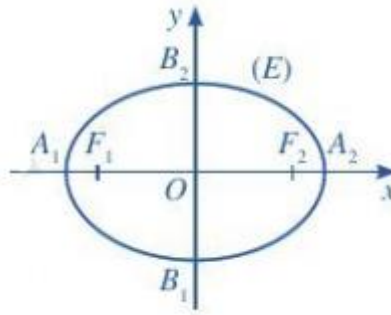


PHẦN A. LÝ THUYẾT

I. Đường elip

1. Định nghĩa đường elip



Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c .

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục tọa độ như trên, phương trình đường elip có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$$

Đây gọi là phương trình chính tắc của elip.

Chú ý

Đối với elip (E) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2 = a^2 - b^2$, ở đó $2c = F_1F_2$.

- Nếu điểm $M(x; y)$ thuộc elip (E) thì $-a \leq x \leq a$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường elip?

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$;

b) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = -1$

c) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

d) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$ nên chỉ có trường hợp d) là phương trình chính tắc của đường elip.

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một tiêu điểm là $F_2(5; 0)$ và đi qua điểm $M(0; 3)$.

Giải

Elip (E) có phương trình chính tắc là:

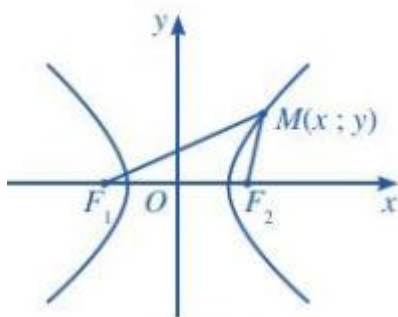
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$$

Do $F_2(5; 0)$ là một tiêu điểm của (E) nên $c = 5$. Điểm $M(0; 3)$ nằm trên (E) nên $\frac{0^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$. Do đó

$$b^2 = 9, \text{ suy ra } a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 25 = 34$$

Vậy elip (E) có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$.

II. Đường Hypebol



Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c .

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

2. Phương trình chính tắc của đường hypebol

Ta chứng minh được rằng:

Khi chọn hệ trục tọa độ như trên, phương trình đường hypebol có thể viết dưới dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0.$$

Đây gọi là phương trình chính tắc của hypebol.

Chú ý

Đối với hypebol (H) có phương trình chính tắc như đã nêu ở trên, ta có:

- $c^2 = a^2 + b^2$, ở đó $2c = F_1F_2$, và điều kiện $a > b$ là không bắt buộc.

- Nếu điểm $M(x; y)$ thuộc hypebol (H) thì $x \leq -a$ hoặc $x \geq a$.

Ví dụ 3. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường hypebol?

a) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = -1$

b) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$

c) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$

d) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

Giải

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > 0, b > 0$ nên các trường hợp b), c), d) là phương trình chính tắc của đường hypebol.

Ví dụ 4. Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_2(6; 0)$ và đi qua điểm $A_2(4; 0)$.

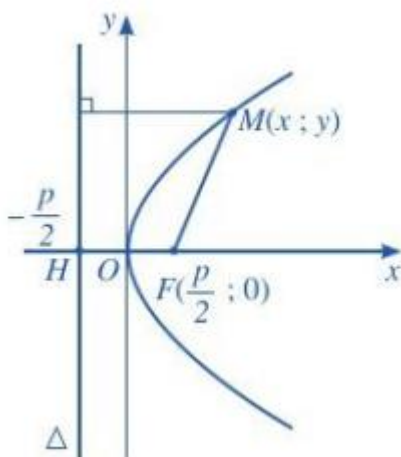
Giải

Giả sử hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > 0, b > 0$.

Do $A_2(4; 0)$ thuộc (H) nên $\frac{4^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1$, suy ra $a = 4$. Mà $F_2(6; 0)$ là tiêu điểm của (H) nên $c = 6$. Suy ra $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$.

Vậy hypebol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$.

III. Đường parabol



Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F .

Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ .

Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol

Khi chọn hệ trục tọa độ như trên, phương trình đường parabol có thể viết dưới dạng

$$y^2 = 2px \quad (p > 0).$$

Đây gọi là phương trình chính tắc của parabol.

Chú ý: Đối với parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 2px \quad (p > 0)$, ta có:

- Tiêu điểm là $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ và phương trình đường chuẩn là $x + \frac{p}{2} = 0$.

- Nếu điểm $M(x; y)$ thuộc parabol (P) thì $x \geq 0$.

Ví dụ 5. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình chính tắc của đường parabol?

a) $y^2 = -6x$;

b) $y^2 = 6x$

c) $x^2 = -6y$;

d) $x^2 = 6y$.

Giải

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$ nên chỉ có trường hợp b) là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ví dụ 6. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết:

a) (P) có tiêu điểm là $F(5; 0)$;

b) (P) đi qua điểm $M(2; 1)$.

Giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là: $y^2 = 2px \quad (p > 0)$.

a) Vì (P) có tiêu điểm là $F(5; 0)$ nên $\frac{p}{2} = 5$, tức là $p = 10$. Vậy phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 20x$.

b) Do điểm $M(2; 1)$ nằm trên (P) nên $1^2 = 2p \cdot 2$, tức là $p = \frac{1}{4}$. Vậy phương trình chính tắc của parabol

(P) là $y^2 = \frac{x}{2}$

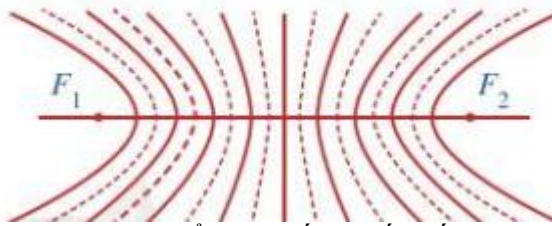
IV. Một số ứng dụng thực tiễn của ba đường conic

Ba đường conic có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Ta nêu ra một vài ứng dụng của ba đường conic.

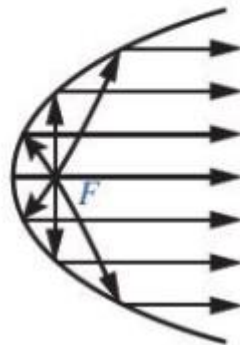
1. Năm 1911, nhà vật lý học người Anh là Ernest Rutherford (1871 - 1937) đã đề xuất mô hình hành tinh nguyên tử, trong đó hạt nhân nhỏ bé nằm tại tâm của nguyên tử, còn các electron bay quanh hạt nhân trên các quỹ đạo hình elip như các hành tinh bay quanh Mặt Trời



2. Trong vật lý, hiện tượng hai sóng gặp nhau tạo nên các gợn sóng ổn định gọi là hiện tượng giao thoa của hai sóng. Các gợn sóng có hình các đường hypebol gọi là các vân giao thoa



3. Với gương parabol, tia sáng phát ra từ tiêu điểm (tia tới) chiếu đến một điểm của parabol sẽ bị hắt lại (tia phản xạ) theo một tia song song (hoặc trùng) với trục của parabol



Tính chất trên có nhiều ứng dụng, chẳng hạn:

- Đèn pha: Bề mặt của đèn pha là một mặt tròn xoay sinh bởi một cung parabol quay quanh trục của nó, bóng đèn được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol đó. Các tia sáng phát ra từ bóng đèn khi chiếu đến bề mặt của đèn pha sẽ bị hắt lại theo các tia sáng song song, cho phép chúng ta quan sát được các vật ở xa.



- Chảo vệ tinh cũng có dạng như đèn pha. Điểm thu và phát tín hiệu của máy được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol



PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

Câu 1. Xác định các đỉnh, độ dài các trục, tiêu cự, tiêu điểm, tâm sai của elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) $4x^2 + 25y^2 = 100$

Lời giải.

a) Từ phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ (E), ta có $a = 2$; $b = 1$. Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-1)$, $B_2(0;1)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 4$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 2$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3};0)$; $F_2(\sqrt{3};0)$.

Tâm sai của c là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Ta có $4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. suy ra $a = 5$; $b = 2$ nên $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_2(0;2)$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 10$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 4$.

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{21};0)$; $F_2(\sqrt{21};0)$.

Tâm sai của c là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Câu 2. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip đi qua điểm $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F(-2;0)$.

b) Elip nhận $F_2(5;0)$ là một tiêu điểm và có độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ và tiêu cự bằng 2.

d) Elip đi qua hai điểm $M(2;-\sqrt{2})$ và $N(-\sqrt{6};1)$.

Lời giải.

a) Do (E) có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c = 2$. Suy ra $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4$.

Mặt khác, (E) đi qua điểm $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$ nên:

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{(5/3)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2+4} + \frac{25}{9b^2} = 1 \Leftrightarrow 9b^4 - 25b^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 5 \text{ hoặc } b^2 = -\frac{20}{9} (l).$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

b) Do (E) có một tiêu điểm $F_2(5;0)$ nên $c=5$

Theo giả thiết độ dài trục nhỏ bằng $4\sqrt{6}$ nên $2b=4\sqrt{6} \Leftrightarrow b=2\sqrt{6}$

$$\text{Suy ra } a^2 = b^2 + c^2 = 5^2 + (2\sqrt{6})^2 = 49$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

c) Độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$ nên $2a=2\sqrt{5} \Leftrightarrow a=\sqrt{5}$.

Tiêu cự bằng 2 nên $2c=2 \Leftrightarrow c=1$.

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, suy ra $b^2 = a^2 - c^2 = 5 - 1 = 4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

d) Do (E) đi qua $M(2;-\sqrt{2})$ và $N(-\sqrt{6};1)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \\ \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 8 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

Vậy Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Câu 3. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết

a) Elip có tổng độ dài hai trục bằng 8 và tâm sai $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Elip có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

c) Elip có tiêu điểm $F_1(-2;0)$ và có hình chữ nhật cơ sở có diện tích bằng $12\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Tổng độ dài hai trục bằng 8 nên $2a+2b=8$. (1)

$$\text{Tâm sai } e = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}c. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \begin{cases} 2a+2b=8 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a=\sqrt{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-\sqrt{2}c \\ a=\sqrt{2}c \end{cases}$$

Thay vào hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được.

$$2c^2 = (4 - \sqrt{2}c)^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 - 8\sqrt{2}c + 16 = 0 \Leftrightarrow c = 4\sqrt{2} \pm 4$$

Với $c = 4\sqrt{2} + 4$, suy ra $\begin{cases} a = 8 + 4\sqrt{2} \\ b = -8 - 4\sqrt{2} \end{cases}$ (không thỏa mãn)

Với $c = 4\sqrt{2} - 4$, suy ra $\begin{cases} a = 8 - 4\sqrt{2} \\ b = -4 + 4\sqrt{2} \end{cases}$

Do đó Elip cần tìm có phương trình (E) : $\frac{x^2}{(8 - 4\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{2} - 4)^2} = 1$.

b) Elip có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow a = \frac{3}{\sqrt{5}}c$.

Mặt khác, Elip có hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20 nên :

$$2(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow a + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - a.$$

Thay (1);(2) vào hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2 = (5 - a)^2 + c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{5}}c\right)^2 = \left(5 - \frac{3}{\sqrt{5}}a\right)^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}c + 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5\sqrt{5} \\ c = \sqrt{5} \end{cases}$$

Với $c = 5\sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a = 15 \\ b = -10 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

Với $c = \sqrt{5}$, suy ra $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. Do đó Elip cần tìm có phương trình (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) Elip có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c = 2$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở $s = 2a \cdot 2b = 12\sqrt{5} \Leftrightarrow ab = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2b^2 = 45$ (1)

Mặt khác, ta có $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4$ (2)

Kết hợp (1);(2) ta được:

$$a^2b^2 = 45 \Leftrightarrow (b^2 + 4)b^2 = 45 \Leftrightarrow b^4 + 4b^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 5 \text{ hoặc } b^2 = -9(l)$$

Với $b^2 = 5 \Rightarrow a^2 = 9$

Vậy phương trình Elip cần tìm là : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

Câu 4. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

a) Elip đi qua điểm $M(-\sqrt{5}; 2)$ và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 10.

b) Elip có tâm sai $e = \frac{3}{5}$ và khoảng cách từ tâm đối xứng của nó đến một đường chuẩn bằng $\frac{25}{3}$.

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và phương trình một đường chuẩn là $x = \frac{25}{4}$.

d) Khoảng cách giữa các đường chuẩn bằng 36 và bán kính qua tiêu điểm của M thuộc Elip là 9 và 15.

Lời giải.

a) Elip đi qua điểm $M(-\sqrt{5}; 2)$ nên $\frac{5}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$. (1)

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn của Elip bằng 10 nên:

$$2 \cdot \frac{a}{e} = 10 \Leftrightarrow \frac{a}{e} = 5 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 5 \Leftrightarrow a^2 = 5c \quad (2)$$

$$\text{Từ (2), kết hợp với hệ thức } a^2 = b^2 + c^2, \text{ ta được } b^2 = a^2 - c^2 = 5c - c^2 \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{5}{5c} + \frac{4}{5c - c^2} = 1 \Leftrightarrow c^2 - 6c + 9 = 0 \Leftrightarrow c = 3$$

$$\text{Với } c = 3, \text{ suy ra } \begin{cases} a^2 = 15 \\ b^2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình Elip cần tìm là: } \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$$

b) Ta có $e = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow c = \frac{3}{5}a$

Elip có khoảng cách từ tâm đối xứng O đến một đường chuẩn là $\frac{25}{3}$ nên:

$$\frac{a}{e} = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{\frac{3}{5}a} = \frac{25}{3} \Leftrightarrow a = 5$$

$$\text{Với } a = 5 \Rightarrow c = 3 \text{ và } b^2 = a^2 - c^2 = 16$$

$$\text{Vậy Elip cần tìm có phương trình là: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

c) Elip có độ dài trục lớn bằng 10 nên $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

$$\text{Mặt khác, Elip có phương trình đường chuẩn } x = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{e} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{e} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \frac{5^2}{c} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow c = 4$$

$$\text{Suy ra } b^2 = a^2 - c^2 = 9$$

$$\text{Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình là } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

d) Elip có khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 36 nên:

$$2.\frac{a}{e} = 36 \Leftrightarrow 2.\frac{a^2}{c} = 36 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 18$$

Mặt khác, ta có: $\begin{cases} a+ex=9 \\ a-ex=15 \end{cases} \Rightarrow a=12$

Với $a=12 \Rightarrow c=8$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 144 - 64 = 80$

Vậy phương trình Elip là: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$

Câu 5. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

- Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 41$ và đi qua điểm $A(0;5)$.
- Elip có hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 21$ và đi qua điểm $M(1;2)$ nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc 60° .
- Một cạnh hình chữ nhật cơ sở của Elip nằm trên $d: x - \sqrt{5} = 0$ và độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng 6.
- Tứ giác ABCD là hình thoi có bốn đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Bán kính của đường tròn nội tiếp hình thoi bằng $\sqrt{2}$ và tâm sai của Elip bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

- a)** Elip đi qua điểm $A(0;5) \in Oy$, suy ra $b=5$.

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm 5$

Suy ra một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a;5)$.

