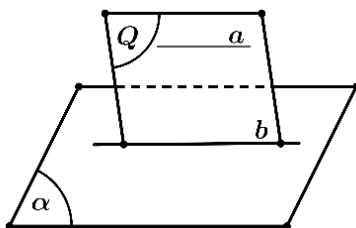


Dạng 2: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .



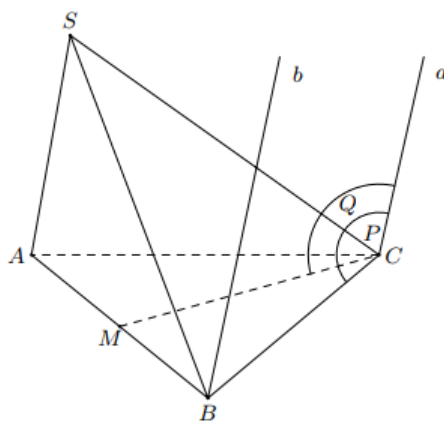
Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α) . Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α) .

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có M là trung điểm của AB . Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA , (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

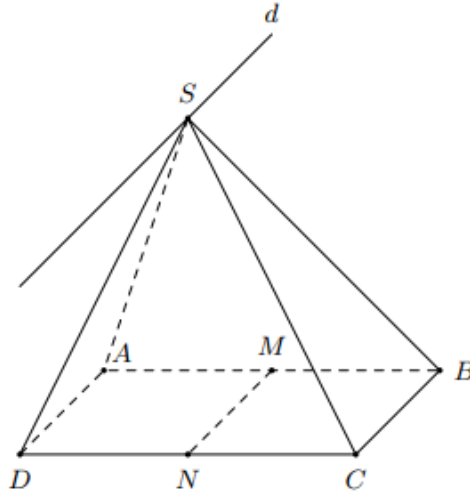
Lời giải



- Ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng có điểm chung C và cùng song song với SA , suy ra giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng a đi qua C và $a \parallel SA$.
- Ta có $SA \parallel (P)$ và B thuộc (P) , b là đường thẳng đi qua B và $b \parallel SA$ suy ra $b \subset (P)$.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Lời giải

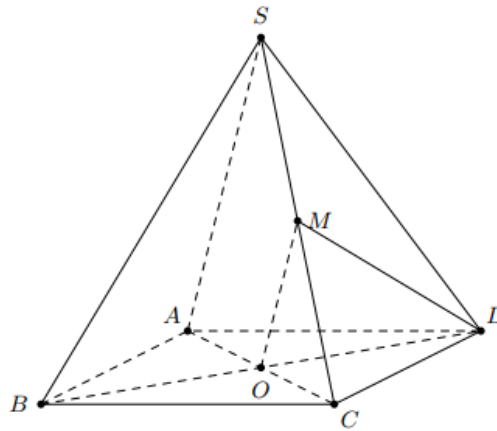


Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng BC và AD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD . Ta lại có $MN \parallel AD \parallel BC$ nên suy ra $MN \parallel d$.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Lời giải

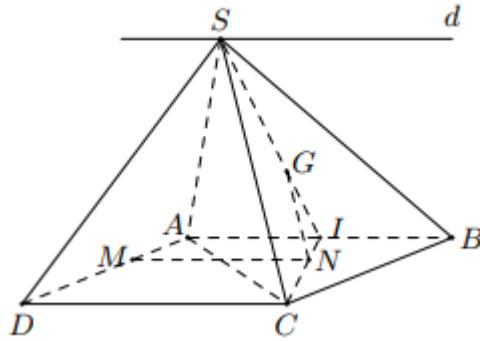


- Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC , suy ra $OM \parallel SA$.
 OM không nằm trong mặt phẳng (SAD) và OM song song với SA nằm trong (SAD) suy ra $OM \parallel (SAD)$.
 Tương tự OM không nằm trong mặt phẳng (SBA) và $OM \parallel SA$ nằm trong (SBA) suy ra $OM \parallel (SBA)$.
- Hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) có điểm chung D và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song OM và SA .
 Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) là đường thẳng d qua D và song song với SA và OM .

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC) .

Lời giải



a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD .

b) Gọi I là trung điểm của AB .

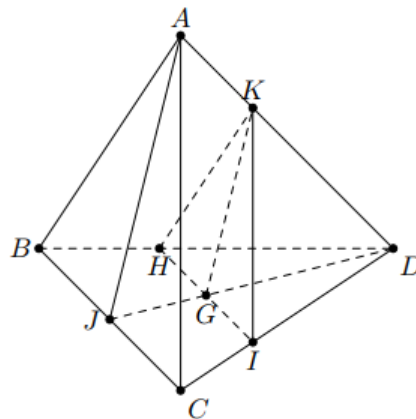
Xét hình bình hành $ABCD$ có $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel CD$.

Mà $CD \subset (SCD)$ và $MN \not\subset (SCD)$ nên $MN \parallel (SCD)$.

Ta có $\frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow NG \parallel SC$ mà $SC \subset (SAC)$ và $NG \not\subset (SAC)$ nên $NG \parallel (SAC)$.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau, điểm G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua G và song song với hai cạnh BC, AC . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD) .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} G \in (BCD) \cap (P) \\ BC \parallel (P) \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \cap (P) = Gx \parallel BC.$$

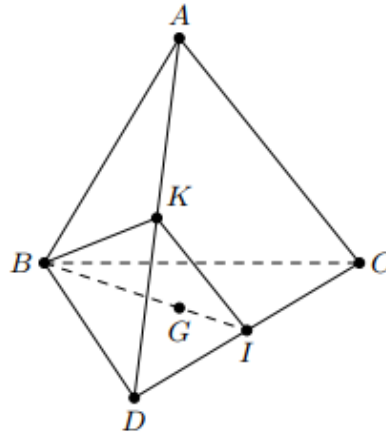
Gọi H, I lần lượt là giao điểm của Gx với BD và DC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} I \in (ACD) \cap (P) \\ AC \parallel (P) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (ACD) \cap (P) = IK \parallel BC \text{ với } K \in AD.$$

Ta thấy H, K là hai điểm chung của mặt phẳng (P) và (ABD) . Do đó $(P) \cap (ABD) = HK$.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với AC . Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α) .

