rightarrow d: x + 2y - 13 = 0$$

$$\bullet \quad a = -2b \Rightarrow d: 2x - y - 11 = 0$$

Câu 24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ và điểm $M(-1;2)$. Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho độ dài dây cung AB nhỏ nhất.

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ bán kính $R=5$. Ta có: $IM = \sqrt{5} \Rightarrow IM < R$ nên điểm M nằm trong đường tròn (C) , kẻ $IH \perp d \Rightarrow IH \leq IM$ và $HA = HB = \frac{AB}{2}$. Ta có $AH^2 = IA^2 - IH^2 = 25 - IH^2$, AB nhỏ nhất khi và chỉ khi AH nhỏ nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất $\Leftrightarrow IH = IM \Leftrightarrow H \equiv M$. Khi đó đường thẳng d đi qua M và vuông góc với IM nên đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM} = (-2;1)$. Vậy phương trình đường thẳng d là: $-2(x+1)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow -2x+y-4=0$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $K(5;-2)$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung AB có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

- Đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi a với $a > 0$ là bán kính đường tròn (C') , phương trình (C') là: $(C'): (x-5)^2 + (y+2)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 - a^2 = 0$. Tọa độ giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') là nghiệm hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 - a^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình trên ta được phương trình $8x - 8y - 29 + a^2 = 0$ là phương trình đường thẳng đi qua hai giao điểm A, B của hai đường tròn, kẻ $IH \perp AB$ suy ra H là trung điểm của AB và

$$AH = HB = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = d(I, AB)$$

$$\text{Nên ta có } \frac{|8 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - 29 + a^2|}{\sqrt{8^2 + (-8)^2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} \Leftrightarrow |a^2 - 37| = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 37 = 24 \\ a^2 - 37 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 61 \\ a^2 = 13 \end{cases}$$

Có hai đường tròn là: $(C'): (x-5)^2 + (y+2)^2 = 13; (C'): (x-5)^2 + (y+2)^2 = 61$

Câu 26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, Lập phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài (C) .

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=1$.

Gọi $K(a;b)$ và $R > 0$ là tâm và bán kính đường tròn (C') tiếp xúc với hai trục tọa độ nên ta có

$$|a| = |b| = R \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases} \text{ từ } |a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

+Nếu $a = b > 0 \Rightarrow K(a; a)$ phương trình $(C'): (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK = R + R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a-1)^2} = 1+a \Leftrightarrow a^2 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 2\sqrt{2} \\ a = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

Có 2 đường tròn là: $(C'): (x-3-2\sqrt{2})^2 + (y-3-2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$

$(C'): (x-3+2\sqrt{2})^2 + (y-3+2\sqrt{2})^2 = 17-12\sqrt{2}$

+Nếu $a = b < 0 \Rightarrow K(a; a)$ phương trình $(C'): (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK = R + R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a-1)^2} = 1-a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ (loại)

+Nếu $a = -b \Rightarrow K(a; -a)$ phương trình $(C'): (x-a)^2 + (y+a)^2 = a^2$ hai đường tròn tiếp xúc ngoài khi và chỉ khi $IK = R + R' \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a+1)^2} = 1+|a| \Leftrightarrow 2a^2 + 2 = (1+|a|)^2 \quad (1)$

TH 1: $a > 0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 2 = (1+a)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Phương trình đường tròn là: $(C'): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

TH2: $a < 0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 2 = (1-a)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Phương trình đường tròn là: $(C'): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Có 4 đường tròn thỏa mãn.

Dạng 4: Tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm I(a; b) và bán kính R.

a) Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ thì tiếp tuyến đó qua M và nhận vector $\overrightarrow{IM}(x_0 - a; y_0 - b)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.

b) Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện tiếp xúc: Δ tiếp xúc (C) $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$ để xác định tiếp tuyến.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn (C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A(3; -4).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm B(5; -2).

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với

d: $x + y + 2014 = 0$.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với trục tung một góc 45°

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm I(1; -2) và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Do A thuộc (C) nên tiếp tuyến Δ qua A và nhận $\overrightarrow{IA} = (2; -2)$ làm vector pháp tuyến

Vậy phương trình $\Delta: x - y - 7 = 0$.

b) Gọi $\vec{n} = (a; b)$ là vector pháp tuyến của Δ , Do đó

$\Delta: a(x-5) + b(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow ax + by - 5a + 2b = 0$

Do Δ tiếp xúc với (C) nên

$$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-4a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

Với $a = b$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = 1$. Phương trình tiếp tuyến Δ là $x + y - 3 = 0$.