Theo giả thiết $(a;5)$ thuộc đường tròn (C) nên ta có:

$$a^2 + 25 = 41 \Leftrightarrow a^2 = 16$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

- b)** Theo giả thiết bài toán ta có: $F_1MF_2 = 60^\circ$, suy ra:

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1MF_2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (1+c)^2 + 4 + (1-c)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(1+c)^2 + 4} \cdot \sqrt{(1-c)^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = 2c^2 + 10 - \sqrt{(1+c)^2 + 4} \cdot \sqrt{(1-c)^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 2c^2 \geq 0 \\ \left[\sqrt{(1+c)^2 + 4} \right] \left[\sqrt{(1-c)^2 + 4} \right] = (10 - 2c^2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c \leq \sqrt{5} \\ 3c^4 - 46c^2 + 75 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{23 \pm 4\sqrt{19}}{3}$$

Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$ nên tọa độ một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là $(a; b)$

Theo giả thiết các đỉnh của hình chữ nhật thuộc đường tròn (C) nên ta có: $a^2 + b^2 = 21$

$$\text{Với } c^2 = \frac{23+4\sqrt{19}}{3}, \text{ ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \frac{23+4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{43+2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \frac{20-2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra Elip có phương trình } \frac{x^2}{\frac{43+2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20-2\sqrt{19}}{3}} = 1$$

$$\text{Với } c^2 = \frac{23-4\sqrt{19}}{3}, \text{ ta có: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 21 \\ a^2 - b^2 = \frac{23-4\sqrt{19}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{43-2\sqrt{19}}{3} \\ b^2 = \frac{20+2\sqrt{19}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra Elip có phương trình } \frac{x^2}{\frac{43-2\sqrt{19}}{3}} + \frac{y^2}{\frac{20+2\sqrt{19}}{3}} = 1$$

c) Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x = \pm a; y = \pm b$

Theo giả thiết một cạnh của hình chữ nhật cơ sở là: $x - \sqrt{5} = 0$ nên $a = \sqrt{5}$.

Độ dài đường chéo của hình chữ nhật cơ sở bằng 6 nên:

$$\sqrt{4a^2 + 4b^2} = 6 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow 20 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow b^2 = 4$$

$$\text{Vậy phương trình Elip cần tìm là: } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

d) Elip có tâm sai $e = \frac{1}{2} \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2c$.

Elip có các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0), B_1(0; -b), B_2(0; b)$. Gọi H là hình chiếu của O lên A_2B_2 .

Theo giả thiết ta có bán kính của đường tròn đã cho bằng OH. Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{3c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4c^2 = \frac{14}{3} \\ b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là: $\frac{x^2}{14/3} + \frac{y^2}{7/2} = 1$

Câu 6. Lập phương trình chính tắc Elip, biết:

- Tứ giác ABCD là hình thoi có 4 đỉnh trùng với các đỉnh của Elip. Đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $(C): x^2 + y^2 = 4$ và $AC = 2BD$, A thuộc Ox.
- Elip có độ dài trục lớn bằng 8 và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông.
- Elip có tâm sai $e = \frac{1}{3}$ và giao điểm của Elip với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ tại 4 điểm A, B, C, D sao cho AB song song với Ox và $AB = 3BC$.
- Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của Elip cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

- Giả sử một đỉnh của hình thoi là $A(a; 0)$. Suy ra $AC = 2a$ và $BD = 2b$.

Theo giả thiết: $AC = 2BD \Leftrightarrow 2a = 2.2b \Leftrightarrow a = 2b$

Đường tròn (C) có $R = 2$. Gọi H là hình chiếu của O lên AB với $B(0; b)$. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow b^2 = 5$$

$$\Rightarrow a^2 = 20.$$

Vậy phương trình Elip là: $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

- Elip có độ dài trục lớn bằng 8 nên $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$.

Do $(E); (C)$ đều có tâm đối xứng là O và trục đối xứng là Ox; Oy nên hình vuông tạo bởi giữa chúng cũng có tính chất tương tự. Do đó, ta giả sử gọi một đỉnh của hình vuông là $M(x; x)$ với $x > 0$. Vì $M \in (C)$ nên: $x^2 + x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2; 2)$.

$$\text{Ta có } M \in (E) \Leftrightarrow \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{16} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3}$$

Vậy phương trình của Elip là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16/3} = 1$

- Elip có tâm sai $e = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3c$.

Đặt $BC = x$ với $x > 0 \Rightarrow AB = 3x$. Giả sử một đỉnh $A\left(\frac{3}{2}x; \frac{1}{2}x\right)$. Ta có:

$$A \in (C) \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{5} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{9\sqrt{10}}{10}; \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

Mặt khác, do $A \in (E)$ nên:

$$\frac{81}{10a^2} + \frac{9}{10b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{81}{10(3c)^2} + \frac{9}{10(a^2 - c^2)} = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{81}{80}$$

$$\Rightarrow a^2 = 9c^2 = \frac{729}{80}; b^2 = a^2 - c^2 = \frac{81}{10}$$

Vậy phương trình Elip cần tìm là: $\frac{x^2}{729/80} + \frac{y^2}{81/10} = 1$

d) Do độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$ nên $2a = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$.

Các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm cùng thuộc đường tròn nên $b = c$

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 8 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4$

Vậy Elip cần tìm có phương trình là: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Câu 7. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

- Elip có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông có diện tích bằng 32.
- Elip có một đỉnh và hai tiêu điểm tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của Elip bằng $12(2 + \sqrt{3})$.
- Elip đi qua điểm $M(2\sqrt{3}; 2)$ và M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.
- Elip đi qua điểm $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc 60° .

Lời giải.

a) Hai đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông nên $b = c$.

Mặt khác diện tích hình vuông bằng 32 nên: $2c \cdot 2b = 32 \Leftrightarrow b^2 = 8$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2 = 16$$

Vậy phương trình Elip là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$

b) Chu vi hình chữ nhật cơ sở: $C = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow 2(2a + 2b) = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow a + b = 3(2 + \sqrt{3})$ (1)

Giải sử tam giác $F_1F_2B_2$ đều cạnh $F_1F_2 = 2c$ mà $B_2O \perp F_1F_2$.

$$\text{Suy ra } OB_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 F_2 \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2c = \sqrt{3}c \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) suy ra : } 3(2 + \sqrt{3}) - b = 3(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}c .$$

Thay vào hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$, ta được:

$$\begin{aligned} \left[(6 + 3\sqrt{3}) - \sqrt{3}c \right]^2 &= 4c^2 \Leftrightarrow c^2 + 6\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})c - (6 + 3\sqrt{3})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ c = -12\sqrt{3} - 21(l) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy Elip cần tìm có phương trình là : } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

$$\text{c) Từ giả thiết, ta suy ra } \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0 \Leftrightarrow (-c - 2\sqrt{3})(c - 2\sqrt{3}) + 4 = 0 \Leftrightarrow c^2 = 16$$

Hơn nữa (E) qua điểm M nên:

$$\frac{12}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{b^2 + 16} + \frac{4}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^4 = 64 \Leftrightarrow b^2 = 8$$

$$\text{Suy ra : } a^2 = b^2 + c^2 = 24 .$$

$$\text{Vậy phương trình (E) cần tìm là : } \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$$

d) Từ giả thiết, ta suy ra $B_1 F_1 B_2 = 60^\circ$ mà $F_1 B_1 = F_1 B_2 \Rightarrow$ Tam giác $F_1 B_1 B_2$ đều cạnh bằng $2b$ nên:

$$F_1 O = \frac{\sqrt{3}}{2} B_1 B_2 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2b \Leftrightarrow c = \sqrt{3}b \quad (1)$$

$$\text{Hơn nữa (E) qua } M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ nên: } \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2 + 3b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1); (2) , kết hợp với } a^2 = b^2 + c^2 \text{ ta được } a^2 = 4$$

$$\text{Vậy Elip cần tìm có phương trình là : } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Câu 8. Lập phương trình chính tắc của Elip, biết:

- Elip có một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và đi qua điểm M, biết tam giác $F_1 M F_2$ có diện tích bằng 1 và vuông tại M.
- Elip đi qua 3 đỉnh của tam giác đều ABC. Biết tam giác ABC có trục đối xứng là Oy, $A(0; 2)$ và có diện tích bằng $\frac{49\sqrt{3}}{12}$.
- Khi M thay đổi trên Elip thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm của Elip.

Lời giải

a) Elip có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0) \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Theo giả thiết, ta có:

$$S_{\Delta F_1 M F_2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} MF_1 \cdot MF_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (a + ex)(a - ex) = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - e^2 x^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 - \frac{3}{a^2} \cdot x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{(a^2 - 2)a^2}{3} \quad (1)$$

Cũng từ $MF_1 \perp MF_2$, ta có:

$$\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0 \rightarrow \Leftrightarrow (-c - x)(c - x) + (-y)(-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2 = 3 \quad (2).$$

Từ (1); (2) ta có, $y^2 = 3 - x^2 = 3 - \frac{(a^2 - 2)a^2}{3} = \frac{9 - a^4 + 2a^2}{3}$

Do đó,

$$M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2}{3} + \frac{9 - a^4 + 2a^2}{3(a^2 - 3)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2)(a^2 - 3) + 9 - a^4 + 2a^2 = 3a^2 - 9$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 4$$

Suy ra $b^2 = 1$. Vậy Elip cần tìm có phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) Tam giác ABC đều, có điểm $A(0; 2) \in Oy$ và có trục đối xứng là Oy nên hai điểm B, C đối xứng với nhau qua Oy.

Giả sử $B(x; y)$ với $x > 0; y < 2$, suy ra $C(-x; y)$. Độ dài cạnh của tam giác là $2x$.

Theo giả thiết, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{49\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{12} \Rightarrow x = \frac{7}{2\sqrt{3}}$$

Đường cao của tam giác đều $h = \frac{2x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2 - y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

Suy ra $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}; \frac{3}{2}\right)$

Đến đây bài toán trở thành viết phương trình Elip đi qua 2 điểm $A(0; 2)$ và $B\left(\frac{7}{2\sqrt{3}}; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình $(E): \frac{x^2}{28/5} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) Độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 nên $b = 4$.

Mặt khác, ta lại có độ dài lớn nhất MF_1 bằng 8 nên $a + c = 8$.

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a + c = 8 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ a^2 = 16 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình Elip cần tìm có phương trình (E): } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Để xác định tọa độ điểm M thuộc elip có phương trình chính tắc là (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ta làm như sau

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm M thuộc (E) thì $\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho

- a) Elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; A, B là hai điểm thuộc (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Tính $AF_2 + BF_1$
- b) Elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$
- c) Elip (E): $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1 - MF_2 = 2$

Lời giải

a) Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$. Do A, B thuộc (E) nên: $AF_1 + AF_2 = 2a = 10$ và $BF_1 + BF_2 = 2a = 10$
Suy ra $AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2 = 20 \Leftrightarrow 8 + AF_2 + BF_1 = 20 \Leftrightarrow AF_2 + BF_1 = 12$

b) Ta có $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ và $b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex = 2(a - ex) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3e} = \frac{a^2}{3c} = \frac{3}{2}$

Thay vào (E) ta được: $\frac{9}{4.9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$

Vậy $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ hoặc $M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

c) Ta có $a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}; b = 2; c = 2$

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $MF_1 - MF_2 = 2 \Leftrightarrow a + ex - (a - ex) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} = \frac{a}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$

Thay vào (E) ta được: $\frac{2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Vậy $M(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ hoặc $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$.

Câu 10. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

- a) Elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm những điểm M thuộc (E) sao cho nó nhìn hai tiêu điểm của Elip dưới một góc vuông.
- b) Elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $F_1MF_2 = 60^\circ$
- c) Elip (E): $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip, Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $F_1MF_2 = 120^\circ$
- d) Elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi $F_1; F_2$ là hai tiêu điểm của Elip; trong đó F_1 có hoành độ âm. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1F_2 = 120^\circ$

Lời giải

- a) Ta có $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 2 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $F_1MF_2 = 90^\circ$ nên :

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 \Leftrightarrow 4c^2 = (a + ex)^2 + (a - ex)^2$$

$$\Leftrightarrow 32 = 2a^2 + 2e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 32 = 18 + 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

Thay vào (E), ta được $y^2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Vậy $M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right); M\left(\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right); M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right); M\left(-\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

- b) Ta có $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $F_1MF_2 = 60^\circ$ nên :

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_2MF_1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a+ex)(a-ex) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 12 = 2a^2 + 2e^2x^2 - a^2 + e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{12-a^2}{3e^2} = \frac{32}{9} \Leftrightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Thay vào (E), ta được $y^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{3}$

Vậy $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right); M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right); M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right); M\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

c) Ta có $\begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 75 \Rightarrow c = 5\sqrt{3}$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $F_1MF_2 = 60^\circ$ nên :

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_2MF_1 \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 + 2(a+ex)(a-ex) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 300 = 2a^2 + 2e^2x^2 + a^2 - e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{300-3a^2}{e^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Thay vào (E), ta được $y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$

Vậy $M(0; 5); M(0; -5)$

d) Ta có $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $F_1MF_2 = 60^\circ$ nên :

$$MF_2^2 = MF_1^2 + F_1F_2^2 - 2F_1F_2MF_1 \cdot \cos 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow (a-ex)^2 = (a+ex)^2 + 4c^2 + 2(a+ex)2c \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4aex + 4c^2 + 2ac + 2ecx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{65}{14}$$

Thay vào (E), ta được $y^2 = \frac{243}{196} \Leftrightarrow y = \pm \frac{9\sqrt{3}}{14}$

Vậy $M\left(-\frac{65}{14}; \frac{9\sqrt{3}}{14}\right); M\left(-\frac{65}{14}; -\frac{9\sqrt{3}}{14}\right)$

Câu 11. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho.

- a) Elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $C(2; 0)$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

- b) Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.
- c) Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A, biết B có tung độ dương.

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Giả sử $A(x; y) \Rightarrow B(x; -y)$. Theo giả thiết, tam giác ABC đều nên:

$$AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow (2-x)^2 + y^2 = 4y^2 \Leftrightarrow (2-x)^2 = 3y^2 \quad (1)$$

$$\text{Hơn nữa } A \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \quad (2)$$

Từ (1); (2) ta có:

$$\begin{cases} (2-x)^2 = 3y^2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2/7 \\ y = 4\sqrt{3}/7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2/7 \\ y = -4\sqrt{3}/7 \end{cases}$$

Vì A, B khác C nên $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

b) Do tam giác OAB cân tại O và A, B đều có hoành độ dương nên A, B đối xứng nhau qua Ox.

Giả sử $A(x; y)$ với $x > 0$, suy ra $B(x; -y)$. Gọi H là hình chiếu của O lên AB. Khi đó ta có

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} |2y| x = x|y|.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $1 = \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot |y| = x|y|$.

Do đó $S_{\Delta OAB} \leq 1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x^2}{4} = y^2$.

$$\text{Thay vào } (E), \text{ ta được } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } A\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ và } B\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ hoặc } A\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ và } B\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

c) Gọi $B(x; y)$ với $x > 0$.

Do tam giác ABC vuông cân tại A, suy ra B và C đối xứng nhau qua Ox nên $C(x; -y)$.

$$\text{Ta có } AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - y^2 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Hơn nữa, } B \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} (x-3)^2 - y^2 = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} \\ (x-3)^2 - 1 + \frac{x^2}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} \\ \frac{10}{9}x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\frac{12}{5} \\ y=\pm\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Vì A, B khác C nên $B\left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right), C\left(\frac{12}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

Câu 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ và hai điểm $A(-5; -1), B(-1; 1)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

b) Elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ và hai điểm $A(3; 4), B(5; 3)$. Tìm trên (E) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4,5.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm trên (E) những điểm sao cho khoảng cách từ điểm đó đến đường thẳng $d: 2x - 3y + 1 = 0$ là lớn nhất.