Lời giải



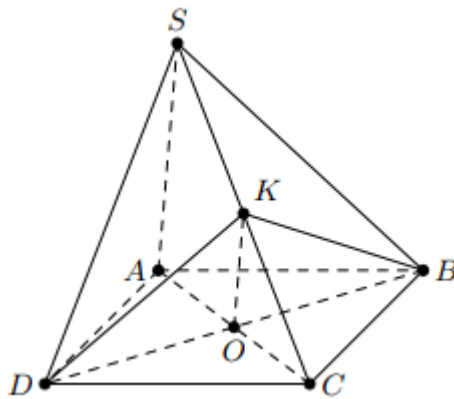
$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } CD. \text{ Ta có } \begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ACD) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = Ix \parallel AC.$$

Trong mặt phẳng (ACD) gọi $Ix \cap AD = K$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} K \in AD \\ K \in Ix \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K \in (\alpha) \Rightarrow K = AD \cap (\alpha).$$

Bài tập 7: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA . Tìm giao điểm K của mặt phẳng (α) và SC .

Lời giải



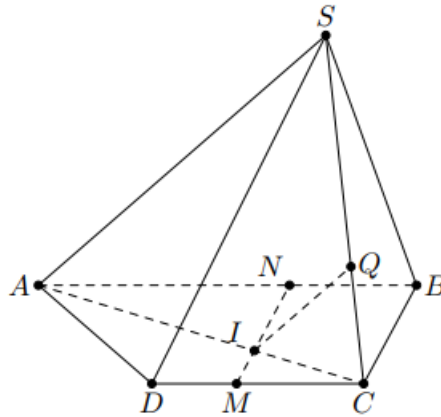
Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó, $O \in (\alpha) \cap (SAC)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (ASC) \\ O \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow Ox \parallel SA. \text{ Trong mặt phẳng } (SAC), \text{ gọi } K = SC \cap Ox.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} K \in SC \\ K \in Ox \subset (\alpha) \Rightarrow K \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (\alpha).$$

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là một điểm trên CD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC . Tìm giao điểm Q của SC và mặt phẳng (α) .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \parallel BC, BC \subset (ABCD) \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \parallel BC \text{ và } N \in AB).$$

$$\text{Gọi } I \text{ là giao điểm của } AC \text{ và } MN \text{ ta có } \begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ I \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = Ix \parallel SA.$$

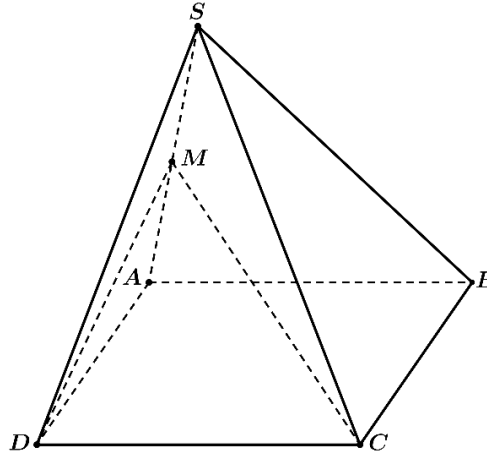
Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của Ix và SC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} Q \in SC \\ Q \in Ix \subset (\alpha) \Rightarrow Q \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (\alpha).$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

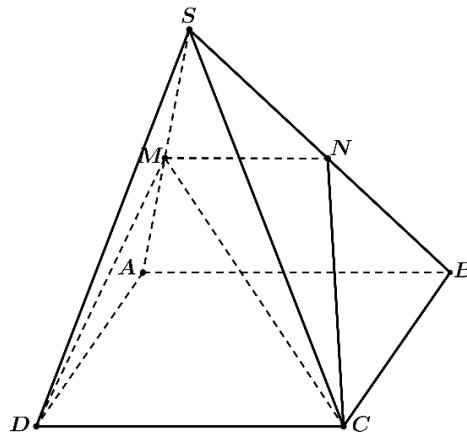
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA . Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là:



- A. Không có giao điểm. B. Giao điểm của đường thẳng SB và MC .
C. Giao điểm của đường thẳng SB và MD . D. Trung điểm của đoạn thẳng SB .

Lời giải



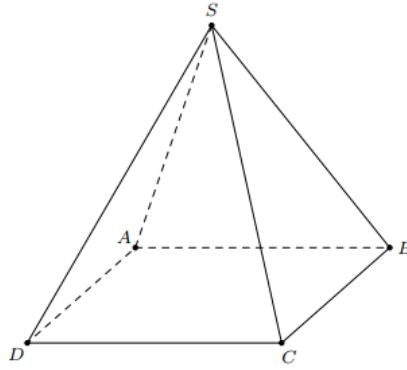
Ta có:
$$\begin{cases} AB // CD \\ M \in (CMD) \cap (SAB) \\ CD \subset (CMD), AB \subset (SAB) \end{cases} \quad \text{nên giao tuyến của hai mặt phẳng } (CMD) \text{ và } (SAB) \text{ là}$$

đường thẳng $MN // AB // CD$ với $N \in SB$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) .

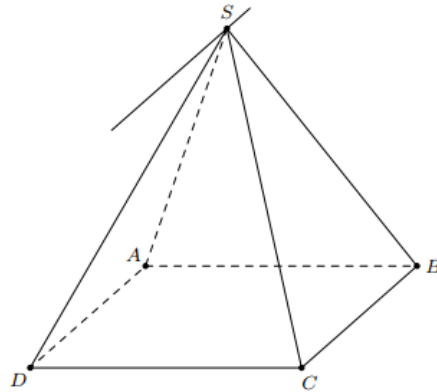
Xét tam giác $\triangle SAB$ có M là trung điểm SA và $MN // AB \Rightarrow N$ là trung điểm SB .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .



- A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .
 C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB .
 D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD .

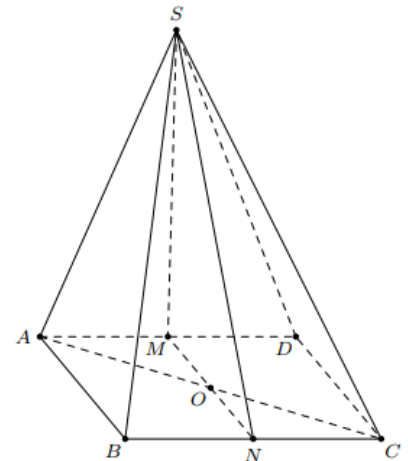
Lời giải



Do hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có chung điểm S và có hai đường thẳng AD, BC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

- A. SO với O là tâm hình bình hành $ABCD$.
 B. SD .
 C. SG với G là trung điểm AB .
 D. SF với F là trung điểm CD .



Lời giải

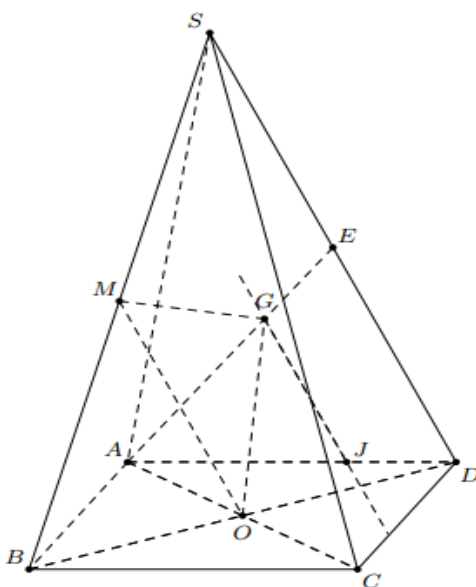
Gọi O là giao điểm AC và MN ta có
$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SMN) \\ O \in (SAC) \cap (SMN) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SMN).$$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$, có độ dài các cạnh đôi một khác nhau. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, CD . Mặt phẳng (MNP) cắt BD tại điểm Q . Phát biểu nào sau đây sai?

A. $MN = MQ$. B. $MQ = NP$. C. $PQ \parallel (ABC)$. D. $MQ \parallel (ACD)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là trung điểm đoạn SB , G là trọng tâm tam giác SAD . Gọi J là giao điểm của AD với (OMG) khi đó $\frac{JD}{AD}$ bằng

Lời giải

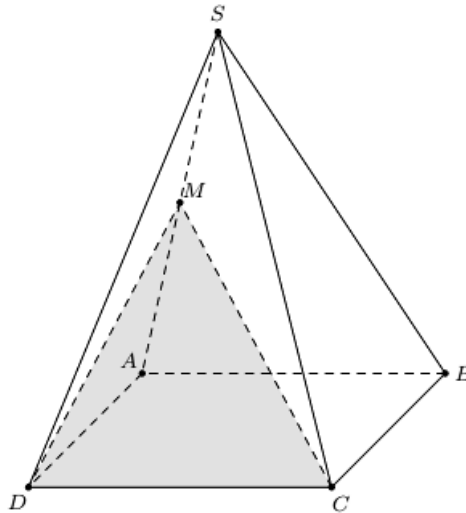

$$\text{Ta có } \begin{cases} MO \parallel SD \\ G \in (OMG) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow (OMG) \cap (SAD) = Gx \parallel SD \parallel MO \Rightarrow Gx \cap AD = J.$$

Ta có: $J \in Gx \subset (OMG) \Rightarrow J = AD \cap (OMG)$.

Gọi E là trung điểm SD với G là trọng tâm ta có $\frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$.

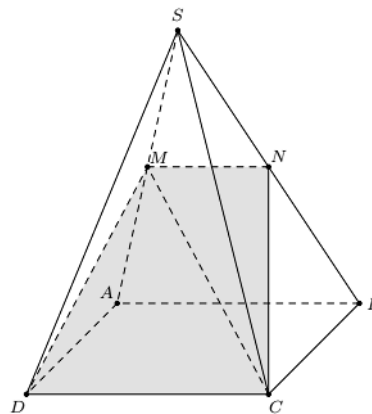
Do $GJ \parallel MO \parallel SD$ áp dụng định lý Talet trong tam giác AED ta có $\frac{GE}{AE} = \frac{JD}{AD} = \frac{1}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA . Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là



- A. Không có giao điểm. B. Giao điểm của đường thẳng SB và MC .
C. Giao điểm của đường thẳng SB và MD . D. Trung điểm của đoạn thẳng SB .

Lời giải



Ta có:
$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ M \in (CMD) \cap (SAB) \\ CD \subset (CMD), AB \subset (SAB) \end{cases}$$

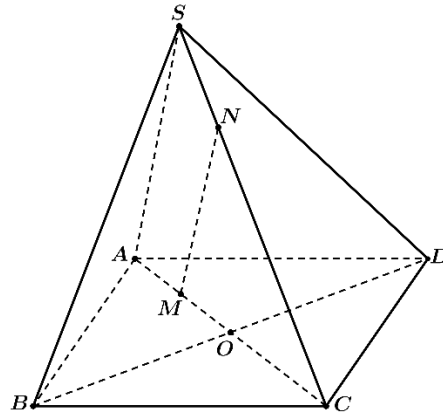
Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (CMD) và (SAB) là đường thẳng $MN \parallel AB \parallel CD$ với $N \in SB \Rightarrow N$ là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) .

Xét tam giác ΔSAB có M là trung điểm SA và $MN \parallel AB \Rightarrow N$ là trung điểm SB .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm AO . Mặt phẳng (α) qua M và song song với BD ; SA và mặt phẳng (α) cắt SC tại N . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. $SN = \frac{1}{4}NC$. B. $SN = NC$. C. $SN = \frac{1}{3}NC$. D. $SN = \frac{1}{2}NC$.