Với $a = -b$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = -1$. Phương trình tiếp tuyến Δ là $x - y - 7 = 0$.

c) Tiếp tuyến Δ vuông góc d nên Δ có dạng $x - y + c = 0$.

$$\text{Mà } d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3+c|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -7 \end{cases}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn: $x - y + 1 = 0$ hoặc $x - y - 7 = 0$.

d) Gọi Δ có dạng $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

$$\text{Theo Câu ra ta có } \begin{cases} d(I; \Delta) = R \\ \cos(\vec{n}; \vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2} \\ \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$\text{Với } a = b \Rightarrow |c - b| = 4|b| \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5b \\ c = -3b \end{cases}$$

+ TH1: chọn $b = 1 \Rightarrow c = 5; a = 1$ ta được $\Delta: x + y + 5 = 0$.

+ TH2: chọn $b = 1 \Rightarrow c = -3; a = 1$ ta được $\Delta: x + y - 3 = 0$.

$$\text{Với } a = -b \Rightarrow |c - 3b| = 4|b| \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7b \\ c = -b \end{cases}$$

+ TH1: chọn $b = -1 \Rightarrow c = -7; a = 1$ ta được $\Delta: x - y - 7 = 0$.

+ TH2: chọn $b = -1 \Rightarrow c = 3; a = 1$ ta được $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Vậy có 4 tiếp tuyến cần tìm là $\Delta: x + y + 5 = 0$; $\Delta: x + y - 3 = 0$; $\Delta: x - y - 7 = 0$; $\Delta: x - y + 1 = 0$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Lời giải:

(C_1) có tâm $I_1(0;1)$ và bán kính $R_1 = 2$.

(C_2) có tâm $I_2(4;4)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Có $I_1 I_2 = 5 > R_1 + R_2$ nên 2 đường tròn ở ngoài nhau, như vậy có 4 tiếp tuyến chung.

TH1: Nếu tiếp tuyến song song với trục Ox thì Δ có dạng $x + c = 0$.

$$\text{Ta có } d(I_1; \Delta) = d(I_2; \Delta) \Leftrightarrow |c| = |4 + c| \Leftrightarrow c = -2$$

$$\text{Vậy tiếp tuyến } \Delta: x - 2 = 0.$$

TH2: Nếu Δ không song song với trục Ox thì phương trình của $\Delta: y = ax + b$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} d(I_1; \Delta) = 2 \\ d(I_1; \Delta) = d(I_2; \Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \\ \frac{|-1+b|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|-4a-4+b|}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{-7}{24} \\ b = \frac{37}{12} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \Delta: 3x - 4y + 14 = 0; \Delta: 3x - 4y - 6 = 0; \Delta: 7x + 24y - 74 = 0$$

$$\text{Vậy có 4 tiếp tuyến } \Delta: x - 2 = 0; \Delta: 3x - 4y + 14 = 0; \Delta: 3x - 4y - 6 = 0; \text{ và } \Delta: 7x + 24y - 74 = 0.$$

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C_1): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ và $(C_2): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn.

Lời giải:

$$(C_1) \text{ có tâm } I_1(2;3) \text{ và bán kính } R_1 = \sqrt{2}.$$

$$(C_2) \text{ có tâm } I_2(1;2) \text{ và bán kính } R_2 = 2\sqrt{2}.$$

Ta có $I_1I_2 = \sqrt{2} = R_2 - R_1$ do đó 2 đường tròn tiếp xúc trong. Như vậy có 1 tiếp tuyến chung.

Tọa độ tiếp điểm của 2 đường tròn là nghiệm hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow M(3;4).$$

Tiếp tuyến chung Δ là đường thẳng qua $M(3;4)$ và nhận $\overrightarrow{I_1I_2} = (-1; -1)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: x + y - 7 = 0$.

Câu 30. Trong mặt phẳng (Oxy) , cho $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA = 2OB$

Lời giải

$$(C) \text{ có tâm } I(2;1), \text{ bán kính } R = \sqrt{5}$$

Tiếp tuyến cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại $A; B$ sao cho $OA = 2OB \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = \pm \frac{OB}{OA} = \pm \frac{1}{2}$.

Trường hợp 1: Với $k = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta: y = \frac{1}{2}x + b$

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến của } (C) \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$

Trường hợp 2: Với $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y = -\frac{1}{2}x + m$

$$d \text{ là tiếp tuyến của } (C) \Leftrightarrow d(I; d) = R \Leftrightarrow \frac{|4 - 2m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy có 4 tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện.

Câu 31. Trong mặt phẳng (Oxy) , cho $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Tìm $M \in \Delta: x + y + 2 = 0$ sao cho qua M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn diện tích tứ giác $MAIB$ bằng 10, với I là tâm đường tròn.