Lời giải

a) Gọi $M(x; y) \in (E)$ nên $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$. Phương trình đường thẳng $AB: x - 2y + 3 = 0$. Ta có

$$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(M, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{|x - 2y + 3|}{\sqrt{5}} = |x - 2y + 3|.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$\begin{aligned} (x - 2y)^2 &= \left(4 \cdot \frac{1}{4}x - 2\sqrt{5} \cdot \frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2 \leq \left[\left(\frac{1}{4}x\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2\right] \left[4^2 + (2\sqrt{5})^2\right] \\ &= \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5}\right) \cdot 36 \\ &= 1 \cdot 36 = 36 \end{aligned}$$

Suy ra $|x - 2y| \leq 6$ nên $|x - 2y + 3| \leq 9$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} \frac{\frac{1}{4}x}{4} = \frac{\frac{y}{\sqrt{5}}}{-2\sqrt{5}} \\ x - 2y + 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy $M\left(\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Gọi $C(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. (1)

Phương trình đường thẳng $AB: x + 2y - 11 = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = 4,5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{5} \frac{|x + 2y - 11|}{\sqrt{5}} = 4,5 \\ &\Leftrightarrow |x + 2y - 11| = 9 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 11 = 9 & (2) \\ x + 2y - 11 = -9 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} x+2y-11=9 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20-2y \\ \frac{(20-2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20-2y \\ 2y^2-20y+98=0 \end{cases} : \text{ vô nghiệm.}$$

Từ (1) và (3), ta có

$$\begin{cases} x+2y-11=-9 \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2y \\ \frac{(2-2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{3} \\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } C\left(1-\sqrt{3}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \text{ hoặc } C\left(1+\sqrt{3}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\text{c) Gọi } M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 2.$$

$$\text{Ta có } d(M, d) = \frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{13}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$(2x-3y)^2 = \left(2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}y\right)^2 \leq \left[x^2 + (\sqrt{2}y)^2\right] \left(4 + \frac{9}{2}\right) = 2 \cdot \frac{17}{2} = 17.$$

$$\text{Suy ra } |2x-3y| \leq \sqrt{17} \text{ nên } |2x-3y+1| \leq \sqrt{17}+1.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}y}{-3} \\ 2x-3y = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ y = -\frac{3}{\sqrt{17}} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } d(M, d) \text{ lớn nhất bằng } \frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{13}} \text{ khi } M\left(\frac{4}{\sqrt{17}}; -\frac{3}{\sqrt{17}}\right).$$

Câu 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho

a) Elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và các điểm $A(-3; 0)$, $I(-1; 0)$. Tìm tọa độ các điểm B , C thuộc (E) sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

b) Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm F_1 , F_2 . Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

c) Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm F_1 , F_2 . Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho đường phân giác trong góc F_1MF_2 đi qua điểm $N\left(-\frac{48}{25}; 0\right)$.

Lời giải

a) Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = IA = 2$ là:
 $(C): (x+1)^2 + y^2 = 4.$

Theo giả thiết, ta có $B, C \in (E) \cap (C)$ nên tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 9(x+1)^2 + 9y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 9(x+1)^2 - 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ 5x^2 + 18x + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (loại) hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{4\sqrt{6}}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{4\sqrt{6}}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } B\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right) \text{ hoặc } B\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right).$$

b) Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ và $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.
Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$. Ta có $S_{\Delta MF_1F_2} = p.r$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} F_1F_2.d(M, F_1F_2) = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2}.r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.2c.|y| = (a+c).\frac{4}{3} \Leftrightarrow 4|y| = 9.\frac{4}{3} \Leftrightarrow |y| = 3 \Leftrightarrow y = \pm 3.$$

Thay vào phương trình (E), ta được $\frac{x^2}{25} + \frac{9}{9} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $M(0; 3)$ hoặc $M(0; -3)$.

c) Ta có $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ và $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.
Hai tiêu điểm của Elip là: $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$.

Gọi $M(x; y) \in (E)$.

Theo giả thiết MN là phân giác trong của F_1MF_2 , suy ra

$$\frac{F_1N}{F_2N} = \frac{F_1M}{F_2M} \Leftrightarrow \frac{52}{148} = \frac{a+ex}{a-ex} \Leftrightarrow 12a + 25ex = 0 \Leftrightarrow 12.5 + 25.\frac{4}{5}x = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Thay vào phương trình (E), ta được $\frac{9}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{12}{5}$.

Vậy $M\left(-3; \frac{12}{5}\right)$ hoặc $M\left(-3; -\frac{12}{5}\right)$.

Câu 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho

a) Elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(1; 1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm AB.

b) Elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và điểm $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 2MB$.

c) Elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ và đường thẳng $d: 2x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1.

d) Elip (E): $x^2 + 3y^2 = 6$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 trong đó F_1 có hoành độ âm. Gọi d là đường thẳng đi qua F_2 và song song với $\Delta: y = -x + 1$ đồng thời cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích tam giác ABF_1 .

Lời giải

a) Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (E) ta được $\frac{1}{25} + \frac{1}{9} < 1$. Suy ra M nằm ở miền trong của (E).

Do đó mọi đường thẳng đi qua M đều cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

Gọi $A(x; y) \in (E)$ nên $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. (1)

Do $M(1; 1)$ là trung điểm của AB nên $B(2-x; 2-y)$.

Vì $B \in (E)$ nên $\frac{(2-x)^2}{25} + \frac{(2-y)^2}{9} = 1$. (2)

Từ (1) và (2), ta được

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{25} + \frac{y^2 - 4y + 4}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \left(\frac{-4x + 4}{25} + \frac{-4y + 4}{9} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x + 4}{25} + \frac{-4y + 4}{9} = 0 \Leftrightarrow 9x + 25y - 34 = 0. \quad (*)$$

Do tọa độ hai điểm A, B đều thỏa mãn (*) nên phương trình (*) chính là phương trình đường thẳng d cần tìm.

Cách 2. Ta có $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $A, B \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_1^2 + 25y_1^2 = 225 \\ 9x_2^2 + 25y_2^2 = 225 \end{cases}$.

Trừ vế theo vế ta được $9(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 25(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$.

Vì M là trung điểm AB nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_M = 2 \\ y_1 + y_2 = 2y_M = 2 \end{cases}$. Thay vào trên, ta được

$$18(x_1 - x_2) + 50(y_1 - y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 = -\frac{9}{25}(x_1 - x_2).$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = \left(x_2 - x_1; -\frac{9}{25}(x_1 - x_2) \right) = (x_1 - x_2) \left(1; -\frac{9}{25} \right)$.

Suy ra $\vec{u} = (25; -9)$ là một vec-tơ chỉ phương của Δ nên $\Delta: 9x + 25y - 34 = 0$.

Bằng cách giải thứ nhất ta có thể giải được bài toán tổng quát khi thay giả thiết $MA = MB$ bằng giả thiết M chia đoạn AB theo tỉ số k nào đó.

Cụ thể ta xét bài toán sau

b) Gọi $A(x; y), B(x_0; y_0)$. Vì $B \in (E)$ nên $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1$. (1)

Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (E) ta được

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{20}{36} < 1. \text{ Suy ra } M \text{ nằm ở miền trong của } (E).$$

Mà $MA = 2MB$ suy ra $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ nên $A(-2x_0 + 2; -2y_0 + 2)$.

Mặt khác, $A \in (E)$ nên $\frac{(-2x_0 + 2)^2}{4} + \frac{(-2y_0 + 2)^2}{1} = 1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \\ \frac{(-2x_0 + 2)^2}{4} + \frac{(-2y_0 + 2)^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y_0^2 - 8y_0 + 3 = 0 \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = \frac{8}{5} \\ y_0 = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

• Với $B(0; 1)$. Đường thẳng cần tìm đi qua M và B nên có phương trình: $x + 2y - 2 = 0$.

• Với $B\left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Đường thẳng cần tìm đi qua M và B nên có phương trình: $5x + 70y - 50 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là: $x + 2y - 2 = 0$ hoặc $5x + 70y - 50 = 0$.

c) Do Δ vuông góc với $d: 2x + y + 3 = 0$ nên $\Delta: x - 2y + m = 0$.

Đường thẳng Δ cắt (E) tại hai điểm A, B nên tọa độ A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ x - 2y + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - m \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - m \\ 8y^2 - 4my + m^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để Δ cắt (E) tại hai điểm A, B phân biệt khi phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 32 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}.$$

Gọi y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$, suy ra $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{m}{2} \\ y_1 \cdot y_2 = \frac{m^2 - 4}{8} \end{cases}$.

Ta được tọa độ $A(2y_1 - m; y_1), B(2y_2 - m; y_2)$. Ta có

$$AB = \sqrt{5(y_2 - y_1)^2} = \sqrt{5[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]} = \frac{\sqrt{5(8 - m^2)}}{2}.$$

Mặt khác, $d(O, AB) = d(O, \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$. Do đó

$$S_{\Delta OAB} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot d(O, AB) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2(8 - m^2)}}{4} = 1 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\Delta: x - 2y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - 2y - 2 = 0$.

d) Phương trình Elip (E) ở dạng chính tắc $(E): \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Ta có $a^2 = 6, b^2 = 2$. Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$.

Hai tiêu điểm có tọa độ là: $F_1(-2; 0)$ và $F_2(2; 0)$.

Đường thẳng d đi qua $F_2(2; 0)$ và song song với $\Delta: y = -x + 1$ nên có phương trình

$$d: x + y - 2 = 0.$$

Tọa độ điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + 3(2 - x)^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } A\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \text{ hoặc } A\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right).$$

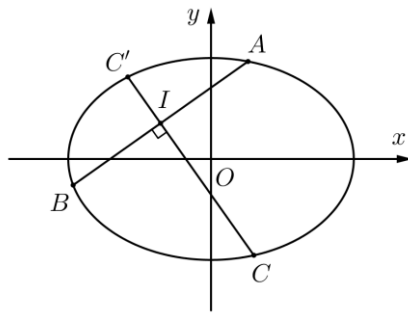
Khi đó $AB = \sqrt{6}$ và $d(F_1, AB) = d(F_1, d) = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Suy ra diện tích tam giác } ABF_1 \text{ là } S_{\Delta ABF_1} = \frac{1}{2} AB \cdot d(F_1, d) = 2\sqrt{3}.$$

Câu 15. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng

$d: x - \sqrt{2}y + 2 = 0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A, B . Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC cân tại C .

Lời giải



Đường thẳng d cắt (E) tại A, B nên tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \sqrt{2}y + 2 = 0 \\ 4x^2 + 8y^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}y - 2 \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}y - 2 \\ y^2 - \sqrt{2}y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của AB . Suy ra $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Thay vào d , ta được $x_I = -1$. Do đó $I\left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với d nên $\Delta: \sqrt{2}x + y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Theo giả thiết tam giác ABC cân tại C nên $C \in \Delta$, đồng thời $C \in (E)$.

Suy ra tọa độ điểm C thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + y + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 5x^2 + 4x - 7 = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{-2 + \sqrt{39}}{5}; -\frac{2\sqrt{78} + \sqrt{2}}{10}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{-2 - \sqrt{39}}{5}; \frac{2\sqrt{78} - \sqrt{2}}{10}\right).$$

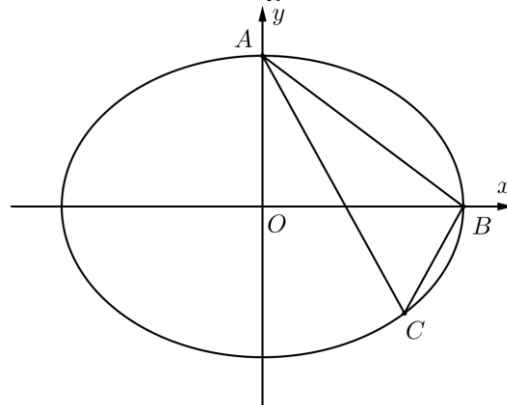
Vậy tọa độ điểm C cần tìm là

$$C\left(\frac{-2 + \sqrt{39}}{5}; -\frac{2\sqrt{78} + \sqrt{2}}{10}\right) \text{ hoặc } C\left(\frac{-2 - \sqrt{39}}{5}; \frac{2\sqrt{78} - \sqrt{2}}{10}\right).$$

Câu 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng

$d: 3x + 4y - 12 = 0$. Đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm A, B . Tìm tọa độ điểm C trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 6.

Lời giải



Do $A, B = d \cap (E)$ nên tọa độ điểm A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x+4y-12=0 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y-12=0 \\ 9x^2+16y^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}.$$

Suy ra $A(4;0)$, $B(0;3)$ hoặc $A(0;3)$, $B(4;0)$.

Khi đó $AB=5$.

$$\text{Gọi } C(a;b) \in (E) \text{ nên } \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9} = 1. \quad (1)$$

Mặt khác, ta lại có theo giả thiết

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, d) = \frac{|3a+4b-12|}{2} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+4b=24 \\ 3a+4b=0 \end{cases}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta tìm được } C\left(2\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ hoặc } C\left(-2\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ và elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$. Tính

diện tích hình chữ nhật có bốn đỉnh là các giao điểm của đường tròn (C) và elip (E) .

Lời giải

$$\text{Ta có } (C): x^2 + y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 8 - y^2.$$

$$(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 16 - 3y^2.$$

$$\text{Do đó } 16 - 3y^2 = 8 - y^2 \Leftrightarrow y = \pm 2. \text{ Từ đó } x = \pm 2.$$

Vậy các giao điểm của đường tròn (C) và elip (E) là $M(2;2)$, $N(-2;2)$, $P(-2;-2)$, $Q(2;-2)$.

Ta thấy $MNPQ$ là hình vuông cạnh bằng 4.

Do đó hình vuông tạo bởi các giao điểm của đường tròn (C) và elip (E) có diện tích bằng 16.

Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

Câu 18. Xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm, tính tâm sai, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và viết phương trình các đường tiệm cận của các hypebol (H) sau:

$$\text{a) } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

$$\text{b) } 5x^2 - 4y^2 = 20.$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } a^2 = 6, b^2 = 8 \text{ nên } a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10.$$

$$\text{Suy ra tọa độ các đỉnh là } A_1(-\sqrt{6}; 0), A_2(\sqrt{6}; 0).$$

$$\text{Tiêu điểm là } F_1(-10; 0), F_2(10; 0).$$

$$\text{Tâm sai của } (H) \text{ là } e = \frac{c}{a} = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Độ dài trục thực } 2a = 2\sqrt{6}, \text{ độ dài trục ảo } 2b = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Đường tiệm cận có phương trình là } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}x.$$

$$\text{b) Phương trình chính tắc của } (H) \text{ là } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

$$\text{Ta có } a^2 = 4, b^2 = 5 \text{ nên } a = 2, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3.$$

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$.

Tiêu điểm là $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$.

Tâm sai của (H) là $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

Độ dài trục thực $2a = 4$, độ dài trục ảo $2b = 2\sqrt{5}$.

Đường tiệm cận có phương trình là $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$.

Câu 19. Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ và độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$.

b) (H) có tiêu cự bằng 10 và đường tiệm cận là $y = \pm \frac{4}{3}x$.

c) (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ và diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48.

d) (H) đi qua hai điểm $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ và $N(-1; -\sqrt{3})$.

e) (H) đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° .

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$.

a) (H) có một tiêu điểm tọa độ là $(-4;0)$ suy ra $c = 4$.

Độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{7}$ suy ra $2b = 2\sqrt{7} \Rightarrow b^2 = 7$, $a^2 = c^2 - b^2 = 9$.

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

b) (H) có tiêu cự bằng 10 suy ra $2c = 10 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$. (1)

Đường tiệm cận là $y = \pm \frac{4}{3}x$ suy ra $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ hay $b^2 = \frac{16}{9}a^2$. (2)

Thế (2) vào (1) ta được $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$.