Lời giải



$$\text{Vì } \begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ (SAC) \cap (\alpha) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel SA. \text{ Xét tam giác } SAC \text{ có } \frac{SN}{NC} = \frac{AM}{MC}$$

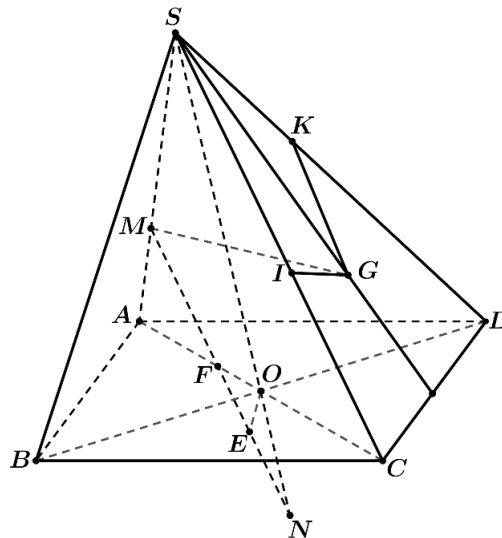
Mặt khác: do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành tâm O kết hợp với M là trung điểm AO dẫn đến $ABCD$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là một điểm thuộc đoạn SA sao cho $2MA = SM$, điểm N là điểm thuộc tia đối của tia OS sao cho $3ON = SO$, G là trọng tâm tam giác SCD . Gọi $K = SD \cap (GMN)$. Biết rằng $\frac{SK}{KD} = \frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z})$ và $(a, b) = 1$. Tính

$$S = a + b.$$

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 5.

Lời giải



Trong (SAC) từ O dựng đường thẳng d song song với SA , cắt MN tại E .

$$\text{Ta có } OE // SM \Rightarrow \frac{OE}{SM} = \frac{ON}{SN} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{OE}{2MA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{OE}{MA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Trong } (SAC) \text{ gọi } F = MN \cap AC \text{ ta có } OE // MA \Rightarrow \frac{OE}{MA} = \frac{OF}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AF}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$$

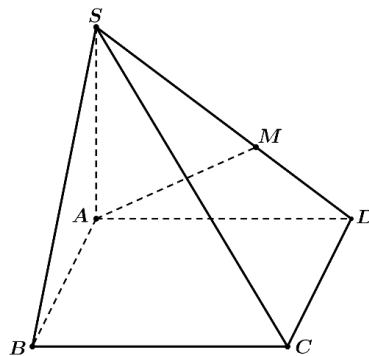
$$\text{Ta có } \frac{AM}{SA} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN // SC$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} G \in (GMN) \cap (SCD) \\ MN // SC \\ MN \subset (GMN), SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xGx' = (GMN) \cap (SCD) \\ xGx' // SC (// MN) \end{cases}$$

$$\text{Gọi } K = xGx' \cap SD \Rightarrow \begin{cases} K \in xGx', xGx' \subset (GMN) \\ K \in SD \end{cases} \Rightarrow K = SD \cap (GMN)$$

$$\text{Ta có: } GK // SC \Rightarrow \frac{DK}{SD} = \frac{DG}{DI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SK}{KD} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow a + b = 3$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = \frac{2}{3}SD$. Mặt phẳng chứa AM và song song với BD cắt cạnh SC tại K . Tỷ số $\frac{SK}{SC}$ bằng



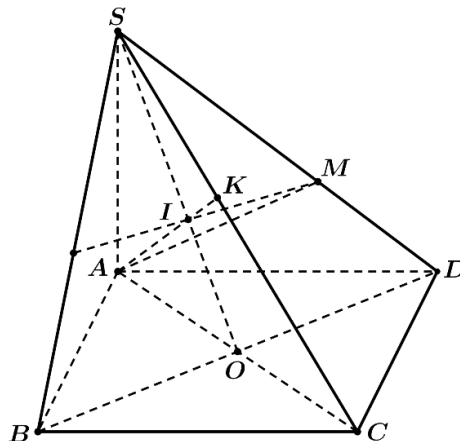
A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Nối BD

Suy ra $\frac{SE}{SO} = \frac{2}{3}$

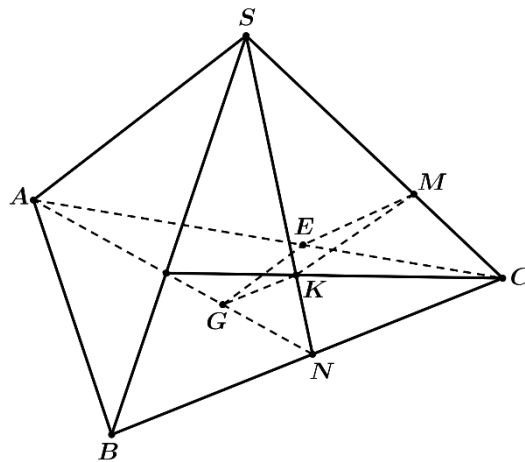
Trong tam giác SBD có SO là trung tuyến và $\frac{SE}{SO} = \frac{2}{3}$ nên E là trọng tâm tam giác SBD

Suy ra BF là trung tuyến của tam giác SBD do đó F là trung điểm SD , suy ra $\frac{SF}{SD} = \frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC , gọi E là trung điểm của AC . Mặt phẳng (GEK) cắt SC tại M . Tỉ số $\frac{MS}{MC}$ bằng

- A.** 1. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của BC , theo đầu bài ta có G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC nên ta có $\frac{NK}{NS} = \frac{NG}{NA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK \parallel SA \Rightarrow (GEK) \parallel SA$.