Lời giải

(C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = \sqrt{5} = AI$

$$S_{MAIB} = 2S_{\triangle AMI} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AI \Rightarrow AM = \frac{S_{MAIB}}{AI} = 2\sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{AM^2 + AI^2} = 5$$

$$M \in \Delta: x + y + 2 = 0 \Rightarrow M(a; 2-a)$$

$$MI = 5 \Leftrightarrow (2-a)^2 + (1-a)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 - 3a - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 điểm thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} M(5; -3) \\ M(-2; 4) \end{cases}$.

Câu 32. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm hai điểm $A(1; -1); B(1; 3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A .

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B .

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3; -1)$ bán kính $R = \sqrt{3^2 + 1 - 6} = 2$.

a) Ta có: $IA = 2 = R; IB = 2\sqrt{5} > R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA} = (2; 0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$$2(x-1) + 0(y+1) = 0 \text{ hay } x = 1$$

c) Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$$a(x-1) + b(y-3) = 0 \text{ (với } a^2 + b^2 \neq 0) \text{ hay } ax + by - a - 3b = 0$$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a - b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3b = 4a \end{cases}$$

+ Nếu $b = 0$, chọn $a = 1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x = 1$.

+ Nếu $3b = 4a$, chọn $a = 3, b = 4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x + 4y - 15 = 0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x = 1$ và $3x + 4y - 15 = 0$

Câu 33. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x + 3y + 4 = 0$.

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45° .

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2; -2)$, bán kính $R = 3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3; 2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng $-3x + 2y + c = 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-10 + c|}{\sqrt{13}} = 3 \Leftrightarrow c = 10 \pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x + 2y + 10 \pm 3\sqrt{13} = 0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow (2a - 2b + c)^2 = 9(a^2 + b^2) (*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45° suy ra

$$\cos(\Delta; Ox) = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow a = b \text{ hoặc } a = -b$$

TH1: Nếu $a = b$ thay vào (*) ta có $18a^2 = c^2 \Leftrightarrow \pm c = 3\sqrt{2}a$, chọn $a = b = 1 \Rightarrow c = \pm 3\sqrt{2}$ suy ra

$$\Delta: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0$$

TH2: Nếu $a = -b$ thay vào (*) ta có $18a^2 = (4a + c)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = (3\sqrt{2} - 4)a \\ c = -(3\sqrt{2} + 4)a \end{cases}$

Với $c = (3\sqrt{2} - 4)a$, chọn $a = 1, b = -1, c = (3\sqrt{2} - 4) \Rightarrow \Delta: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Với $c = -(3\sqrt{2} + 4)a$, chọn $a = 1, b = -1, c = -(3\sqrt{2} + 4) \Rightarrow \Delta: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_{1,2}: x + y \pm 3\sqrt{2} = 0, \Delta_3: x - y + 3\sqrt{2} - 4 = 0$ và

$$\Delta_4: x - y - 3\sqrt{2} - 4 = 0$$

Câu 34. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$$(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \text{ và } (C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0.$$

Lời giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0;2)$ bán kính $R_1 = 3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3;-4)$ bán kính $R_2 = 3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

$$\Delta \text{ là tiếp tuyến chung của } (C_1) \text{ và } (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1, \Delta) = 3 \\ d(I_2, \Delta) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2} (*) \\ |3a - 4b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } |2b + c| = |3a - 4b + c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{-3a + 2b}{2} \end{cases}$$

TH1: Nếu $a = 2b$ chọn $a = 2, b = 1$ thay vào $(*)$ ta được $c = -2 \pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$

TH2: Nếu $c = \frac{-3a + 2b}{2}$ thay vào $(*)$ ta được $|2b - a| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $3a + 4b = 0$

+ Với $a = 0 \Rightarrow c = b$, chọn $b = c = 1$ ta được $\Delta: y + 1 = 0$

+ Với $3a + 4b = 0 \Rightarrow c = 3b$, chọn $a = 4, b = -3, c = -9$ ta được $\Delta: 4x - 3y - 9 = 0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là: $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0, y + 1 = 0, 4x - 3y - 9 = 0$.

Câu 35. Trong hệ trục Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$, $(C_2): (x-4)^2 + (y-5)^2 = 8$ và đường thẳng $d: x + y + m = 0$. Tìm m biết đường thẳng d tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Lời giải

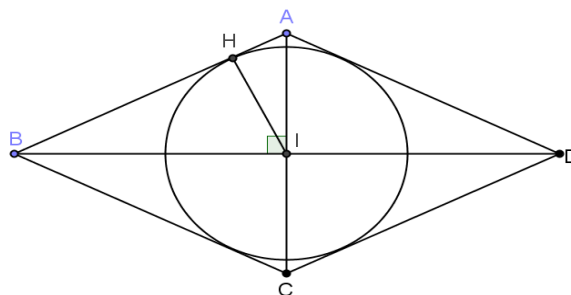
(C_1) có tâm $I_1(1;2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$ và (C_2) có tâm $I_2(4;5)$, bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$.