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

c) Tâm sai bằng $\frac{\sqrt{13}}{3}$ suy ra $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ hay $4a^2 = 9b^2$. (3)

Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 48 suy ra $2a \cdot 2b = 48 \Leftrightarrow ab = 12$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $a^2 = 18$, $b^2 = 8$.

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$.

d) (H) đi qua hai điểm $M(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ và $N(-1; -\sqrt{3})$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2}{5} \\ b^2 = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{\frac{2}{5}} - \frac{y^2}{2} = 1$.

e) Do $M(-2;1) \in (H)$ nên $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$. (5)

Phương trình hai đường tiệm cận là

$$\Delta_1: y = \frac{b}{a}x \text{ hay } bx - ay = 0, \Delta_2: y = -\frac{b}{a}x \text{ hay } bx + ay = 0.$$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° nên $\cos 60^\circ = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2}$ hay

$$\frac{1}{2} = \frac{|b^2 - a^2|}{b^2 + a^2} \Leftrightarrow 2|b^2 - a^2| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(b^2 - a^2) = b^2 + a^2 \\ 2(b^2 - a^2) = -(b^2 + a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ a^2 = 3b^2 \end{cases}.$$

• Với $b^2 = 3a^2$ thay vào (5) được $a^2 = \frac{11}{3}$, $b^2 = 11$.

Suy ra phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$.

• Với $a^2 = 3b^2$ thay vào (5) được $a^2 = 1$, $b^2 = \frac{1}{3}$.

Suy ra phương trình hypebol (H) là $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$.

Vậy có hai hypebol thỏa mãn có phương trình là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$ và $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$.

Để tìm điểm M thuộc hypebol có phương trình chính tắc là (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$ ta làm như sau:

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} - \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta có phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai.
- Giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M , y_M ta tìm được tọa độ của điểm M .

Câu 20. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$ có tiêu điểm F_1 và F_2 . Tìm điểm M trên (H) trong các trường hợp sau:

- Điểm M có hoành độ là 4.
- Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3.
- Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (H)$ suy ra $\frac{x_M^2}{9} - \frac{y_M^2}{6} = 1$. (*)

a) Ta có $x_M = 4$ suy ra $y_M = \pm \sqrt{6\left(\frac{x_M^2}{9} - 1\right)} = \pm \sqrt{\frac{42}{3}}$.

Vậy điểm cần tìm là $M_1\left(4; \frac{\sqrt{42}}{3}\right)$; $M_2\left(4; -\frac{\sqrt{42}}{3}\right)$.

b) Ta có $MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right|$ nên $3 = \left|3 + \frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right| \Leftrightarrow x_M = 0$ (loại) hoặc $x_M = \frac{-18}{\sqrt{15}}$ (nhận).

Suy ra $y_M = \pm \frac{\sqrt{210}}{5}$.

Vậy điểm cần tìm là $M_1\left(-\frac{18}{\sqrt{15}}; \frac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\frac{18}{\sqrt{15}}; -\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$.

c) Phương trình hai tiệm cận là $d_1: y = \frac{\sqrt{6}}{3}x$, $d_2: y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ nên

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M - y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} + \frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M + y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} = \frac{24\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M\right| + \left|\sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5}. \quad (**)$$

Mặt khác (*) $\Leftrightarrow (\sqrt{6}x_M - 3y_M)(\sqrt{6}x_M + 3y_M) = 54 > 0$ nên ta có

$$(**) \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M + \sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \Leftrightarrow x_M = \pm \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_M = \pm \frac{\sqrt{330}}{5}.$$

Vậy điểm cần tìm là

$$M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{330}}{5}\right), M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{330}}{5}\right), M_1\left(-\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{330}}{5}\right) \text{ và } M_1\left(-\frac{12}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{330}}{5}\right).$$

Câu 21. Tìm các điểm trên hypebol $(H): 4x^2 - y^2 - 4 = 0$.

- Nhìn hai tiêu điểm dưới góc vuông.
- Nhìn hai tiêu điểm dưới góc 120° .
- Có tọa độ nguyên.

Lời giải

Viết lại phương trình của $(H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Suy ra $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$; $b^2 = 1 \Rightarrow b = 2$, $c^2 = a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$, $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$.

Hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$.

a) Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Ta có $\overrightarrow{F_1M} = (x + \sqrt{5}; y)$, $\overrightarrow{F_2M} = (x - \sqrt{5}; y)$.

Ta có $F_1M \perp F_2M \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Mà $M \in (H) \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 4$ nên $5x^2 = 9$.

Từ đó ta được $x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$; $y = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

b) Gọi $N(x; y)$ là điểm cần tìm. Ta có $N \in (H) \Rightarrow |NF_1 - NF_2| = 2a = 2$.

Xét tam giác F_1NF_2 ta có

$$\begin{aligned} F_1F_2^2 &= F_1N^2 + F_2N^2 - 2F_1N \cdot F_2N \cdot \cos F_1NF_2 \\ &= (F_1N - F_2N)^2 + 2F_1N \cdot F_2N - 2F_1N \cdot F_2N \cdot \cos 120^\circ \\ &= 4 + 3F_1N \cdot F_2N = 4 + 3|a + ex| \cdot |a - ex| = 4 + 3|a^2 - e^2x^2|. \end{aligned}$$

Nên $4c^2 = 4 + 3|1 - 5x^2| \Leftrightarrow 4.5 = 4 + 3|1 - 5x^2| \Leftrightarrow |1 - 5x^2| = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{19}{15} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{19}{15}}$.

Thay $x = \pm \sqrt{\frac{19}{15}}$ vào phương trình của (H) ta tính được $y = \pm \sqrt{\frac{4}{15}}$.

Vậy có bốn điểm cần tìm là $\left(\sqrt{\frac{19}{15}}; \sqrt{\frac{4}{15}}\right), \left(-\sqrt{\frac{19}{15}}; -\sqrt{\frac{4}{15}}\right), \left(-\sqrt{\frac{19}{15}}; \sqrt{\frac{4}{15}}\right), \left(\sqrt{\frac{19}{15}}; -\sqrt{\frac{4}{15}}\right)$.

c) Do (H) nhận Ox, Oy làm các trục đối xứng nên ta chỉ cần xét những điểm $(x; y)$ của (H) mà $x; y$ nguyên và $x \geq 0, y \geq 0$, rồi sau đó ta tìm những điểm đối xứng với những điểm này qua trục Ox và Oy .

Ta có $4x^2 - y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(2x + y) = 4$.

Do $2x - y, 2x + y$ nguyên, $2x + y \geq 0$ và $2x + y \geq 2x - y$ nên ta có các trường hợp

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}.$$

Giải hai hệ thì có một nghiệm nguyên là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy những điểm trên (H) có tọa độ nguyên là $(1; 0), (-1; 0)$.

Câu 22. Cho số $m > 0$. Chứng minh rằng hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-m; m), F_2(m; m)$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm trên (H) tới các tiêu điểm là $2m$, có phương trình

$$x, y = \frac{m^2}{2}.$$

Lời giải

Xét điểm tùy ý $M(x; y) \in (H)$.

Ta có

$$|MF_1 - MF_2| = 2m$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \right| = 2m$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + 2m^2 + (2mx + 2my)} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + 2m^2 - (2mx + 2my)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2 + 2m^2)^2 - (2mx + 2my)^2$$

$$\Leftrightarrow x, y = \frac{m^2}{2}.$$

Câu 23. Cho $F_1(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}), F_2(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Chứng minh mỗi điểm $M(x; y)$ thuộc đồ thị $y = \frac{1}{x}$ đều có $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $M(x; y)$ thuộc $(H): y = \frac{1}{x}$ nên có

$$\begin{aligned} MF_1^2 &= (x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}\frac{1}{x} + 2x\frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Tương tự

$$MF_2^2 = (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}\frac{1}{x} + 2x\frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2.$$

Nếu $x > 0$ thì $x + \frac{1}{x} \geq 2$ nên $MF_1 - MF_2 = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) - \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$

Nếu $x < 0$ thì $x + \frac{1}{x} \leq -2$ nên $MF_1 - MF_2 = -\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right) + \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}.$

Vậy $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}.$

Câu 24. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và có hệ số góc k , Δ' là đường thẳng đi qua O và vuông góc với Δ .

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm, tâm sai, phương trình các đường tiệm cận và đường chuẩn của (H) .

b) Tìm điều kiện của k để cả Δ và Δ' đều cắt (H) .

c) Tứ giác với bốn đỉnh là bốn giao điểm của Δ và Δ' với (H) là hình gì? Tính diện tích tứ giác này theo k . Xác định k để diện tích tứ giác đó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Ta có $a^2 = 4, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 = 13$, suy ra $a = 2, b = 3$ và $c = \sqrt{13}$.

Vậy (H) có các tiêu điểm $F_1 = (-\sqrt{13}; 0), F_2 = (\sqrt{13}; 0)$; tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$; các đường tiệm cận $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{2}x$ và đường chuẩn $x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$.

b) $\Delta: y = kx, \Delta': y = -\frac{1}{k}x$.

Hoành độ giao điểm của Δ và (H) là nghiệm của phương trình

$$9x^2 - 4k^2x^2 = 36 \Leftrightarrow (9 - 4k^2)x^2 = 36.$$

Δ cắt (H) khi $9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2}.$

Tung độ giao điểm của Δ' và (H) là nghiệm của phương trình

$$-4y^2 + 9k^2y^2 = 36 \Leftrightarrow (9k^2 - 4)y^2 = 36.$$

Δ' cắt (H) khi $9k^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k < -\frac{2}{3} \\ k > \frac{2}{3} \end{cases}.$

$$\text{Vậy } \Delta \text{ và } \Delta' \text{ đều cắt } (H) \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} -\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} \\ k < -\frac{2}{3} \\ k > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} < k < -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} < k < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

c) Gọi A và C là các giao điểm của Δ và (H) ($x_A > 0$).

Gọi B và D là các giao điểm của Δ' và (H) ($y_B < 0$).

Do (H) nhận O làm tâm đối xứng nên $OA = OC, OB = OD$. Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Mặt khác, AC vuông góc với BD nên $ABCD$ là hình thoi.

$$\text{Giải hệ phương trình của } \Delta \text{ và } (H): \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases} \text{ ta được } A\left(\frac{6}{\sqrt{9-4k^2}}; \frac{6k}{\sqrt{9-4k^2}}\right).$$

$$\text{Giải hệ phương trình của } \Delta \text{ và } (H): \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = -\frac{1}{k}x \end{cases} \text{ ta được } B\left(\frac{6k}{\sqrt{9k^2-4}}; \frac{-6}{\sqrt{9k^2-4}}\right).$$

$$\text{Ta có } OA^2 = x_A^2 + y_A^2 = \frac{36(k^2+1)}{9-4k^2} \Rightarrow OA = \frac{6\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9-4k^2}}; OB^2 = x_B^2 + y_B^2 = \frac{36(k^2+1)}{9k^2-4} \Rightarrow OB = \frac{6\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{9k^2-4}}.$$

$$S_{ABCD} = 4S_{OAB} = 2OA \cdot OB = \frac{72(k^2+1)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có } \sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)} \leq \frac{5}{2}(k^2+1) \text{ nên } S_{ABCD} \geq \frac{144}{5}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABCD} \text{ nhỏ nhất } \Leftrightarrow 9-4k^2 = 9k^2-4 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

Vậy diện tích $ABCD$ nhỏ nhất khi các đường thẳng Δ và Δ' là các đường phân giác của các góc phần tư thứ nhất và thứ hai.

Câu 25. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý trên (H) đến các đường tiệm cận bằng $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

Lời giải

$$(H) \text{ có hai đường tiệm cận } \Delta_{1,2}: y = \pm \frac{b}{a}x \text{ hay } \Delta_1: bx - ay = 0, \Delta_2: bx + ay = 0.$$

$$M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

$$\text{Khi đó: } d(M, \Delta_1) \cdot d(M, \Delta_2) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \text{ (đpcm).}$$

Câu 26. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại P, Q và cắt hai đường tiệm cận ở M, N . Chứng minh $MP = NQ$. Nếu Δ có phương trình không đổi thì tích $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ là hằng số.

Lời giải

Phương trình chung các đường tiệm cận Δ_1, Δ_2 là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Gọi $\Delta: Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$).

Nếu $B = 0$ thì Δ vuông góc với Ox . Khi đó $MP = NQ$ vì (H) nhận làm Ox trục đối xứng.

Nếu $B \neq 0$ thì P, Q có hoành độ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (Vì vế trái của phương trình (H) và phương trình các đường tiệm cận giống nhau).

Hoành độ M, N là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + d = 0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm PQ và MN , ta có: $x_I = x_J = -\frac{b}{2a}$. Suy ra $I \equiv J$.

Vậy $MP = NQ$.

Gọi $\vec{u} = (m; n)$ không đổi, $m^2 + n^2 \neq 0$ là vectơ chỉ phương của Δ và $P(x_0; y_0)$. Khi đó tồn tại các số t_1, t_2 sao cho $\overrightarrow{PM} = t_1 \vec{u}$, $\overrightarrow{PN} = t_2 \vec{u}$.

Tọa độ các điểm M, N là $\begin{cases} x_M = x_0 + mt_1 \\ y_M = y_0 + nt_1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_N = x_0 + mt_2 \\ y_N = y_0 + nt_2 \end{cases}$.

M, N thuộc hai đường tiệm cận của (H) nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$\frac{(x_0 + tm)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + tn)^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \right) t^2 + 2 \left(\frac{x_0 m}{a^2} - \frac{y_0 n}{b^2} \right) t + 1 = 0.$$

$$\text{Do đó } t_1 t_2 = \frac{1}{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{m^2 b^2 - n^2 a^2}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = t_1 t_2 \vec{u}^2 = \frac{a^2 b^2}{m^2 b^2 - n^2 a^2} \cdot (m^2 + n^2) \text{ không đổi.}$$

Câu 27. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm, A_1, A_2 là các đỉnh của (H) . M là điểm tùy ý trên (H) và N là hình chiếu của nó trên trục hoành. Chứng minh rằng

$$\text{a) } OM^2 - MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - b^2.$$

$$\text{b) } (MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2).$$

$$\text{c) } MN^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{NA_1} \cdot \overrightarrow{NA_2}.$$

Lời giải

a) $M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right|, MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right|$. Khi đó:

$$\begin{aligned} OM^2 - MF_1 \cdot MF_2 &= x^2 + y^2 - \left| a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 \right| = x^2 + y^2 - \left| a^2 - c^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right) \right| = x^2 + y^2 - \left| -b^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2 \right| \\ &= a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 - b^2 - \frac{a^2 + b^2}{b^2}y^2 = a^2 - b^2. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$(MF_1 + MF_2)^2 = (MF_1 - MF_2)^2 + 4MF_1 \cdot MF_2 = 4a^2 + 4 \left| a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 \right| = 4a^2 + 4b^2 + \frac{4c^2}{b^2}y^2.$$

$$\begin{aligned} 4(OM^2 + b^2)(MF_1 + MF_2)^2 &= 4(x^2 + y^2 + b^2) = 4 \left(a^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 \right) + 4y^2 + 4b^2 \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4y^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + 1 \right) = 4a^2 + 4b^2 + \frac{4c^2}{b^2}y^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (MF_1 + MF_2)^2 = 4(OM^2 + b^2).$$

c) Ta có

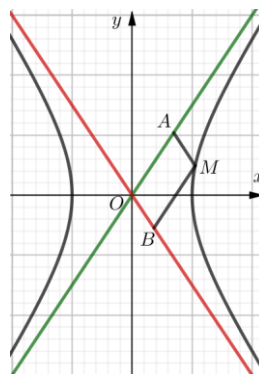
$$MN^2 = y^2.$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{NA_1} \cdot \overrightarrow{NA_2} = \frac{b^2}{a^2} (-x-a)(-x+a) = -\frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = y^2.$$

$$\text{Vậy } MN^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{NA_1} \cdot \overrightarrow{NA_2}.$$

Câu 28. Cho hyperbol (H) . Chứng minh diện tích của hình bình hành xác định bởi hai đường tiệm cận và hai đường thẳng đi qua một điểm trên (H) , song song với hai đường tiệm cận là một hằng số.