Từ trên mặt phẳng (SAC) , ta dựng đường thẳng đi qua E và song song với SA cắt SC tại M .

$$\begin{cases} EM \parallel SA \\ GK \parallel SA \end{cases} \Rightarrow EM \parallel GK \Rightarrow M \in (EGK) \text{ vậy } (EGK) \cap SC = M.$$

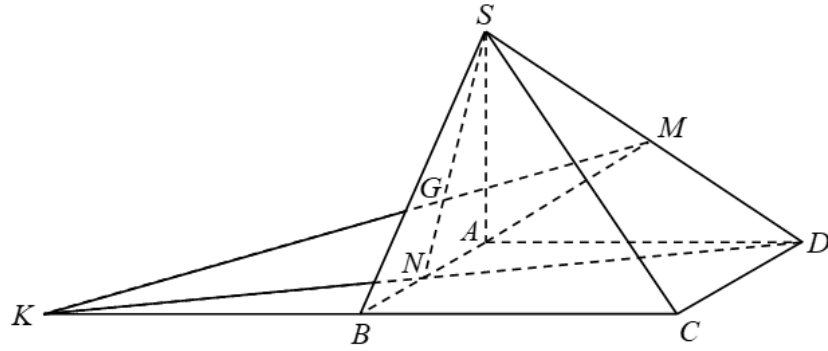
Do E là trung điểm của AC , $EM \parallel SC \Rightarrow EM$ là đường trung bình của tam giác SAC

Vậy tỉ số $\frac{MS}{MC} = 1$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD , G là trọng tâm tam giác SAB , K là giao điểm của GM với mặt phẳng $ABCD$. Tỉ số $\frac{KB}{KC}$ bằng

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AB .

Trong mặt phẳng (SDN) , $GM \cap DN = \{K\}$.

Ta có: $\begin{cases} K \in GM \\ K \in DN \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow GM \cap (ABCD) = K$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SND với ba điểm M, G, K thẳng hàng ta có

$$\frac{NK}{KD} \cdot \frac{DM}{MS} \cdot \frac{SG}{GN} = 1 \Leftrightarrow \frac{NK}{KD} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{NK}{KD} = \frac{1}{2} \Rightarrow N \text{ là trung điểm của } KD.$$

Mà N cũng là trung điểm của AB nên tứ giác $ADBK$ là hình bình hành

$$\Rightarrow KB = AD = BC \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{1}{2}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, ABC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AC, BD

b) $\frac{DN}{DB} = \frac{1}{3}$

c) MN song song với mặt phẳng (SCD)

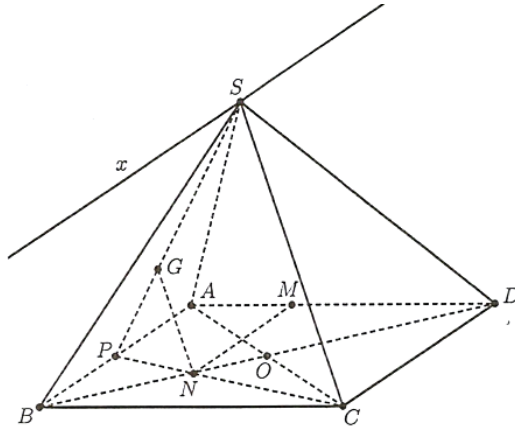
d) NG cắt với mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

a) Sai: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \text{ (với } Sx \text{ qua } S \text{ và } Sx \parallel AB \parallel CD).$

b) Sai: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

$$\text{Vì } N \text{ là trọng tâm của } \triangle ABC \text{ nên } BN = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD \Rightarrow \frac{DN}{DB} = \frac{2}{3}.$$



c) Đúng: ta có $AD = 3AM \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{2}{3}$.

Xét tam giác ADB ta có: $\frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DB} = \frac{2}{3}$ nên $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$

Mặt khác: $CD \subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

d) Sai: Gọi P là trung điểm AB và $\triangle SPC$ có: $\frac{PG}{PS} = \frac{PN}{PC} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)

$\Rightarrow NG \parallel SC, SC \subset (SAC) \Rightarrow NG \parallel (SAC)$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC . Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

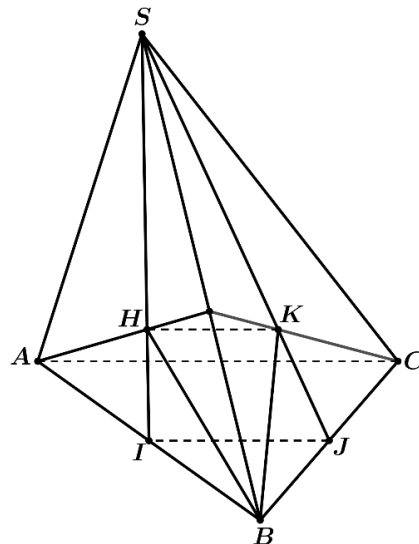
a) $AC \parallel (SIJ)$.

b) HK cắt IJ

c) $HK \parallel (SAC)$.

d) Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC .

Lời giải



a) Đúng: Vì IJ là đường trung bình $\triangle ABC$ nên $IJ \parallel AC$. Ta có:
$$\begin{cases} AC \parallel IJ \\ IJ \subset (SIJ) \Rightarrow AC \parallel (SIJ) \\ AC \not\subset (SIJ) \end{cases}$$

b) Sai: Ta có $\frac{SH}{HI} = \frac{SK}{KJ} = 2$ (H, K lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$) $\Rightarrow HK \parallel IJ$

Lại có
$$\begin{cases} HK \parallel AC (HK \parallel IJ, AC \parallel IJ) \\ AC \subset (SAC) \\ HK \not\subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \parallel (SAC)$$

c) Đúng: Ta có
$$\begin{cases} HK \parallel AC \\ HK \subset (BHK) \\ AC \subset (ABC) \\ B \in (BHK) \cap (ABC) \end{cases}$$

d) Đúng: Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng Bx đi qua B và song song với AC và HK .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Điểm $M \in SC$ (M không trùng với S và C). Gọi I là giao điểm của AM và SO . Mặt phẳng (P) chứa AM song song với BD . Gọi N là giao điểm của SD với mặt phẳng (P) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

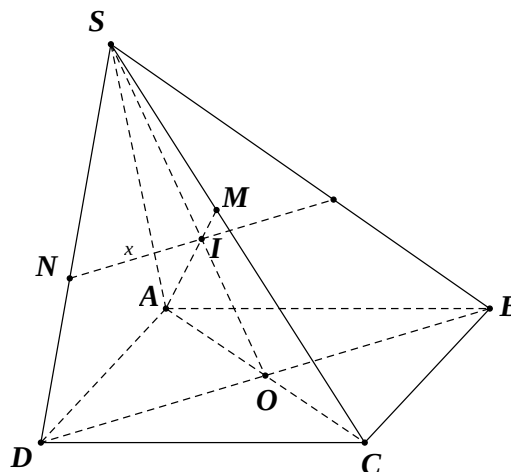
a) Đường thẳng BD nằm trong mặt phẳng (SBD)

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) là đường thẳng đi qua I và song song với BD

c) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD .

d) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD .

Lời giải



Chọn (SBD) chứa SD . Xét (P) và (SBD) có đỉnh I chung

Mặt khác mặt phẳng $(P) // BD$ (giả thiết) và $BD \subset (SBD) \Rightarrow (P) \cap (SBD) = Ix$ với $Ix // BD$.

Trong (SBD) khi đó $Ix \cap SD = N$.

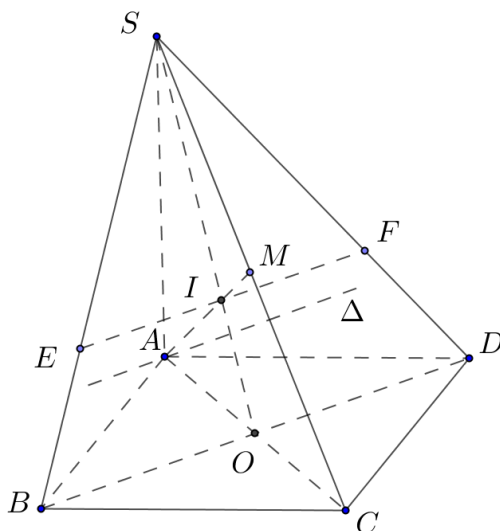
Vậy N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD .

- a) Đúng: Đường thẳng BD nằm trong mặt phẳng (SBD)
- b) Đúng: Giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) là đường thẳng đi qua I và song song với BD
- c) Sai: N là giao điểm của SD và đường đi qua I và song song với BD
- d) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm đoạn thẳng SC và I là giao điểm của AM và SO . Trong mặt phẳng (SCD) đường thẳng đi qua điểm I và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại E và F . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Đường thẳng MO song song với mặt phẳng (SAD) .
- b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AEMF)$ và $(ABCD)$.
- c) $\frac{IO}{SO} = \frac{3}{4}$
- c) Gọi S_{SEM} và S_{SBC} lần lượt là diện tích của $\triangle SEM$ và $\triangle SBC$ thì tỉ số $\frac{S_{SEM}}{S_{SBC}} = \frac{1}{3}$.

Lời giải



- a) Đúng: Ta có M là trung điểm của SC , O là trung điểm của AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC .

Khi đó: $\begin{cases} OM // SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow OM // (SAD)$

- b) Đúng: Ta có: $\begin{cases} A \in (AEMF) \\ A \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow A$ là điểm chung của hai mặt phẳng $(AEMF)$ và $(ABCD)$.

$$\begin{cases} EF // BD \\ EF \subset (AEMF) \Rightarrow (AEMF) \cap (ABCD) = \Delta, \text{ với } \Delta \text{ qua } A \text{ và } // BD // EF. \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$$

c) Sai: Ta có I là giao điểm của hai đường trung tuyến AM và SO của tam giác SAC .

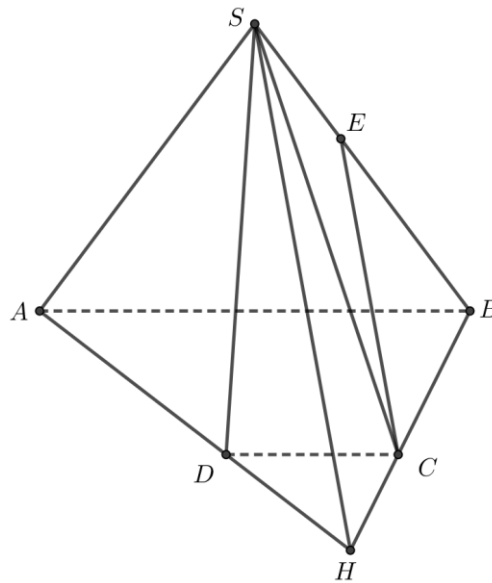
$$\Rightarrow I \text{ là trọng tâm của tam giác } SAC. \text{ Và do } EI // OB \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{d) Sai: } \frac{S_{SEM}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2} SE \cdot SM \cdot \sin S}{\frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin S} = \frac{SE \cdot SM}{SB \cdot SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\frac{ES}{EB} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD) . Giá trị của $2m + 3n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AD và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$.

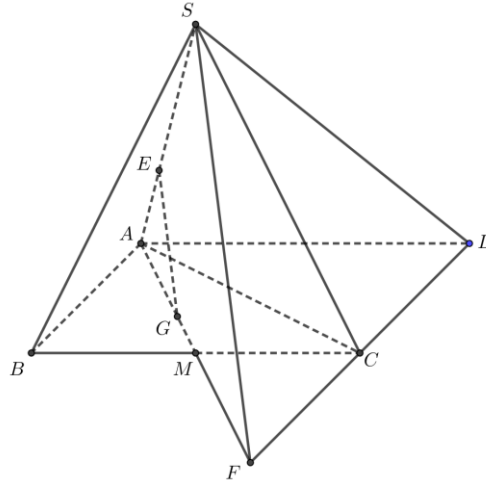
Theo hệ quả Talet ta có: $\frac{HC}{HB} = \frac{CD}{AB} = \frac{2}{5}$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CE \subset (SBH) \\ CE // (SAD) \\ (SBH) \cap (SAD) = SH \end{cases} \Rightarrow CE // SH \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{HC}{HB} = \frac{2}{5} \Rightarrow SE = \frac{2}{5} SB$$

$$\Rightarrow \frac{ES}{EB} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2m + 3n = 13.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE = \frac{m}{n}.SA$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD) . Giá trị của $m.n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC , F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