Vì đường thẳng d tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_1) và (C_2) nên ta có

$$\begin{cases} d(I_1, d) = R_1 \\ d(I_2, d) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|m+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \frac{|9+m|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -5$$

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ và điểm A thuộc đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết rằng $BD = 2AC$ và hoành độ điểm A không nhỏ hơn 2.

Lời giải



Trong tam giác IAB có $\frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{IH^2} \Rightarrow \frac{5}{4IA^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} IA = \sqrt{10} \\ IB = 2\sqrt{10} \end{cases}$

Giả sử $A(2a-3; a)$ từ $\begin{cases} IA = \sqrt{10} \\ x_A \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$ hay $A(1; 2)$. Suy ra $C(3; -4)$

Phương trình đường thẳng BD: $x-3y-5=0$. Kết hợp với $IB = ID = 2\sqrt{10} \Rightarrow$ Tọa độ các điểm B, D là

ng nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-3y-5=0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8; y=1 \\ x=-4; y=-3 \end{cases}$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD là $A(1; 2), B(8; 1), C(3; -4), D(-4; -3)$ hoặc

$A(1; 2), B(-4; -3), C(3; -4), D(8; 1)$.

Câu 37. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y+1=0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in d$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB thỏa mãn khoảng cách từ $N\left(0; \frac{1}{2}\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$. Ta có điểm M thuộc d nên $M(a; a+1)$.

Gọi K trung điểm của MI thì $K\left(\frac{a+1}{2}; \frac{a-1}{2}\right)$

Vì tam giác $\square MAI, \square MBI$ vuông tại A, B nên $KA = KB = \frac{1}{2}MI$

Đường tròn (C') tâm K , đường kính MI nên có phương trình

$$\left(x - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a-1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2a + 5}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - (a+1)x - (a-1)y - a - 2 = 0$$

Đường thẳng AB là giao của $(C) \cap (C')$ nên tọa độ điểm A, B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - (a+1)x - (a-1)y - a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1-a)x - (a+3)y - a + 2 = 0$$

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $(1-a)x - (a+3)y - a + 2 = 0$.

Khoảng cách từ N đến AB là

$$d_{(N;d)} = \frac{|7-a|}{2\sqrt{(1-a)^2 + (a+3)^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 14a + 49}{2a^2 + 4a + 10}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \left[\frac{34}{16} - \frac{(2a+3)^2}{2a^2 + 4a + 10} \right]} \leq \frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$\text{Max} f(a) = \frac{\sqrt{34}}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Vậy $M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Dạng 5: Tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

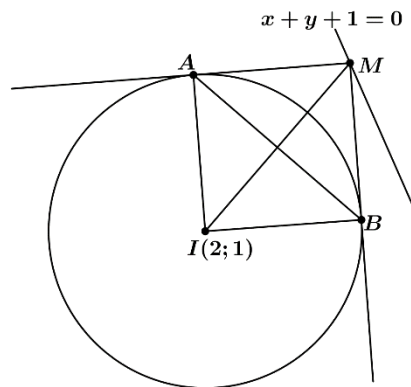
Phương pháp tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C)

➤ Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I .

- Bước 2. Tìm tọa độ tâm I . Giả sử: $I \begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa x và y theo m ta được phương trình $F(x; y) = 0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của x hoặc y .
- Bước 5. Tập hợp điểm I là $F(x; y) = 0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

Câu 38. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy . Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ và đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90° .

Lời giải



M thuộc d suy ra $M(t; -1-t)$. Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì $MAIB$ là hình vuông (A, B là 2 tiếp điểm). Do đó $AB = MI = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

Ta có: $MI = \sqrt{(2-t)^2 + (2+t)^2} = \sqrt{2t^2 + 8} = 2\sqrt{3}$

$$\text{- Do đó: } 2t^2 + 8 = 12 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{2} \rightarrow M_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2} - 1) \\ t = \sqrt{2} \rightarrow M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

Câu 39. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn

a) $AB = \frac{12\sqrt{34}}{17}$

b) Tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$

c) Tứ giác $MAIB$ có chu vi bằng $2(3 + 2\sqrt{2})$

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông.

Lời giải

d) Tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI = IA\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

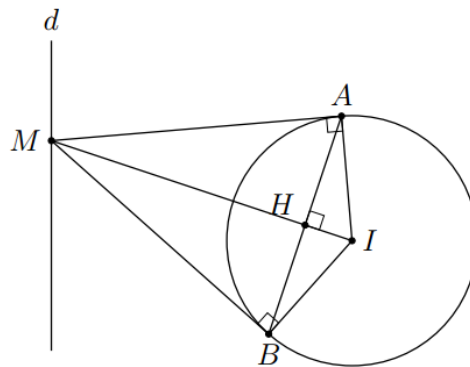
$$\begin{aligned} MI = 3\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 3\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; \frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Câu 40. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: x + y + 2 = 0$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn :

- Tam giác MAB vuông,
- Tam giác MAB đều,
- Hai tiếp tuyến MA, MB tạo với nhau một góc bằng 60° ,
- Tam giác IAB đều.