Lời giải



$$\text{Gọi } (H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Qua điểm M tùy ý trên (H) , kẻ hai đường thẳng song song với hai đường tiệm cận và cắt hai tiệm cận tại B và A .

Đặt $A\left(m; \frac{b}{a}m\right), B\left(n; -\frac{b}{a}n\right)$. Ta có: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(m+n; \frac{b}{a}(m-n)\right)$.

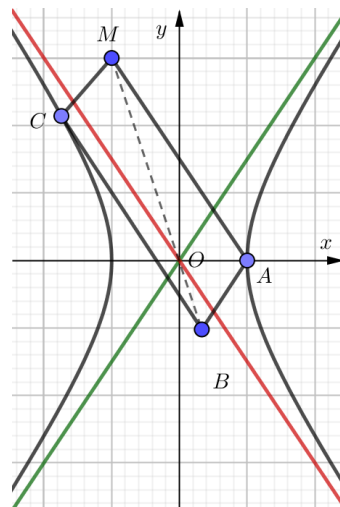
$$M \in (H) \text{ nên } \frac{(m+n)^2}{a^2} - \frac{(m-n)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow 4mn = a^2.$$

Gọi S là diện tích hình bình hành $OAMB$, ta có:

$$S = 2S_{OAB} = OA \cdot OB \cdot \sin AOB = \left|m\left(-\frac{b}{a}n\right) - \left(\frac{b}{a}m\right)n\right| = \frac{b}{a}|-2mn| = \frac{ab}{2} \text{ (không đổi)}.$$

Câu 29. Hai đỉnh đối diện của một hình bình hành nằm trên hyperbol (H) , các cạnh của hình bình hành song song với các đường tiệm cận của (H) . Chứng minh đường thẳng nối hai đỉnh đối diện còn lại của hình bình hành đó luôn đi qua tâm đối xứng của (H) .

Lời giải



Gọi $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Gọi $ABCD$ là hình bình hành có các cạnh song song với các đường tiệm cận và hai đỉnh đối diện A, C nằm trên (H) .

Đặt $A(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$ thì $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ và $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$.

Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình là $bx - ay = 0$ và $bx + ay = 0$.

Hai cạnh của hình bình hành đi qua A có phương trình: $b(x - x_1) + a(y - y_1) = 0$ (1) và $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$ (2).

Hai cạnh của hình bình hành đi qua C có phương trình: $b(x - x_2) + a(y - y_2) = 0$ (3) và $b(x - x_2) - a(y - y_2) = 0$ (4).

Giao điểm của hai đường thẳng (1) và (4) và giao điểm của hai đường thẳng (2) và (3) chính là các đỉnh B, D của hình bình hành. Bằng cách giải các hệ phương trình, ta tìm được tọa độ của B

và D :
$$\begin{cases} x_B = \frac{b(x_1 + x_2) + a(y_1 - y_2)}{2b} \\ y_B = \frac{b(x_1 - x_2) + a(y_1 + y_2)}{2a} \end{cases}, \begin{cases} x_D = \frac{b(x_1 + x_2) - a(y_1 - y_2)}{2b} \\ y_D = \frac{-b(x_1 - x_2) + a(y_1 + y_2)}{2a} \end{cases}$$

Ta cần chứng minh đường chéo BD đi qua O , tức là chứng minh $\frac{x_B}{x_D} = \frac{y_B}{y_D}$ hay $x_By_D = x_Dy_B$.

Thật vậy,

$$\begin{aligned} x_By_D = x_Dy_B &\Leftrightarrow [b(x_1 + x_2) + a(y_1 - y_2)] \cdot [-b(x_1 - x_2) + a(y_1 + y_2)] \\ &= [b(x_1 + x_2) - a(y_1 - y_2)] \cdot [b(x_1 - x_2) + a(y_1 + y_2)] \\ &\Leftrightarrow -b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = b^2(x_1^2 - x_2^2) - a^2(y_1^2 - y_2^2) \Leftrightarrow 2b^2(x_1^2 - x_2^2) - 2a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol.

Câu 30. Tìm tiêu điểm, đường chuẩn và vẽ parabol sau

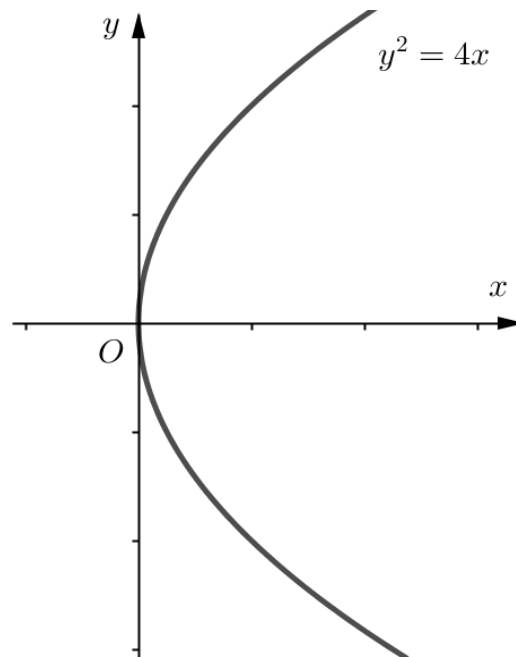
a) $y^2 = 4x$.

b) $y^2 - x = 0$.

Lời giải

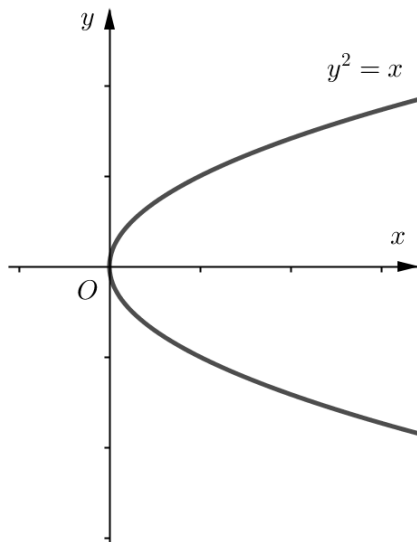
a) $y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$.

Tiêu điểm $F(1;0)$, phương trình đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -1$.



b) $y^2 - x = 0 \Leftrightarrow y^2 = x \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

Tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4};0\right)$, phương trình đường chuẩn $x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$.



Câu 31. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết

a) (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$.

b) khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ là $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$.

a) (P) có tiêu điểm là $F(5;0)$ nên $\frac{p}{2} = 5 \Leftrightarrow p = 10$.

Vậy phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 20x$.

b) Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta: x + y - 12 = 0$ là

$$2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{p}{2} - 12\right|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 16 \\ p = 32 \end{cases}.$$

Vậy có hai parabol thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là $y^2 = 32x$ và $y^2 = 64x$.

Câu 32. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) biết

a) (P) có đường chuẩn $\Delta: x = -5$.

b) (P) có $p = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của parabol (P) : $y^2 = 2px$, $p > 0$.

a) Đường chuẩn $\Delta: x = -5 \Rightarrow -\frac{p}{2} = -5 \Rightarrow p = 10$ nên (P) : $y^2 = 20x$.

b) Tham số tiêu $p = \frac{1}{3}$ nên (P) : $y^2 = \frac{2}{3}x$.

Câu 33. Cho elip (E) : $9x^2 + 16y^2 = 144$.

a) Tìm các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip.

- b) Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip (E).
- c) Lập phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của elip (E).

Lời giải

a) (E): $9x^2 + 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Ta có $a^2 = 16$, $b^2 = 9 \Rightarrow a = 4, b = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 5$.

Vậy elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7}; 0)$; $F_2(\sqrt{7}; 0)$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{7}$, tâm sai $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

b) Hypebol (H): $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip nên $A = a = 4, B = b = 3$.

Vậy (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

c) Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Ta có tiêu điểm là tiêu điểm bên phải của elip $F_2(\sqrt{7}; 0)$ nên $\frac{p}{2} = \sqrt{7} \Rightarrow p = 2\sqrt{7}$.

Vậy (P): $y^2 = 4\sqrt{7}x$.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc parabol có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px$ ta làm như sau:

Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in (P) \Leftrightarrow y_M^2 = 2px_M$ ta thu được phương trình thứ nhất.

Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai.

Giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M .

Câu 34. Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol có tiêu điểm F .

- a) Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 3.
- b) Tìm điểm M trên (P) sao cho $S_{OMF} = 8$.
- c) Tìm điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho AB ngắn nhất.

Lời giải

a) Giả sử $M(x_M; y_M) \in (P) \Rightarrow y_M^2 = 8x_M$. (*)

Từ phương trình (P) có $p = 4$ nên $F(2; 0)$.

Ta có $FM = \frac{p}{2} + x_M$ suy ra $x_M = 1$, kết hợp với (*) ta có $y_M = \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(1; 2\sqrt{2}), M_2(1; -2\sqrt{2})$.

b) Ta có $M \in (P) \Rightarrow M\left(\frac{a^2}{8}; a\right)$ với $a \geq 0$.

$$S_{OMF} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OF \cdot d(M; OF) = 8 \Leftrightarrow a = 8.$$

Vậy điểm M cần tìm là $M(8; 8)$.

c) Với mọi điểm $A \in (P)$, $B \in \Delta$ ta luôn có $AB \geq d(A; \Delta)$.

$$A \in (P) \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{8}; a\right) \text{ với } a \geq 0, \text{ khi đó } d(A; \Delta) = \frac{\left|4 \cdot \frac{a^2}{8} - 3a + 5\right|}{5} = \frac{(a-3)^2 + 1}{10} \geq \frac{1}{10}.$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\left(\frac{9}{8}; 3\right)$ và B là hình chiếu của A lên Δ .

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u} = (3; 4)$ là véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x - \frac{9}{8}\right) + 4(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 24x + 32y - 123 = 0$.

$$\text{Do đó tọa độ điểm } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 24x + 32y - 123 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{209}{200} \\ y = \frac{153}{50} \end{cases}.$$

Vậy $A\left(\frac{9}{8}; 3\right)$, $B\left(\frac{209}{200}; \frac{153}{50}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 35. Cho parabol $(P): y^2 = 12x$ có tiêu điểm F . Tìm hai điểm A, B trên (P) sao cho tam giác OAB có trục tâm là F .

Lời giải

Ta có: $F(3; 0)$ nên tam giác OAB nhận F là trục tâm thì A, B đối xứng qua Ox .

Gọi $A(m; n)$ thì $B(m; -n)$, $m \neq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \in (P) \\ OA \perp BF \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 = 12m \\ m(m-3) - n^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-15) = 0 \\ n^2 = 12m \end{cases}.$$

Chọn $m = 15$ nên $n^2 = 180 \Rightarrow n = \pm 6\sqrt{5}$. Vậy $A(15; 6\sqrt{5})$ và $B(15; -6\sqrt{5})$.

Câu 36. Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$. Tìm tọa độ các điểm M nằm trên parabol (P) và cách tiêu điểm một khoảng bằng 3.

Lời giải

Giả $(P): y^2 = 4x = 2px \Rightarrow p = 2$.

Gọi $M(x; y) \in (P)$ thì $MF = x + \frac{p}{2} = x + 1$. Ta có $MF = 3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Thế vào $(P): y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$.

Vậy có hai điểm $M_1(2; 2\sqrt{2})$ và $M_2(2; -2\sqrt{2})$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 37. Tìm độ dài dây cung vuông góc với trục đối xứng của parabol $y^2 = 2px$ tại tiêu điểm F .

Lời giải

Ta có $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ là tiêu điểm của parabol $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Đường thẳng vuông góc với Ox tại F có phương trình là $x = \frac{p}{2}$.

Giao điểm của đường thẳng với parabol phải có tọa độ thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x = \frac{p}{2} \end{cases}.$$

Do đó $y^2 = p^2 \Rightarrow y = \pm p$ nên có giao điểm là $A\left(\frac{p}{2}; p\right)$ và $B\left(\frac{p}{2}; -p\right)$.

Vậy $AB = 2p$.

Câu 38. Cho parabol $(P): y^2 = 2px$. Với mỗi điểm $M \in (P)$ và khác gốc O , gọi M' là hình chiếu của M lên Oy và I là trung điểm của đoạn OM' . Chứng minh đường thẳng IM có điểm chung duy nhất với (P) và là phân giác của góc $M'MF$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0) \in (P)$ thì $y_0^2 = 2px_0$; $M'(0; y_0)$ suy ra $I = \left(0; \frac{y_0}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng IM là $\frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} \Leftrightarrow \frac{x}{x_0} - \frac{2y}{y_0} + 1 = 0$.

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ \frac{x}{x_0} - \frac{2y}{y_0} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2x_0}{y_0}y - x_0 \\ y^2 = 2p\left(\frac{2x_0}{y_0}y - x_0\right) \end{cases}.$$

Mà $x_0 = \frac{y_0^2}{2p}$ nên $y_0 = 2p\left(\frac{yy_0}{p} - \frac{y_0^2}{2p}\right) \Leftrightarrow y^2 - 2y_0y + y_0^2 = 0$.

Vì phương trình có nghiệm kép $\Rightarrow IM$ có điểm chung duy nhất với (P) .

Hạ $HM \perp \Delta$. Ta chứng minh $HF \perp MI$.

Vì tam giác HMF có $MH = MF$ nên cân tại M .

Suy ra đường cao MI cũng là phân giác của góc $M'MF$.

Câu 39. Qua một điểm A cố định trên trục đối xứng của parabol $(P): y^2 = 2px$, ta vẽ một đường thẳng cắt (P) tại hai điểm M, N . Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ M, N tới trục đối xứng của (P) là hằng số.

Lời giải

Gọi $A(a; 0)$. Đường thẳng Δ đi qua A có phương trình $A(x-a) + By = 0$.

Với $A \neq 0$, khi đó tung độ các giao điểm của đường thẳng Δ và (P) là nghiệm của phương trình

$$A \frac{y^2}{2p} + By - Aa = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + 2pBy - 2pAa = 0.$$

Suy ra $d(M; Ox) \cdot d(N; Ox) = |y_M| \cdot |y_N| = \left| -\frac{2pAa}{A} \right| = 2p|a|$ không đổi.

Câu 40. Cho dây cung AB đi qua tiêu điểm F của parabol (P) . Chứng minh khoảng cách từ trung điểm I của AB đến đường chuẩn Δ bằng $\frac{AB}{2}$. Suy ra đường tròn đường kính PB tiếp xúc với đường chuẩn.

Lời giải

Hạ AA', BB', II' vuông góc với đường chuẩn Δ .

Hình thang vuông $ABB'A'$ có II' là đường trung bình nên $d(I, \Delta) = II' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$.

Mà A, B thuộc parabol nên $AF = AA'$ và $BF = BB'$

Do đó $AA' + BB' = AF + BF = AB$

Vậy $d(I, \Delta) = \frac{1}{2}AB$, suy ra đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn Δ .

Câu 41. Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ và đường thẳng d có phương trình $2mx - 2y - mp = 0$. Gọi A, B là các giao điểm của (P) và d . Chứng tỏ rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúa với đường chuẩn của (P) .

Lời giải

Phương trình $d: 2mx - 2y - mp = 0 \Leftrightarrow m(2x - p) - 2y = 0$.