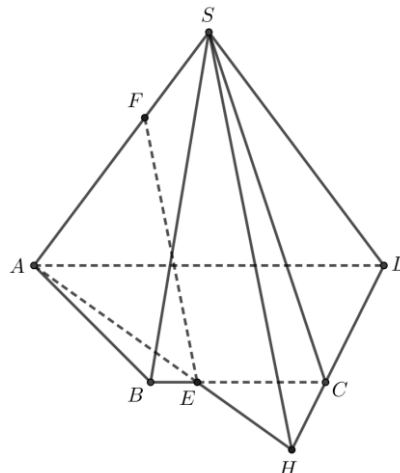
Theo định lý Talet, ta có: $\frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MC} = 1 \Rightarrow MA = MF \Rightarrow M$ là trung điểm của AF

$$\Rightarrow \frac{AG}{AF} = \frac{AM}{AF} = \frac{1}{2}. \text{ Ta có: } \begin{cases} GE \subset (SAF) \\ GE \parallel (SCD) \\ (SAF) \cap (SCD) = SF \end{cases} \Rightarrow GE \parallel SF \Rightarrow \frac{AE}{AS} = \frac{AG}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow AE = \frac{1}{2} AS$$

$$\Rightarrow SE = \frac{1}{2} SA \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow m.n = 2.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD song song với BC và $AD = 2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC = 4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA = k.FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD) . Khi đó giá trị của k bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AE và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo hệ quả Talet, ta có: $\frac{HE}{HA} = \frac{CE}{AD} = \frac{3}{8}$

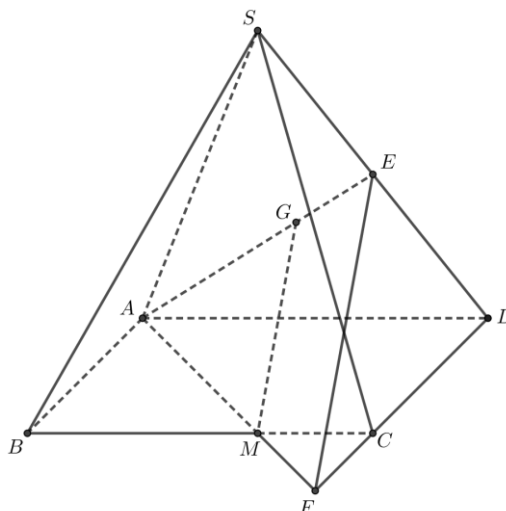
$$\text{Ta có: } \begin{cases} EF \subset (SAH) \\ EF // (SCD) \\ (SAH) \cap (SCD) = SH \end{cases} \Rightarrow EF // SH \Rightarrow \frac{SF}{SA} = \frac{HE}{HA} = \frac{3}{8} \Rightarrow SF = \frac{3}{8} SA$$

$$\Rightarrow FA = \frac{5}{8} SA \Rightarrow k = \frac{5}{8} \approx 0,625$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD và M là điểm thuộc cạnh BC sao cho GM song song với mặt phẳng (SCD) . Khi đó tỉ số diện tích của hai tam giác MAB và MAC bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1:



Gọi E là trung điểm của SD , F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

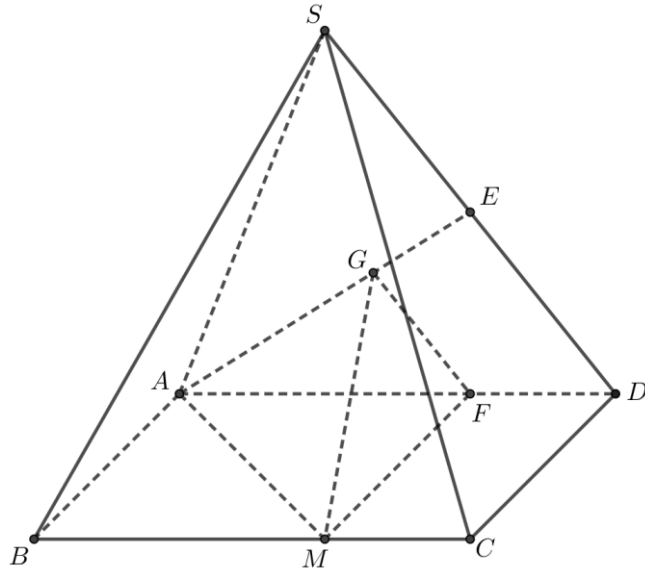
$$\text{Ta có: } \begin{cases} GM \subset (AEF) \\ GM // (SCD) \\ (AEF) \cap (SCD) = EF \end{cases} \Rightarrow GM // EF \Rightarrow \frac{FM}{FA} = \frac{EG}{EA} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Theo hệ quả Talet, ta có: } \frac{MC}{AD} = \frac{FM}{FA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MC = \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} BC \Rightarrow \frac{MB}{MC} = 2$$

Nhận xét: $\triangle MAB$ và $\triangle MAC$ có chung đường cao kẻ từ A

$$\text{Do đó: } \frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MAC}} = \frac{MB}{MC} = 2.$$

Cách 2: Sử dụng 2 mặt phẳng song song



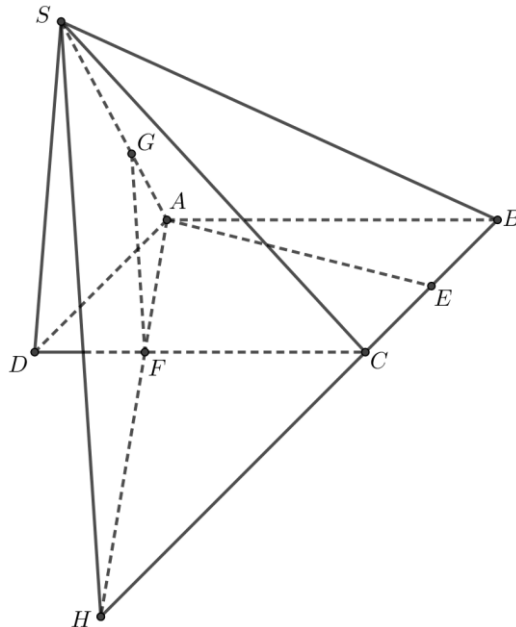
Gọi E là trung điểm của SD và vẽ GF song song với SD ($F \in AD$).