Lời giải



a) Ta có đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=3$.

Theo giả thiết Câu toán tam giác MAB vuông cân tại M suy ra tứ giác $MAIB$ là hình vuông nên $MI = IA\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned} MI = 3\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = 3\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

Vậy $M\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; \frac{-3-\sqrt{11}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

b) Tam giác MAB đều, suy ra $\angle AMI = 30^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\sin \angle AMI} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned}
MI = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^3} = 6 \\
&\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 23 = 0 \\
&\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{47}}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2}; \frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right) \text{ hoặc } M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2}; \frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right).$$

c) Theo giả thiết ta chia Câu toán thành 2 trường hợp

• **Trường hợp 1.** $AMB = 60^\circ \Rightarrow \triangle MAB$ đều, suy ra $AMI = 30^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\sin AMI} = 2IA = 6$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned}
MI = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^3} = 6 \\
&\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 23 = 0 \\
&\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{47}}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{-1+\sqrt{47}}{2}; \frac{-3-\sqrt{47}}{2}\right) \text{ hoặc } M\left(\frac{-1-\sqrt{47}}{2}; \frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right).$$

• **Trường hợp 2.** $AMB = 120^\circ$, suy ra $AMI = 60^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\sin AMI} = \frac{2IA}{3} = 2\sqrt{3}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned}
MI = 2\sqrt{3} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^3} = 2\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}
\end{aligned}$$

Vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

d) Tam giác IAB đều, suy ra $AIM = 30^\circ$.

Xét tam giác MAI vuông tại A , ta có $MI = \frac{IA}{\cos AIM} = \frac{2IA}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Do $M \in d$ nên $M(m; -2-m)$. Ta có

$$\begin{aligned}
MI = 2\sqrt{3} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^3} = 2\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}
\end{aligned}$$

Vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 41. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ và đường thẳng $d: x-5y-4=0$. Tìm trên (C) và trên d điểm N sao cho

a) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua điểm $A(-7; -1)$.

b) Hai điểm M, N đối xứng nhau qua Ox .

Lời giải

a) Do $N \in d$ nên $N(5t+4;t)$. Điểm M đối xứng với N qua A , suy ra $M(-18-5t;-2-t)$.

Mặt khác $M \in (C)$, nên

$$(-18-5t+2)^2 + (-2-t-3)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 26t^2 + 170t + 276 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -3 \text{ hoặc } t = -\frac{46}{13}.$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $M(-3;1), N(-11;-3)$ hoặc $M\left(-\frac{4}{13}; \frac{20}{13}\right), N\left(-\frac{178}{13}; -\frac{46}{13}\right)$.

b) Do $N \in d$ nên $N(5t+4;t)$. Điểm M đối xứng với N qua Ox nên $M(5t+4;-t)$.

Mặt khác, $M \in (C)$ nên

$$(5t+4+2)^2 + (-t-3)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 26t^2 + 66t + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = -\frac{20}{13}.$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là : $M(-1;1), N(-1;-1)$ hoặc $M\left(-\frac{48}{13}; \frac{20}{13}\right), N\left(-\frac{48}{13}; -\frac{20}{13}\right)$.

Câu 42. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $d: 2x + y + 4 = 0$. Tìm trên (C) điểm M và trên d điểm N sao cho

a) MN có độ dài nhỏ nhất.

b) MN có độ dài lớn nhất.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có

$$d(I; d) = \frac{|2+4+4|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5} > R.$$

Do đó d không cắt (C) .

Gọi M_1, M_2 là đường kính của đường tròn (C) và vuông góc với d . Ta thấy với M là một điểm bất kỳ thuộc (C) thì

$$\min\{d(M_1, d); d(M_2, d)\} \leq d(M, d) \leq \max\{d(M_1, d); d(M_2, d)\}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv M_1$ hoặc $M \equiv M_2$.

Đường thẳng M_1M_2 đi qua tâm I và vuông góc với d nên có phương trình $x - 2y + 2 = 0$.

$$\text{Tọa độ điểm } M_1, M_2 \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Suy ra $M_1(0;1), M_2(4;3)$. Ta có $d(M_1, d) = \sqrt{5}$ và $d(M_2, d) = 3\sqrt{5}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của tâm I trên d .