Suy ra d luôn đi qua tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ của (P) .

Do đó dây AB đi qua tiêu điểm F .

Bài toán đưa về bài toán của ví dụ 14 đã chứng minh ở trên.

Câu 42. Cho A, B là hai điểm trên parabol $(P): y^2 = 2px$ sao cho tổng khoảng cách từ A, B tới đường chuẩn của (P) bằng độ dài AB . Chứng minh rằng AB luôn đi qua tiêu điểm của (P) .

Lời giải

Gọi F là tiêu điểm của (P) .

Gọi A', B' theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên đường chuẩn Δ của (P) .

Ta có $A, B \in (P) \Rightarrow AF = d(A, \Delta) = AA'; BF = d(B, \Delta) = BB'$.

Suy ra $AF + BF = AA' + BB' = AB$.

Vậy A, B, F thẳng hàng hay AB đi qua F .

Câu 43. Cho parabol $(P): y^2 = \frac{1}{2}x$. Hai điểm lưu động M, N thuộc (P) , khác gốc O sao cho OM vuông góc với ON . Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thuộc (P) nên $x_1 = 2y_1^2, x_2 = 2y_2^2$.

Do OM vuông góc với ON nên ta có :

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow 4(y_1y_2)^2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow y_1y_2 = -\frac{1}{4}. \text{ (vì } M, N \text{ khác } O)$$

Phương trình đường thẳng qua M, N phân biệt là :

$$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} &= \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \\ \Leftrightarrow (y_2-y_1)x - (x_2-x_1)y + y_1x_2 - x_1y_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y_2-y_1)[x - 2(y_2-y_1)y + 2y_1x_2] &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2(y_2+y_1)y + 2y_1y_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2(y_2+y_1)y - \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Với $x = \frac{1}{2}, y = 0$ thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 44. Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ ($p > 0$). A là một điểm cố định trên (P) . Một góc vuông uAt quay quanh đỉnh A có các cạnh cắt (P) tại B và C . Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

$$\text{Giả sử } A\left(\frac{a^2}{2p}; a\right), B\left(\frac{b^2}{2p}; b\right), C\left(\frac{c^2}{2p}; c\right).$$

Phương trình đường thẳng BC là: $2px - (b+c)y + bc = 0$

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = \left(\frac{b^2-a^2}{2p}; b-a\right), \overline{AC} = \left(\frac{c^2-a^2}{2p}; c-a\right).$$

$$\text{Do: } \overline{AB} \perp \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a^2)(c^2 - a^2) + 4p^2(b-a)(c-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+a)(c+a) + 4p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow bc + a(b+c) + a^2 + 4p^2 = 0$$

Do đó: $bc = -a(b+c) - a^2 - 4p^2$ nên phương trình của BC là

$$2px - a^2 - 4p^2 - (b+c)(y+a) = 0.$$

$$\text{Từ đó đường thẳng } BC \text{ luôn đi qua một điểm cố định } M\left(\frac{a^2}{2p} + 2p; -a\right).$$

Câu 45. Cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y^2 = 2px$ và $y^2 = 2p'x$. Qua O vẽ đường thẳng thay đổi cắt (P) và (P') tại hai điểm phân biệt A và A' . Chứng minh rằng tỉ số $\frac{OA}{OA'}$ không thay đổi.

Lời giải

Đường thẳng đi qua O cắt hai parabol (P) và (P') lần lượt tại hai điểm phân biệt A và A' có dạng $y = kx$ với $k \neq 0$.

Giả sử $A(x_0; y_0)$ là nghiệm khác 0 của hệ phương trình:
$$\begin{cases} y = kx \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2p}{k^2} \\ y_0 = \frac{2p}{k} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } OA = \sqrt{\left(\frac{2p}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{2p}{k}\right)^2} = \frac{2p}{k^2} \cdot \sqrt{1+k^2}$$

$$\text{Tương tự } OA' = \frac{2p'}{k^2} \cdot \sqrt{1+k^2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{OA}{OA'} = \frac{p}{p'} \text{ không đổi.}$$

Câu 46. Cho Parabol $(P): y^2 = 2px$ ($p > 0$) và đường thẳng d quay quanh tiêu điểm F và cắt (P) tại hai điểm M, N . Gọi $\alpha = \left(\vec{i}, \vec{FM}\right)$, ($0 < \alpha < \pi$).

a) Chứng minh $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$ không đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM \cdot FN$ khi α thay đổi.

Lời giải

a) Chứng minh $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF}$ không đổi.

Gọi H, M' theo thứ tự là hình chiếu của M trên Ox và đường chuẩn Δ của parabol (P) .

Gọi I là giao điểm của Ox và Δ .

Ta có: $\vec{MF} = \vec{MM'} = \vec{IH}$

$$\vec{IH} = \vec{IF} + \vec{FH} = p + \vec{FM} \cdot \vec{i} = p + MF \cdot \cos \alpha.$$

$$\Rightarrow MF = \frac{p}{1 - \cos \alpha}. \text{ Vì } \left(\vec{FN}, \vec{i}\right) = 180^\circ - \alpha.$$

$$\text{Tương tự: } \Rightarrow NF = \frac{p}{1 - \cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{p}{1 + \cos(\alpha)}$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{MF} + \frac{1}{NF} = \frac{1 - \cos \alpha}{p} + \frac{1 + \cos \alpha}{p} = \frac{2}{p} \text{ không đổi.}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $FM \cdot FN$ khi α thay đổi.

$$FM \cdot FN = \frac{p}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{p}{1 + \cos \alpha} = \frac{p^2}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{p^2}{\sin^2 \alpha}.$$

$$FM \cdot FN \text{ có giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow d \perp Ox.$$

Câu 47. Cho hai parabol lần lượt có phương trình $y^2 = 2px$ và $y = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng nếu hai parabol đó cắt nhau tại bốn điểm phân biệt thì bốn điểm đó nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Tọa độ giao điểm của hai parabol đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với a rồi trừ đi phương trình thứ 2 ta được:

$$\begin{aligned}
ay^2 - y &= 2apx - ax^2 - bx - c \\
\Leftrightarrow ax^2 + ay^2 - (2ap - b)x - y + c &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2ap - b}{a}x - \frac{1}{a}y + \frac{c}{a} &= 0.
\end{aligned}$$

Tọa độ các giao điểm thỏa mãn phương trình trên là phương trình của một đường tròn. Vậy bốn giao điểm nằm trên một đường tròn.

Dạng 4. Các bài toán liên quan đường conic

Để nhận dạng đường conic ta dựa vào tâm sai:

- Elip là một đường conic có tâm sai $e < 1$.
- Parabol là một đường conic có tâm sai $e = 1$.
- Hypebol là một đường conic có tâm sai $e > 1$.

Từ phương trình của các đường conic ta xác định được dạng của nó từ đó xác định được tiêu điểm và đường chuẩn của nó.

Câu 48. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường conic sau.

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1. & \text{b) } \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{10} = 1 & \text{c) } y^2 = 18x
\end{array}$$

Lời giải

a) Dễ thấy đây là phương trình chính tắc của đường elip

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = 5 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1.$$

$$\text{Do đó } c = 1, \text{ tâm sai } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vậy ta có:

$$\text{Tiêu điểm } F_1(-1; 0) \text{ tương ứng có đường chuẩn } x + \frac{\sqrt{5}}{1} = 0 \text{ hay } x + 5 = 0.$$

$$\text{Tiêu điểm } F_2(1; 0) \text{ tương ứng có đường chuẩn } x - \frac{\sqrt{5}}{1} = 0 \text{ hay } x - 5 = 0.$$

b) Đây là phương trình chính tắc của đường hypebol.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 17.$$

$$\text{Do đó } c = \sqrt{17}, \text{ tâm sai } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{17}{7}}.$$

Vậy ta có:

Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{17}; 0)$ tương ứng có đường chuẩn $x + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{17}{7}}} = 0$ hay $x + \frac{7}{\sqrt{17}} = 0$.

Tiêu điểm $F_2(\sqrt{17}; 0)$ tương ứng có đường chuẩn $x - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{17}{7}}} = 0$ hay $x - \frac{7}{\sqrt{17}} = 0$.

c) Đây là phương trình chính tắc của đường parabol.

Ta có $2p = 18 \Rightarrow p = 9$.

Vậy tiêu điểm $F\left(\frac{9}{2}; 0\right)$ và đường chuẩn $x + \frac{9}{2} = 0$.

Câu 49. Cho conic có tiêu điểm $F(-1; 1)$ đi qua điểm $M(1; 1)$ và đường chuẩn $\Delta: 3x + 4y - 5 = 0$. Conic này là elip, hypebol hay là parabol?

Lời giải

Ta có $MF = 2, d(M; \Delta) = \frac{|3+4-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2}{5}$. Suy ra $\frac{MF}{d(M; \Delta)} = 5 > 1$ suy ra đây là elip.

Dựa vào các dạng của đường conic mà giả thiết đã cho để viết phương trình

Dựa vào định nghĩa ba đường conic

Câu 50. Cho đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ và điểm $F(1; 0)$. Viết phương trình của đường conic nhận F làm tiêu điểm và Δ làm đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau:

a) Tâm sai $e = \sqrt{3}$.

b) Tâm sai $e = \frac{1}{2}$

c) Tâm sai $e = 1$

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường conic cần tìm.

Ta có: $MF = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}, d(M; \Delta) = \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}}$

Theo định nghĩa ta có: $\frac{MF}{d(M; \Delta)} = e \Leftrightarrow MF = e \cdot d(M; \Delta) (*)$

a) Tâm sai $e = \sqrt{3}$ thì

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 3(x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + y^2 - 6xy + 10x - 6y + 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm là $2x^2 + y^2 - 6xy + 10x - 6y + 1 = 0$.

b) Tâm sai $e = \frac{1}{2}$ thì

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow 8(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y \\
&\Leftrightarrow 7x^2 + 7y^2 + 2xy - 18x + 2y + 7 = 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm: $7x^2 + 7y^2 + 2xy - 18x + 2y + 7 = 0$.

c) Tâm sai $e=1$ thì

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 2y + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đường conic cần tìm: $x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$.

Câu 51. Cho điểm $A(0; \sqrt{3})$ và hai đường thẳng $\Delta: x-2=0$, $\Delta': 3x-y=0$.

a) Viết phương trình chính tắc đường elip có A là một đỉnh và một đường chuẩn Δ .

b) Viết phương trình chính tắc đường hypebol có Δ là một đường chuẩn và Δ' là tiệm cận.

Lời giải

a) Gọi phương trình chính tắc của elip là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$.

Vì $A(0; \sqrt{3})$ là một đỉnh của elip nên $b = \sqrt{3}$.

Elip có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{c} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2c$ (*)

Ta lại có: $b^2 = a^2 - c \Rightarrow 3 = a^2 - c \Rightarrow c = a^2 - 3$

Thay vào (*) ta có $a^2 = 2(a^2 - 3) \Leftrightarrow a^2 = 6$.

Vậy phương trình chính tắc elip cần tìm là: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

b) Gọi phương trình chính tắc của hypebol là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Hypebol có một đường chuẩn là Δ nên $\frac{a}{e} = 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 2 \Leftrightarrow c = \frac{a^2}{2}$. (1)

Hypebol có một đường tiệm cận là Δ' nên $\frac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow b = 3a$. (2)

Mặt khác: $b^2 = c^2 - a^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta được $(3a)^2 = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 - a^2 \Leftrightarrow 10a^2 = \frac{a^4}{4} \Leftrightarrow a^2(40 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 40$.

Suy ra $b^2 = 9a^2 = 360$.

Vậy phương trình chính tắc hypebol cần tìm là: $\frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{360} = 1$.

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Các bài toán liên quan elip

Câu 1. Đường Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

- A. 6. B. 8. C. 9. D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có $a^2 = 16$, $b^2 = 7$ suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 7 = 9 \Leftrightarrow c = 3$.

Vậy tiêu cự $2c = 2.3 = 6$.

Câu 2. Cho elip (E) có phương trình $16x^2 + 25y^2 = 400$. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. (E) có trục nhỏ bằng 8.
B. (E) có tiêu cự bằng 3.
C. (E) có trục nhỏ bằng 10.
D. (E) có các tiêu điểm $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$.

Lời giải

Chọn B

$(E): 16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Elip (E) có $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Tiêu cự của elip (E) là $2c = 6$ nên khẳng định “ (E) có tiêu cự bằng 3” là khẳng định sai.

Câu 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tiêu cự của (E) bằng

- A. 10. B. 16. C. 4. D. 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình chính tắc của elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Do đó elip (E) có $\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$.

Tiêu cự của elip (E) bằng $2c = 8$.

Câu 4. Một elip có diện tích hình chữ nhật cơ sở là 80, độ dài tiêu cự là 6. Tâm sai của elip đó là

- A. $e = \frac{4}{5}$. B. $e = \frac{3}{4}$. C. $e = \frac{3}{5}$. D. $e = \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $2a.2b = 80$, suy ra $a.b = 20$ (1).

Lại có $2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 = 9$ (2).

Từ (1) $\Rightarrow b = \frac{20}{a}$, thay vào (2) ta được:

$$a^2 - \frac{400}{a^2} = 9 \Rightarrow a^4 - 9a^2 - 400 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5.$$

Do đó tâm sai $e = \frac{3}{5}$.

Câu 5. Cho elip $(E): 4x^2 + 5y^2 = 20$. Diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E) là

- A. $2\sqrt{5}$. B. 80. C. $8\sqrt{5}$. D. 40.

Lời giải

Chọn C

$$(E): 4x^2 + 5y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Độ dài trục lớn: $2a = 2\sqrt{5}$.

Độ dài trục bé: $2b = 2.2 = 4$.

Diện tích hình chữ nhật cơ sở của (E) là: $2\sqrt{5}.4 = 8\sqrt{5}$.

Câu 6. Đường elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

- A. 3. B. 9. C. 6. D. 18.

Lời giải

Chọn C

□ Ta có: $a^2 = 16$, $b^2 = 7$ nên $c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

□ Tiêu cự của elip là $2c = 6$.

Câu 7. Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tính tâm sai của elip.

- A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$; $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$; $c^2 = a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Tâm sai của elip là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > b > 0$) có F_1, F_2 là các tiêu điểm và M là một điểm di động trên (E) . Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

- A. $MF_1 + MF_2 = 2b$. B. $(MF_1 - MF_2)^2 = 4(b^2 - OM^2)$.
C. $OM^2 - MF_1.MF_2 = a^2 - b^2$. D. $MF_1.MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a}; MF_2 = a - \frac{cx}{a} \Rightarrow MF_1.MF_2 = a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}.$$

$$M(x; y) \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \Rightarrow OM^2 = x^2 + y^2 = x^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = x^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

$$MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = a^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} + x^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = a^2 + b^2 + x^2 - \left(\frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2} \right)$$

$$= a^2 + b^2 + x^2 - \frac{(b^2 + c^2)x^2}{a^2}$$

$$\text{Vì } a^2 = b^2 + c^2 \text{ nên } MF_1 \cdot MF_2 + OM^2 = a^2 + b^2 + x^2 - \frac{(b^2 + c^2)x^2}{a^2} = a^2 + b^2 + x^2 - \frac{a^2 x^2}{a^2} = a^2 + b^2$$

Câu 9. Trong hệ trục Oxy, cho Elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0), F_2(4;0)$ và một điểm M nằm trên (E) . Biết rằng chu vi của tam giác MF_1F_2 bằng 18. Xác định tâm sai e của (E) .