Ta chứng minh được: $(GMF) // (SCD) \Rightarrow MF // CD$

Từ đó suy ra được: $\frac{MC}{BC} = \frac{FD}{AD} = \frac{EG}{EA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MC = \frac{1}{3} BC$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi E là trung điểm của BC , F là điểm thuộc cạnh CD sao cho $EA \perp AF$ và G thuộc cạnh SA . Biết FG song song với mặt phẳng (SBC) . Khi đó tỉ số $\frac{GA}{GS}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có: $\angle BAE + \angle EAF + \angle DAF = 90^\circ \Rightarrow \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ \Rightarrow \tan(\angle BAE + \angle DAF) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\tan \angle BAE + \tan \angle DAF}{1 - \tan \angle BAE \cdot \tan \angle DAF} = 1 \text{ mà } \tan \angle BAE = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nên } \tan DAF = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DF}{DA} = \frac{1}{3} \Rightarrow DF = \frac{1}{3}DA = \frac{1}{3}DC$$

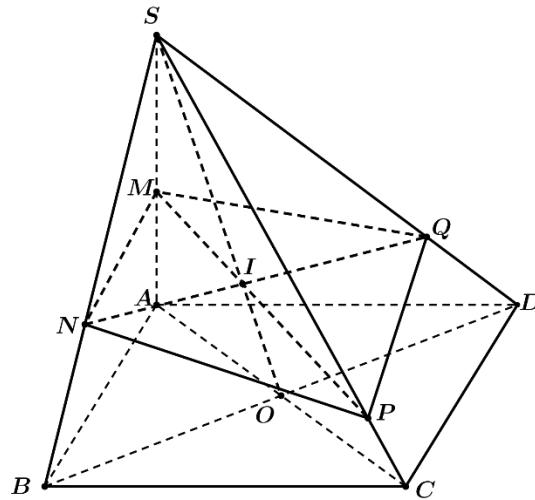
Gọi H là giao điểm của AF và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} GF \subset (SAH) \\ GF \parallel (SBC) \\ (SAH) \cap (SBC) = SH \end{cases} \Rightarrow GF \parallel SH \Rightarrow \frac{AG}{AS} = \frac{AF}{AH} \text{ mà } \frac{AF}{AH} = \frac{DF}{DC} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AG}{AS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GS} = \frac{1}{2}.$$

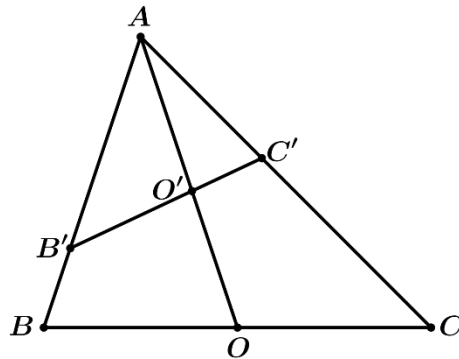
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , $\triangle SBD$ đều cạnh a . Gọi M, P là hai điểm lần lượt di động trên cạnh SA, SC (không trùng với S) sao cho $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = 3$ và (α) là mặt phẳng đi động chứa M, P cắt SB, SD lần lượt tại N, Q . Diện tích tam giác SNQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{a^2\sqrt{m}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$. Tính $4m + n$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng SO, MP .

Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng đi qua I cắt SB, SD lần lượt tại N, Q



Xét bài toán phụ:

Cho tam giác ABC và O là trung điểm của BC , O' thuộc đoạn AO (không trùng với O). Một đường thẳng thay đổi qua O' cắt cạnh AB, AC lần lượt tại B', C' . Chứng minh rằng:

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = 2 \frac{AO}{AO'}.$$

Thật vậy do $\frac{S_{AB'O'}}{S_{ABO}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AO'}{AO}$, $\frac{S_{AC'O'}}{S_{ACO}} = \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AO'}{AO}$, $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}$, $S_{ABO} = S_{ACO} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ nên

$$\frac{S_{AB'O'}}{S_{ABO}} + \frac{S_{AC'O'}}{S_{ACO}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AO'}{AO} + \frac{AC'}{AC} \cdot \frac{AO'}{AO} \Leftrightarrow \frac{S_{AB'O'}}{S_{ABO}} + \frac{S_{AC'O'}}{S_{ACO}} = \frac{AO'}{AO} \left(\frac{AB'}{AB} + \frac{AC'}{AC} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2S_{AB'O'}}{S_{ABC}} + \frac{2S_{AC'O'}}{S_{ABC}} = \frac{AO'}{AO} \left(\frac{AB'}{AB} + \frac{AC'}{AC} \right) \Leftrightarrow \frac{2S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AO'}{AO} \left(\frac{AB'}{AB} + \frac{AC'}{AC} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{AO}{AO'} = \frac{AB' \cdot AC + AC' \cdot AB}{AB' \cdot AC'} \Leftrightarrow 2 \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC} = \frac{AO'}{AO} \cdot \frac{AB' \cdot AC + AC' \cdot AB}{AB \cdot AC}$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{AO}{AO'} = \frac{AC}{AC'} + \frac{AB}{AB'}.$$

Áp dụng bài toán trên ta có: $\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} = 2 \frac{SO}{SI} = \frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = 3.$

Ta có: $\frac{S_{SBD}}{S_{SNQ}} = \frac{SB \cdot SD}{SN \cdot SQ} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} \right)^2 = \frac{9}{4}.$

Suy ra $S_{SNQ} \leq \frac{4}{9} S_{SBD} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{9}.$ Dấu bằng xảy ra khi $\frac{SB}{SN} = \frac{SD}{SQ} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\alpha) \parallel BD.$

Khi đó $m = 3; n = 9 \Rightarrow 4m + n = 4 \cdot 3 + 9 = 19$

-----HẾT-----