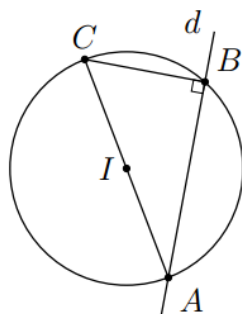
$$\text{Do đó tọa độ điểm } N \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

a) Với $M_1(0;1)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là nhỏ nhất.

b) Với $M_2(4;3)$ và $N(-2;0)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán là lớn nhất.

Câu 43. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 5y - 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$. Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường tròn (C) và đường thẳng d , biết A có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC vuông ở B .

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{13}$.

Tọa độ giao điểm của A và B là nghiệm của hệ

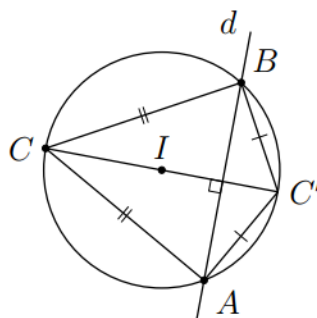
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0 \\ x - 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Do A có hoành độ dương nên ta chọn $A(2; 0), B(-3; -1)$.

Theo giả thiết, ta có $ABC = 90^\circ$ nên AC là đường kính của đường tròn, tức điểm C đối xứng với điểm A qua tâm I , suy ra $C(-4; 4)$.

Câu 44. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - y - 7 = 0$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Chứng minh (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC cân tại C

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{10}$. Ta có

$$d(I, d) = \frac{|3 - 2 - 7|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} < R.$$

Điều đó chứng tỏ d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B .

Vì AB là dây cung của (C) nên đường trung trực Δ của đoạn thẳng AB qua tâm I và vuông góc với d nên $\Delta: x + 3y - 7 = 0$.

Tam giác ABC cân tại C nên C thuộc Δ . Hơn nữa C thuộc (C) nên tọa độ điểm C thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x+3y-7=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy $C(-2;3)$ hoặc $C(4;1)$ thỏa mãn yêu cầu Câu toán.

Câu 45. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $d: x + my - 2m + 3 = 0$. Gọi I làm tâm của (C) . Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn:

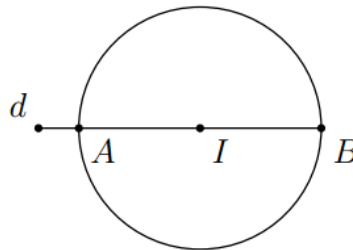
- AB lớn nhất.
- $AB = 2$.
- Diện tích ΔIAB lớn nhất.
- Diện tích ΔIAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và AB lớn nhất.

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Dây cung AB lớn nhất khi và chỉ khi AB là đường kính của (C) nghĩa là đường thẳng d đi qua tâm I nên $-2 - 2m - 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Vậy $m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.



$$d(I, d) = d(I, AB) = IH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 1$$

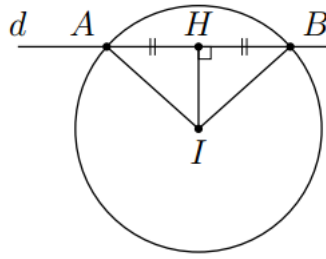
b) Gọi H là trung điểm AB . Khi đó $IH \perp AB$ nên $\Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$

$$\Leftrightarrow |1 - 4m| = \sqrt{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = \frac{8}{15}.$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = \frac{8}{15}$ là các giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu Câu toán.



c) d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi $d(I, d) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1 + m^2}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow |1 - 4m| < \sqrt{2 + 2m^2}$$

$$\Leftrightarrow 14m^2 - 8m - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{30}}{14} < m < \frac{4 + \sqrt{30}}{14}.$$

Gọi H là trung điểm AB , suy ra $IH \perp AB$.

$$\text{Ta có } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin AIB = \sin AIB.$$

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất khi $\sin AIB$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ$

$$\text{Khi đó tam giác } IAB \text{ vuông cân tại } I \text{ nên } IH = \frac{IA}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow d(I, d) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{cases}$$

$$\text{d) Để } d \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt khi } d(I, d) < R \Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{30}}{14} < m < \frac{4 + \sqrt{30}}{14}.$$

Gọi H là trung điểm AB , suy ra $IH \perp AB$. Theo giả thiết Câu toán, ta có

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin AIB = \sin AIB \Leftrightarrow \begin{cases} AIB = 60^\circ \\ AIB = 120^\circ \end{cases}$$

Mặt khác, theo giả thiết AB lớn nhất nên $AIB = 120^\circ$. Suy ra $IAH = 30^\circ$.