A. $e = \frac{4}{5}$. B. $e = \frac{4}{18}$. C. $e = -\frac{4}{5}$. D. $e = \frac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F_1(-4;0) \Rightarrow c = 4$.

$$P_{\Delta MF_1F_2} = \underbrace{MF_1 + MF_2}_{2a} + F_1F_2$$

$$\Leftrightarrow 18 = 2a + 2c \Leftrightarrow 18 = 2a + 8 \Leftrightarrow a = 5.$$

$$\text{Tâm sai } e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}.$$

Câu 10. Cho Elip (E) đi qua điểm $A(-3;0)$ và có tâm sai $e = \frac{5}{6}$. Tiêu cự của (E) là

A. 10. B. $\frac{5}{3}$. C. 5. D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.

$$\text{Vì } (E) \text{ đi qua điểm } A(-3;0) \text{ nên } \frac{9}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3.$$

$$\text{Lại có } e = \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \Rightarrow c = \frac{5a}{6} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2c = 5.$$

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của một elip?

A. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$. C. $\frac{x}{9} + \frac{y}{8} = 1$. D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ nên chọn phương án D.

Câu 12. Phương trình chính tắc của đường elip với $a = 4, b = 3$ là

$$\text{A. } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Lời giải

Chọn C

Phương trình chính tắc (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip biết một đỉnh là $A_1(-5;0)$ và một tiêu điểm là $F_2(2;0)$.

$$\text{A. } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{29} = 1.$$

Lời giải

Chọn A

Ta có $a=5; c=2 \Rightarrow b^2 = 25 - 4 = 21$

Vậy $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1.$

Câu 14. Tìm phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{10}$ và đi qua điểm $A(0;6)$:

$$\text{A. } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{160} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình chính tắc Elip (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$

Theo giả thiết ta có $2a = 4\sqrt{10} \Rightarrow a = 2\sqrt{10}.$

Mặt khác (E) đi qua $A(0;6)$ nên ta có $\frac{6^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 6.$

Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{36} = 1$

Câu 15. Lập phương trình chính tắc của Elip đi qua điểm B và có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

$$\text{A. } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$\text{B. } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

$$\text{C. } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

$$\text{D. } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Lời giải

Chọn A

Phương trình chính tắc của Elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0).$

Elip đi qua điểm B nên $\frac{0^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 4.$

Tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3}a.$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 4 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = 9.$$

Vậy phương trình chính tắc của Elip cần tìm là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Câu 16. Phương trình chính tắc của Elip có đỉnh $(-3;0)$ và một tiêu điểm là $(1;0)$ là

A. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1.$

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$

C. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1.$

D. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1.$

Lời giải

Chọn B

Elip có đỉnh $(-3;0) \Rightarrow a=3$ và một tiêu điểm $(1;0) \Rightarrow c=1.$

Ta có $c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8.$

Vậy phương trình $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$

Câu 17. Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$

C. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1.$

D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình chính tắc của elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Độ dài trục lớn $2a=10 \Leftrightarrow a=5$

Tiêu cự $2c=6 \Leftrightarrow c=3$

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16$

Vậy phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Câu 18. Cho elip (E) có độ dài trục lớn gấp hai lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng 6. Viết phương trình của (E) ?

A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1.$

B. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1.$

C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1.$

D. $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1.$

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $a = 2b, 2c = 6 \Rightarrow c = 3.$

$$\text{Mà } a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 4b^2 - b^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 12 \end{cases}$$

Vậy phương trình $(E): \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1.$

Câu 19. Phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$

B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$

C. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1.$

D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Lời giải

Chọn D.

+ Phương trình Elip dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$

+ Do có độ dài trục lớn bằng $8 = 2a \Rightarrow a = 4$

+ Do có độ dài trục nhỏ bằng $6 = 2b \Rightarrow b = 3$

+ Suy ra phương trình là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Vậy chọn D

Câu 20. Elip có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$ B. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{16} = 1.$ C. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{5} = 1.$ D. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$

Lời giải:

Chọn A

Gọi (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} ab = 3\sqrt{5} \\ a^2 - b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5 \end{cases}$

Vậy (E) cần tìm là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1..$

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và M nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc vuông.

A. (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$ B. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$ C. (E): $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1.$ D. (E): $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$

Lời giải

Chọn B

Gọi (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Ta có: (E) đi qua $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ nên: $\frac{9}{5a^2} + \frac{16}{5b^2} = 1 \Leftrightarrow 16a^2 + 9b^2 = 5a^2b^2. (1)$

Vì M nhìn hai tiêu điểm F_1, F_2 dưới một góc vuông nên: $OM = \frac{F_1F_2}{2} = c.$

$\Leftrightarrow OM^2 = c^2 \Leftrightarrow \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = c^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = c^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 = 5 + b^2$ thế vào (1) ta được:

$$16(5 + b^2) + 9b^2 = 5(5 + b^2)b^2 \Leftrightarrow b^4 = 16 \Rightarrow b^2 = 4 \text{ nên } a^2 = 9.$$

Vậy: (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Câu 22. Cho Elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu điểm M có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm của (E) bằng:

A. 3,5 và 4,5. B. $4 \pm \sqrt{2}.$ C. 3 và 5. D. $4 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Giả sử phương trình (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) Ta có: $\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Gọi F_1, F_2 lần lượt là hai tiêu điểm của Elip (E), $M(1; y_M) \in (E)$, ta có:

$$\begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a} x_M = 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 4,5 \\ MF_2 = a - \frac{c}{a} x_M = 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 3,5 \end{cases}$$

Chọn **A.**

Câu 23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Điểm $M \in (E)$ sao cho $F_1MF_2 = 90^\circ$. Tìm bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 .

- A. 2 B. 4. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ vì $F_1MF_2 = 90^\circ \Rightarrow MF_1^2 + MF_2^2 = F_1F_2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2 = 16$ (1)

Do $M \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được $x^2 = \frac{175}{16}; y^2 = \frac{81}{16} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4}; y = \frac{9}{4}$

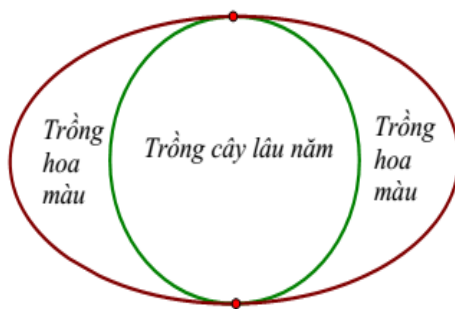
Ta có: nửa chu vi $p = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = \frac{2a + 2c}{2} = a + c = 9$

Khoảng cách từ M đến trục $Ox: d(M; Ox) = |y_M| = \frac{9}{4}$

$S_{\Delta MF_1F_2} = \frac{1}{2} d(M; Ox) \cdot F_1F_2 = 9$

Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \frac{S}{p} = 1$

Câu 24. Ông Hoàng có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.



- A. $T = \frac{2}{3}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = \frac{1}{2}$. D. $T = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo đề ta có: Diện tích (E) là: $S_{(E)} = \pi \cdot a \cdot b = 30 \cdot 15 \cdot \pi = 450\pi, (m^2)$

Vì đường tròn tiếp xúc trong, nên sẽ tiếp xúc tại đỉnh của trục nhỏ, suy ra bán kính đường tròn:

$R = 15m$. Diện tích hình tròn (C) phần trồng cây lâu năm là: $S_{(C)} = \pi \cdot R^2 = 15^2 \cdot \pi = 225\pi, (m^2)$

Suy ra diện tích phần trồng hoa màu là: $S = S_{(E)} - S_{(C)} = 225\pi, (m^2) \Rightarrow T = 1$.

Câu 25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có phương trình lần lượt là $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9, (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ và Elip (E) có phương trình $16x^2 + 49y^2 = 1$. Có bao nhiêu đường tròn (C) có bán kính gấp đôi độ dài trục lớn của elip (E) và (C) tiếp xúc với hai đường tròn $(C_1), (C_2)$?

A. 2.

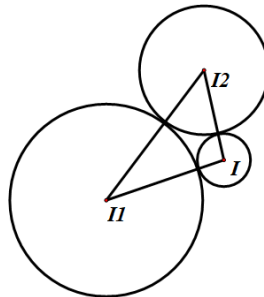
B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A



Ta có $16x^2 + 49y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = 1 \Rightarrow (E)$ có độ dài trục lớn $2a = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Khi đó đường tròn (C) có bán kính là $R=1$. Gọi $I(a; b)$ là tâm của đường tròn (C) .

Xét $\Delta II_1 I_2$ có
$$\begin{cases} II_1 = R + R_1 = 1 + 3 = 4 \\ II_2 = R + R_2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \Delta II_1 I_2 \text{ vuông tại } I. \\ I_1 I_2 = R_1 + R_2 = 5 \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{II_1} = (-1-a; -2-b), \overrightarrow{II_2} = (2-a; 2-b)$. Khi đó điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{II_1} \cdot \overrightarrow{II_2} = 0 \\ |\overrightarrow{II_2}| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-a)(2-a) + (-2-b)(2-b) = 0 \\ (2-a)^2 + (2-b)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a - 6 = 0 \\ a^2 + b^2 - 4a - 4b - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 6 + a \\ 6 + a - 4a - 4b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 6 + a \\ a = \frac{5-4b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5-4b}{3}\right)^2 + b^2 - 6 - \frac{5-4b}{3} = 0 \\ a = \frac{5-4b}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25b^2 - 28b - 44 = 0 \\ a = \frac{5-4b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -\frac{22}{25} \\ a = \frac{5-4b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ a = \frac{71}{25} \\ b = -\frac{22}{25} \end{cases}.$$

Vậy có hai phương trình đường tròn (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1 \text{ hoặc } (C): \left(x - \frac{71}{25}\right)^2 + \left(y + \frac{22}{25}\right)^2 = 1.$$

Câu 26. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $C(3; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. A, B là 2 điểm thuộc (E) sao

cho $\square ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\frac{a}{2}; \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a+c$ bằng:

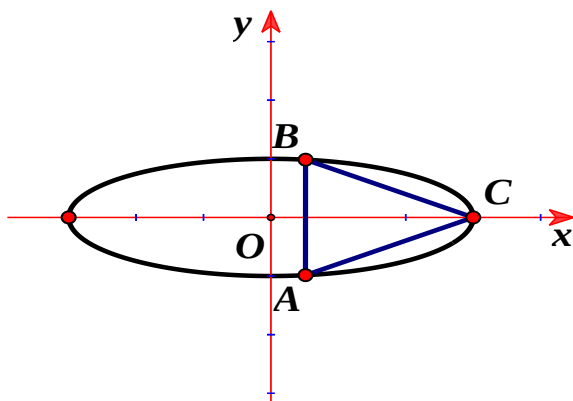
A. 2.

B. 0.

C. -2.

D. -4.

Chọn A



Nhận xét: Điểm $C(3;0)$ là đỉnh của elip $(E) \Rightarrow$ điều kiện cần để $\triangle ABC$ đều đó là A, B đối xứng

Nhau qua Ox . Suy ra A, B là giao điểm của đường thẳng $\Delta: x = x_0$ và elip (E) .

$$+) \text{ Ta có elip } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \end{cases}.$$

$+) \text{ Theo giả thiết } A \text{ có tung độ âm nên tọa độ của } A \left(x_0; -\frac{1}{3}\sqrt{9-x_0^2} \right) \text{ (điều kiện } x_0 < 3 \text{ do } A \neq C)$

$$+) \text{ Ta có } AC = \sqrt{(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2)} \text{ và } d_{(C;\Delta)} = |3-x_0|$$

$$+) \triangle ABC \text{ đều} \Leftrightarrow d_{(C;\Delta)} = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Leftrightarrow |3-x_0| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2)}$$

$$\Leftrightarrow (3-x_0)^2 = \frac{3}{4} \left[(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} (t/m) \\ x_0 = 3 (L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a + c = 2.$$

Dạng 2. Các bài toán liên quan hypebol

Câu 27. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ có tiêu cự bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 6.

Lời giải.

Chọn D.

Ta có: $a^2 = 5$ và $b^2 = 4$ nên $c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$.

Vậy tiêu cự là: $2c = 6$

Câu 28. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$ có tiêu cự bằng

A. 6.

B. $2\sqrt{33}$.

C. 3.

D. 9.

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1 \text{ suy ra } \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 23.$$

$$\text{Tiêu cự là } 2c = 2\sqrt{23}.$$

Câu 29. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây ?

- A. $(-5;0)$. B. $(0;\sqrt{7})$. C. $(\sqrt{7};0)$. D. $(0;5)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ suy ra } \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow c = 5.$$

$$\text{Tiêu điểm } F_1(-5;0), F_2(5;0).$$

Câu 30. Cho điểm M nằm trên Hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$. Nếu điểm M có hoành độ bằng 12 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm là bao nhiêu?

- A. 8. B. 10;6. C. $4 \pm \sqrt{7}$. D. 14;22.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } a^2 = 16; b^2 = 20 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 36$$

$$\text{Vậy } a = 4; b = 2\sqrt{5}, c = 6$$

$$\text{Tiêu điểm } F_1(-6;0); F_2(6;0)$$

$$M \text{ có hoành độ } x = 12 \text{ khi đó } MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 + \frac{6}{4} \cdot 12 \right| = 22; MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 - \frac{6}{4} \cdot 12 \right| = 14$$

Câu 31. Cho điểm M nằm trên Hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của (H) là bao nhiêu?

- A. 6 và 14. B. 5 và 13. C. $8 \pm \sqrt{5}$. D. $8 \pm 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } a^2 = 16; b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 25$$

$$\text{Vậy } a = 4; b = 3, c = 5$$

$$\text{Tiêu điểm } F_1(-5;0); F_2(5;0)$$

$$M \text{ có hoành độ } x = 8 \text{ khi đó } MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 + \frac{5}{4} \cdot 8 \right| = 14; MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = \left| 4 - \frac{5}{4} \cdot 8 \right| = 6$$

Câu 32. Tâm sai của Hyperbol $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } a^2 = 5, b^2 = 4 \text{ suy ra } \begin{cases} c^2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow c = 3 \\ a = \sqrt{5}, b = 2 \end{cases}$$

Tâm sai của Hyperbol là $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 33. Đường Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ có tiêu cự bằng

A. 4.

B. 2.

C. 12.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^2 = 20, b^2 = 16$ suy ra $c^2 = 20 + 16 = 36 \Rightarrow c = 6$.

Khi đó Hyperbol có tiêu cự là $2c = 12$.

Câu 34. Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{12} = 1$?

A. $x + 8 = 0$.

B. $x - \frac{3}{4} = 0$.

C. $x + 2 = 0$.

D. $x + \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{12} = 1$ suy ra $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow c = \sqrt{b^2 + a^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x \pm \frac{a}{e} = 0 \Leftrightarrow x \pm \frac{5\sqrt{2}}{2} = 0$.

Câu 35. Đường thẳng nào dưới đây là đường chuẩn của Hyperbol $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$?

A. $x + 4\sqrt{5} = 0$.

B. $x + 4 = 0$.

C. $x - \frac{4\sqrt{35}}{7} = 0$.

D. $x + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$ suy ra $a = 2\sqrt{5}; b = \sqrt{15} \Rightarrow c = \sqrt{35} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x \pm \frac{4\sqrt{35}}{7} = 0$.

Khi đó đường chuẩn của Hyperbol $x \pm \frac{2\sqrt{5}}{\frac{2\sqrt{10}}{5}} = 0$.

Câu 36. Điểm nào trong 4 điểm $M(5; 0), N(10; 3), P(5; 3), Q(5; 4)$ nằm trên một đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$?

A. M.

B. N.

C. P.

D. Q.

Lời giải

Chọn C.