$$\text{Trong tam giác vuông } IAH, \text{ ta có } IH = IA \cdot \sin IAH = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên}$$

$$\Leftrightarrow d(I, d) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

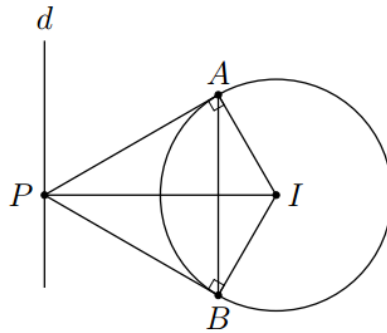
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|1 - 4m| = \sqrt{1 + m^2} \Leftrightarrow 31m^2 - 16m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{31}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện để } d \text{ cắt } (C) \text{ tại hai điểm phân biệt ta được } m = \frac{8 \pm \sqrt{33}}{31}.$$

Câu 46. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho :

- Tam giác PAB đều.
- Tam giác PAB vuông.
- Góc giữa hai tiếp tuyến PA, PB bằng 60° .

Lời giải



a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.

Tam giác PAB đều nên $APB = 60^\circ$, suy ra $API = 30^\circ$.

Xét tam giác API vuông tại A , ta có:

$$IP = \frac{IA}{\sin API} = 2IA = 6.$$

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I , bán kính $R' = IP = 6$.

Mặt khác, đề trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu Câu toán thì d tiếp xúc với (C') nên

$$d(I, d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 6 \Leftrightarrow m = 19 \text{ hoặc } m = -41.$$

Vậy $m = -19$ hoặc $m = -41$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

b) Tam giác PAB vuông, suy ra $APB = 90^\circ$. Do đó, tứ giác $PAIB$ là hình vuông, suy ra

$$IP = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I , bán kính $R' = IP = 3\sqrt{2}$.

Mặt khác, đề trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu bài toán thì d tiếp xúc với (C') nên

$$d(I, d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -11 \pm 15\sqrt{2}.$$

Vậy $m = -11 \pm 15\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

c) Trường hợp 1: $APB = 60^\circ$ (đã làm ở trên)

Trường hợp 2: $APB = 120^\circ$, suy ra $API = 60^\circ$.

Xét tam giác API vuông tại A , ta có $IP = \frac{IA}{\sin API} = \frac{2IA}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Do đó P thuộc đường tròn (C') có tâm I , bán kính $R' = IP = 2\sqrt{3}$.

Mặt khác, đề trên d có duy nhất một điểm P thỏa yêu cầu Câu toán thì d tiếp xúc với (C') nên

$$d(I, d) = R' \Leftrightarrow \frac{|3+8+m|}{\sqrt{9+16}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow m = -11 \pm 10\sqrt{3}.$$

Vậy $m=19$ hoặc $m=-41$ hoặc $m=-11\pm 10\sqrt{3}$ là giá trị cần tìm thỏa yêu cầu Câu toán.

Dạng 6. Tìm quỹ tích tâm đường tròn

Phương pháp:

Phương pháp tìm tập hợp các tâm I của đường tròn (C)

➤ Bước 1. Tìm giá trị của m để tồn tại tâm I .

- Bước 2. Tìm tọa độ tâm I . Giả sử: $I \begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$.
- Bước 3. Tìm mối liên hệ giữa x và y theo m ta được phương trình $F(x; y) = 0$.
- Bước 4. Dựa vào điều kiện của m ở bước 1 để giới hạn miền của x hoặc y .
- Bước 5. Tập hợp điểm I là $F(x; y) = 0$ cùng với phần giới hạn ở bước 4.

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy, cho phương trình đường cong (C) có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0.$$

- a) Tìm tham số m để (C) là đường tròn.
- b) Tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) .

Lời giải

- a) Tìm tham số m để (C) là đường tròn.

Điều kiện để (C) là đường tròn: $m^2 + 4(m+1)^2 - 3m - 14 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 5m - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases} \quad (1)$

- b) Tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) .

$$\text{Tâm } I(m; 2m+2) \Rightarrow \begin{cases} x_I = m \\ y_I = 2m+2 \end{cases} \Leftrightarrow y_I = 2x_I + 2.$$

Theo điều kiện (1) (câu a), ta được quỹ tích tâm I của (C) là một phần đường thẳng có phương trình: $y = 2x + 2$ ứng với $x < -2; x > 1$.

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) , biết (C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x - 8y + 15 = 0$ và có bán kính $R = 3$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C) .

(C) tiếp xúc với đường thẳng $d: 6x - 8y + 15 = 0$ và có bán kính $R = 3$, nên:

$$d(I, d) = R \Leftrightarrow \frac{|6x_I - 8y_I + 15|}{10} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_I - 8y_I - 15 = 0 \\ 6x_I - 8y_I + 45 = 0 \end{cases}.$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là hai đường thẳng song song có phương trình:

$$6x - 8y - 15 = 0 \text{ và } 6x - 8y + 45 = 0.$$

Câu 49. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) có bán kính $R = 2$, biết (C) tiếp xúc với đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C) .

(C) tiếp xúc với (C') $\begin{cases} I'(2;-3) \\ R'=4 \end{cases}$ và có bán kính $R=2$, nên:

$$II' = R + R' \Leftrightarrow (x_I - 2)^2 + (y_I + 3)^2 = 36.$$

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là đường tròn có phương trình :

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$$

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) , biết (C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 2x+3y-6=0$, $d_2: 3x-2y+9=0$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C) .

(C) tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 2x+3y-6=0$, $d_2: 3x-2y+9=0$, nên:

$$d(I, d_1) = d(I, d_2) \Leftrightarrow \frac{|2x_I - 3y_I + 6|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x_I - 2y_I + 9|}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I + y_I + 3 = 0 \\ x_I - y_I + 3 = 0 \end{cases}.$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là hai đường thẳng vuông góc có phương trình :

$$x + y + 3 = 0 \text{ và } x - y + 3 = 0.$$

Câu 51. Trong mặt phẳng Oxy, tìm quỹ tích điểm I là tâm của đường tròn (C) , biết (C) tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $A(0;1)$.

Lời giải

Gọi tâm $I(x_I; y_I)$ của đường tròn (C) .

(C) tiếp xúc với Ox và cắt Oy tại điểm $A(0;1)$ nên:

$$d(I, Ox) = AI \Leftrightarrow |y_I| = \sqrt{x_I^2 + (y_I - 1)^2} \Leftrightarrow y_I = \frac{1}{2}x_I^2 + \frac{1}{2}.$$

Quỹ tích tâm I của đường tròn (C) là đường Parabol có phương trình : $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 52. Cho $(C): x^2 + y^2 - 2mx - 2m^2y - 1 = 0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C) .

Lời giải

(C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = m; b = m^2; c = -1$

là phương trình đường tròn $\hat{U} \ a^2 + b^2 - c > 0 \ \hat{U} \ m^2 + (m^2)^2 + 1 > 0$

$$\hat{U} \ m^4 + m^2 + 1 > 0 \text{ (Lđ "m")}$$

Khi đó, (C) có tâm $I \begin{cases} x_I = m \\ y_I = m^2 \end{cases}$ $\text{P} \ y_I = x_I^2 (*)$. Tọa độ tâm I thỏa mãn $(*)$.

Vậy I nằm trên Parabol có phương trình $y = x^2$.

Câu 53. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng $D_1: x + 2y - 3 = 0$ và $D_2: x + 2y + 6 = 0$.

Lời giải

(C) có tâm $I(x_I; y_I)$. Theo giả thiết $d(I; D_1) = d(I; D_2)$

$$\hat{U} \frac{|x_I - 2y_I - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|x_I - 2y_I + 6|}{\sqrt{5}}$$

$$\hat{U} |x_I - 2y_I - 3| = |x_I - 2y_I + 6|$$

$$\hat{U} 2x_I - 4y_I - 9 = 0(*). \text{ Tọa độ tâm } I(x_I; y_I) \text{ thỏa mãn } (*)$$

Vậy tâm I nằm trên đường thẳng $2x - 4y - 9 = 0$.

Câu 54. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2(m-1)x - 4my + 3m + 11 = 0$. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn.

Lời giải

(C) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = m-1; b = 2m; c = 3m + 11$

là phương trình đường tròn $\hat{U} a^2 + b^2 - c > 0 \hat{U} (m-1)^2 + (2m)^2 - (3m+11) > 0$

$$\hat{U} 5m^2 - 5m - 10 > 0 \hat{U} \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$$

Khi đó, (C) có tâm $I \begin{cases} x_I = m-1 \\ y_I = 2m \end{cases}$ $\text{P} 2x_I - y_I + 2 = 0(*)$. Tọa độ tâm I thỏa mãn $(*)$.

Với điều kiện $\begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$ $\text{P} \begin{cases} x > 1 \\ x < -2 \end{cases}$

Vậy I nằm trên đường thẳng $2x - y + 2 = 0$ với $x > 1$ hoặc $x < -2$

Câu 55. Tìm tập hợp tâm I của đường tròn (C) biết (C) tiếp xúc ngoài với đường tròn $(C\phi): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ và có bán kính $R = 1$.

Lời giải

$(C\phi)$ có tâm $I\phi(2; -3)$ và bán kính $R\phi = 4$

(C) có tâm $I(x_I; y_I)$ và bán kính $R = 1$

Theo giả thiết ta có $II\phi = R + R\phi \hat{U} II\phi = 5 \hat{U} II\phi^2 = 25$

$$\hat{U} (x_I - 2)^2 + (y_I + 3)^2 = 25 (*)$$

Tọa độ tâm $I(x_I; y_I)$ thỏa mãn $(*)$

Vậy quỹ tích tâm I đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.