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5; b = 3 \Rightarrow TC: y = \pm \frac{3}{5}x.$$

Vậy $P \in y = \frac{3}{5}x$.

Câu 37. Tìm góc giữa 2 đường tiệm cận của hyperbol $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B.

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}; b = 1 \Rightarrow TC: y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}; k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Câu 38. Hyperbol (H) có 2 đường tiệm cận vuông góc nhau thì có tâm sai bằng bao nhiêu ?

A. 2.

B. 3.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Hai đường tiệm cận của (H) có phương trình là $y = \frac{b}{a}x$ và $y = -\frac{b}{a}x$.

Do hai đường tiệm cận vuông góc với nhau nên ta có

$$\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy tâm sai của } (H) \text{ là } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

Câu 39. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có tâm sai bằng 2 và tiêu cự bằng 4.

A. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

C. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$.

D. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

Lời giải

Chọn D.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} \frac{c}{a} = 2 \\ 2c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } (H) \text{ có phương trình là } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Câu 40. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường chuẩn là $2x + \sqrt{2} = 0$.

A. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$.

B. $x^2 - y^2 = 1$.

C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$.

D. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

$$\text{Ta có } 2x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Xét phương án A, ta có

$$a^2 = 1, c = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vậy phương án A không thỏa mãn.

Xét phương án B, ta có

$$a^2 = b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow c = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy phương án B thỏa mãn.

Xét phương án C, ta có

$$a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{c} = 1$$

Vậy phương án C sai.

Tương tự, phương án D cũng sai.

Câu 41. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm $(2; 1)$ và có một đường chuẩn

$$\text{là } x + \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$$

A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1.$

B. $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$

C. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$

D. $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1.$

Lời giải

Chọn D.

Phương án A và D không đi qua điểm $(2; 1)$ nên loại.

Phương án C là phương trình của Elip nên loại.

Vậy phương án D đúng.

Câu 42. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có trục thực dài gấp đôi trục ảo và có tiêu cự bằng 10.

A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$

B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1.$

C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} = 1.$

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0).$

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{cases} a = 2b \\ 2c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ \sqrt{5b^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{5} \\ b = \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình (H) là $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1.$

Câu 43. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó tiêu điểm là $(3; 0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $\sqrt{2}x + y = 0.$

A. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1.$

B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1.$

C. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1.$

D. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1.$

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, b > 0).$

Do (H) có một tiêu điểm là $(3; 0)$ nên $c = 3.$

$$\text{Đường tiệm cận } \sqrt{2}x + y = 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}a.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} b = \sqrt{2}a \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2}a \\ \sqrt{3a^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{6} \\ a = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1.$$

Suy ra phương án B đúng.

Câu 44. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó tiêu điểm là $(\sqrt{10}; 0)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $3x + y = 0$.

A. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$ B. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{6} = 1.$ C. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1.$ D. $-x^2 + \frac{y^2}{9} = 1.$

Lời giải

Chọn C.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Do (H) có một tiêu điểm là $(\sqrt{10}; 0)$ nên $c = \sqrt{10}$.

$$\text{Đường tiệm cận } 3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x \Rightarrow \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow b = 3a.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} b = 3a \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ \sqrt{10a^2} = \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Suy ra phương án B đúng.

Câu 45. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) mà hình chữ nhật cơ sở có một đỉnh là $(2; 3)$

A. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1.$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{-3} = 1.$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1.$ D. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Lời giải

Chọn D.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Một đỉnh hình chữ nhật cơ sở là $(2; 3) \Rightarrow a = 2, b = 3$.

Vậy phương án D đúng.

Câu 46. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó có một đường tiệm cận là $x - 2y = 0$ và hình chữ nhật cơ sở của nó có diện tích bằng 24.

A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1.$ B. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1.$ C. $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{12} = 1.$ D. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1.$

Lời giải

Chọn A.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

$$\text{Tiệm cận } x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad (1).$$

$$\text{Diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng } 24 \Leftrightarrow 2a \cdot 2b = 24 \Leftrightarrow a \cdot b = 6 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a = 2b \\ a \cdot b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Câu 47. Tìm phương trình chính tắc của Hypebol (H) biết nó đi qua điểm là $(5;4)$ và một đường tiệm cận có phương trình là $x + y = 0$.

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$. B. $x^2 - y^2 = 9$. C. $x^2 - y^2 = 1$. D. $x^2 - y^2 = 3$.

Lời giải

Chọn B.

Xét hyperbol (H) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$).

Đường tiệm cận $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow \frac{b}{a} = 1 \Leftrightarrow a = b$ (1).

Hyperbol đi qua điểm $(5; 4) \Rightarrow \frac{25}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$ (2).

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = b \\ \frac{25}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 9.$$

Dạng 3. Các bài toán liên quan parabol

Câu 48. Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(1;2)$.

- A. $y^2 = 4x$. B. $y^2 = 2x$. C. $y = 2x^2$. D. $y = x^2 + 2x - 1$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$

$$A(1;2) \in (P) \Rightarrow 2p = 4$$

Vậy phương trình (P): $y^2 = 4x$.

Câu 49. Viết phương trình chính tắc của Parabol đi qua điểm $A(5;2)$.

- A. $y = x^2 - 3x - 12$. B. $y = x^2 - 27$. C. $y^2 = \frac{4x}{5}$. D. $y^2 = 5x - 21$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$

$$A(5;2) \in (P) \Rightarrow 2p = \frac{4}{5}$$

Vậy phương trình (P): $y^2 = \frac{4}{5}x$.

Câu 50. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(2;0)$.

- A. $y^2 = 2x$. B. $y^2 = 4x$. C. $y^2 = 8x$. D. $y = \frac{1}{6}x^2$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$

$$\text{Tiêu điểm } F(2;0) \Rightarrow p = 4$$

Vậy, phương trình parabol $y^2 = 8x$.

Câu 51. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết tiêu điểm $F(5;0)$.

- A. $y^2 = 5x$. B. $y^2 = 10x$. C. $y^2 = \frac{1}{5}x$. D. $y^2 = 20x$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

Ta có: tiêu điểm $F(5;0) \Rightarrow p = 5 \Rightarrow 2p = 10$

Vậy $(P): y^2 = 10x$.

Câu 52. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x+1=0$.

- A. $y^2 = 2x$. B. $y^2 = 4x$. C. $y = 4x^2$. D. $y^2 = 8x$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

Đường chuẩn $x+1=0$ suy ra $\frac{p}{2} = 1 \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow y^2 = 4x$.

Vậy $y^2 = 4x$.

Câu 53. Viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x + \frac{1}{4} = 0$.

- A. $y^2 = -x$. B. $y^2 = x$. C. $y^2 = 2x$. D. $y^2 = \frac{1}{2}x$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$

Parabol có đường chuẩn $x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow (P): y^2 = x$.

Vậy $y^2 = x$.

Câu 54. Cho Parabol (P) có phương trình chính tắc $y^2 = 4x$. Một đường thẳng đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại 2 điểm A và B . Nếu $A(1;2)$ thì tọa độ của B bằng bao nhiêu?

- A. $(4;4)$. B. $(2;2\sqrt{2})$. C. $(1;-2)$. D. $(1;2)$.

Lời giải

Chọn C.

(P) có tiêu điểm $F(1;0)$.

Đường thẳng $AF: x=1$.

Đường thẳng AF cắt parabol tại $B(1;-2)$.

Vậy $B(1;-2)$.

Câu 55. Một điểm A thuộc Parabol $(P): y^2 = 4x$. Nếu khoảng cách từ A đến đường chuẩn bằng 5 thì khoảng cách từ A đến trục hoành bằng bao nhiêu?

- A. 3. B. 8. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $A \in (P) \Rightarrow A(m^2; 2m)$, đường chuẩn $\Delta: x = -1$

Khoảng cách từ A đến đường chuẩn $d(A, \Delta) = |m^2 + 1| = m^2 + 1 = 5 \Rightarrow m^2 = 4$

Vậy khoảng cách từ A đến trục hoành bằng $|2m| = 4$.

Câu 56. Một điểm M thuộc Parabol $(P): y^2 = x$. Nếu khoảng cách từ M đến tiêu điểm F của (P) bằng 1 thì hoành độ của điểm M bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.

$$M \in (P): y^2 = x \Rightarrow M(m^2; m)$$

$$(P) \text{ có tiêu điểm } F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$$

$$MF^2 = \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + m^2 = 1 \Leftrightarrow m^4 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{15}{16} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{3}{4} \\ m^2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy hoành độ điểm M là $\frac{3}{4}$.

Câu 57. Cho M là một điểm thuộc Parabol $(P): y^2 = 64x$ và N là một điểm thuộc đường thẳng $d: 4x + 3y + 46 = 0$. Xác định M, N để đoạn MN ngắn nhất.

A. $M(-9; 24), N(5; -22)$

B. $M(-9; 24), N\left(-\frac{37}{5}; \frac{126}{5}\right)$

C. $M(9; -24), N\left(-5; -\frac{26}{3}\right)$

D. $M(9; -24), N\left(\frac{37}{5}; -\frac{126}{5}\right)$

Lời giải.

Chọn D.

$$M \in (P) \Rightarrow M(m^2; 8m)$$

$$d(M; d) = \frac{|4m^2 + 24m + 46|}{5} = \frac{|(2m + 6)^2 + 10|}{5} \geq 2$$

$$d(M, d) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi } m = -3 \Rightarrow M(9; -24)$$

N là hình chiếu của M lên đường thẳng d

$$\text{Đường thẳng } MN: 3x - 4y - 123 = 0$$

$$N \text{ là giao điểm } MN \text{ và } d \text{ suy ra } N\left(\frac{37}{5}; -\frac{126}{5}\right).$$

Câu 58. Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Gọi A, B là giao điểm của d và (P) . Tìm tung độ dương của điểm $C \in (P)$ sao cho ΔABC có diện tích bằng 12.

A. 3

B. 6

C. 2

D. 4

Lời giải.

Chọn B.

$$\text{Ta có: } d \text{ cắt } (P) \text{ tại } A(4; 4); B(1; -2)$$

$$C \in (P) \Rightarrow C(c^2; 2c)$$

$$\overrightarrow{AC} = (c^2 - 4; 2c - 4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (c^2 - 1; 2c + 2)$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| (c^2 - 4)(2c + 2) - (c^2 - 1)(2c - 4) \right| = 12$$

$$|6c^2 - 6c - 12| = 24 \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy tung độ của điểm C dương là 6.

Câu 59. Cho parabol $(P): y^2 = x$ và đường thẳng $d: x - y - 2 = 0$. Gọi A, B là giao điểm của d và (P) .

Tìm tung độ điểm $C \in (P)$ sao cho $\triangle ABC$ đều.

A. $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$

B. $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$

C. $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

D. Không tồn tại điểm C .

Lời giải.

Chọn D.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } d \text{ và } (P): (x-2)^2 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1), B(4; 2)$$

$$C \in (P) \Rightarrow C(c^2; c)$$

$$AB = 3\sqrt{2}, AC = \sqrt{(c^2 - 1)^2 + (c + 1)^2}, BC = \sqrt{(c^2 - 4)^2 + (c - 2)^2}$$

$$AC = BC \Rightarrow 6c^2 + 6c - 18 = 0 \Rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

So với điều kiện $AC = 3\sqrt{2}$ ta thấy không có giá trị c thỏa.

Vậy không tồn tại điểm C thỏa đề.

Câu 60. Cho Parabol $(P): y^2 = 2x$ và đường thẳng $\Delta: x - 2y + 6 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa Δ và (P) .

A. $d_{\min} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

B. $d_{\min} = 2$

C. $d_{\min} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $d_{\min} = 4$

Lời giải.

Chọn A.

$$\text{Gọi } M \in (P) \Rightarrow M(2m^2; 2m)$$

$$d(M; \Delta) = \frac{|2m^2 - 4m + 6|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} |(m-1)^2 + 2| \geq \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Câu 61. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy , cho điểm $A(0; 2)$ và parabol $(P): y = x^2$. Xác định các điểm M trên (P) sao cho AM ngắn nhất.

A. $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

B. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

C. $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

D. $M\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{7}{4}\right)$ hoặc $M\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

Lời giải.

Chọn A.

$$M \in (P) \Rightarrow M(m; m^2)$$

$$AM^2 = m^2 + (m^2 - 2)^2 = m^4 - 3m^2 + 4 = \left(m^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

$$AM \text{ ngắn nhất khi } m^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Vậy, } M\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ hoặc } M\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 62. Cho parabol $(P): y = x^2$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Parabol và elip cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.
- B. Parabol và elip cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.
- C. Parabol và elip cắt nhau tại 1 điểm phân biệt.
- D. Parabol và elip không cắt nhau.

Lời giải.

Chọn B.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } (P) \text{ và } (E) \text{ là } \frac{x^2}{9} + x^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-1+5\sqrt{13}}{18} \\ x^2 = \frac{-1-5\sqrt{13}}{18} \end{cases}$$

Vậy (P) cắt (E) tại 2 điểm phân biệt.

Câu 63. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết (P) cắt đường phân giác của góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A, B và $AB = 5\sqrt{2}$.

A. $y^2 = 20x$

B. $y^2 = 2x$

C. $y^2 = 5x$

D. $y^2 = 10x$

Lời giải.

Chọn C.

Phương trình chính tắc của parabol $(P): y^2 = 2px$ ($p > 0$)

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất: $y = x$

$$\text{Ta có: } A \equiv O, B(m; m) \ (m > 0) \Rightarrow AB^2 = 2m^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow m = 5$$

$$B(5; 5) \in (P) \Rightarrow 25 = 2p \cdot 5 \Rightarrow 2p = 5$$

$$\text{Vậy } (P): y^2 = 5x$$

Câu 64. Cho điểm $A(3; 0)$, gọi M là một điểm tùy ý trên $(P): y^2 = -x$. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM .

A. 3.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Chọn A.

$$\text{Ta có: } M \in (P) \Rightarrow M(-m^2; m)$$

$$AM^2 = (-m^2 - 3)^2 + m^2 = m^4 + 7m^2 + 9$$

$$\text{Vì } m^2 \geq 0 \text{ nên } AM^2 \geq 9$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của AM là 3 khi $M \equiv O$.

Câu 65. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Descartes vuông góc Oxy , cho điểm $F(3; 0)$ và đường thẳng d có phương trình $3x - 4y + 16 = 0$. Tìm tọa độ tiếp điểm A của đường thẳng d và parabol (P) có tiêu điểm F và đỉnh là gốc tọa độ O .

A. $A\left(\frac{4}{3}; 5\right)$

B. $A\left(\frac{8}{3}; 6\right)$

C. $A\left(\frac{16}{3}; 8\right)$

D. $A\left(\frac{2}{3}; \frac{9}{2}\right)$

Lời giải.

Chọn C.

(P) có tiêu điểm $F(3;0)$ và có gốc tọa độ O suy ra $(P): y^2 = 12x$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $\left(\frac{3x+16}{4}\right)^2 = 12x \Leftrightarrow 9x^2 - 96x + 256 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{3} \Rightarrow y = 8.$$

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Tìm tất cả hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

A. $M(4;2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

B. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;-6), N(9;3)$.

C. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;-3)$.

D. $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(m^2; m) \in (P), N(n^2; n) \in (P)$. Khi đó ta có $\overrightarrow{IM} = (m^2; m-2), \overrightarrow{IN} = (n^2; n-2) \Rightarrow 4\overrightarrow{IN} = (4n^2; 4n-8)$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m-2 = 4n-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m=-2 \\ n=-1 \end{cases}$$

Vậy các cặp điểm thỏa là $M(4;-2), N(1;1)$ hoặc $M(36;6), N(9;3)$.