

### Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

**Phương pháp:** Để tìm thiết diện của mặt phẳng  $(P)$  qua điểm  $M$  và song song với hai cạnh  $a, b$  của hình chóp ta làm như sau:

**Bước 1:** Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh  $a$ .

**Bước 2:** Trong mặt phẳng đang xét, từ  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $a$ .

**Bước 3:** Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh  $b$ .

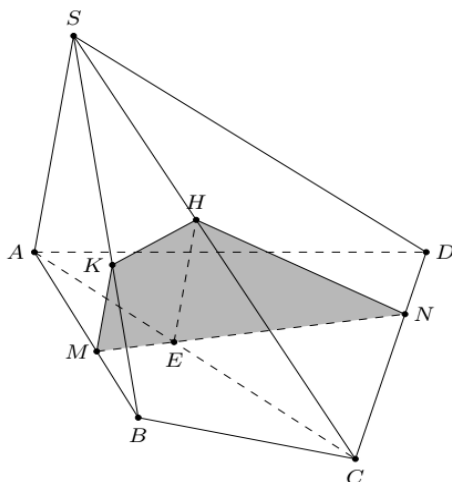
**Bước 4:** Trong mặt phẳng đang xét, từ  $M$  vẽ đường thẳng song song với  $b$ .

Nối các đoạn giao tuyến lại ta được thiết diện của mặt phẳng  $(P)$  với hình chóp.

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Bài tập 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm trên cạnh  $AB, CD$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $MN$  và song song với  $SA$ . Xác định thiết diện của  $(P)$  với hình chóp.

**Lời giải**



Ta có  $\begin{cases} M \in (P) \cap (SAB) \\ SA \parallel (P) \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$  nên giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và  $(SAB)$  là đường thẳng đi qua

$M$  song song với  $SA$  và cắt  $SB$  tại  $K$ .

Trong  $(ABCD)$  gọi  $E = AC \cap MN \Rightarrow E \in (P)$ .

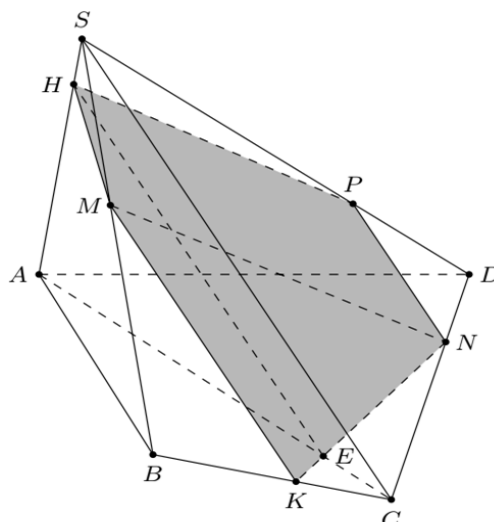
Ta có  $\begin{cases} E \in (P) \cap (SAC) \\ SA \parallel (P) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$  nên giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và  $(SAC)$  là đường thẳng đi qua

$E$  song song với  $SA$  và cắt  $SC$  tại  $H$ .

Vì  $\begin{cases} (P) \cap (ABCD) = MN \\ (P) \cap (SAB) = MK \\ (P) \cap (SBC) = KH \\ (P) \cap (SCD) = HN \end{cases}$  nên thiết diện của hình chóp cắt bởi  $(P)$  là tứ giác  $MNHK$ .

**Bài tập 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  là hai điểm trên cạnh  $SB, CD$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $MN$  và song song với  $SC$ . Xác định thiết diện của  $(P)$  với hình chóp.

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(SBC)$  chứa đường thẳng  $SC$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(SBC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $SC$ .

Kẻ  $MK \parallel SC, (K \in BC)$  thì  $MK$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .

Mặt phẳng  $(SCD)$  chứa đường thẳng  $SC$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(SCD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $SC$ .

Kẻ  $NP \parallel SC, (P \in SD)$  thì  $NP$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(SCD)$ .

Trong  $(ABCD)$  gọi  $E = AC \cap NK \Rightarrow E \in (P)$ .

Mặt phẳng  $(SAC)$  chứa đường thẳng  $SC$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(SAC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $SC$ .

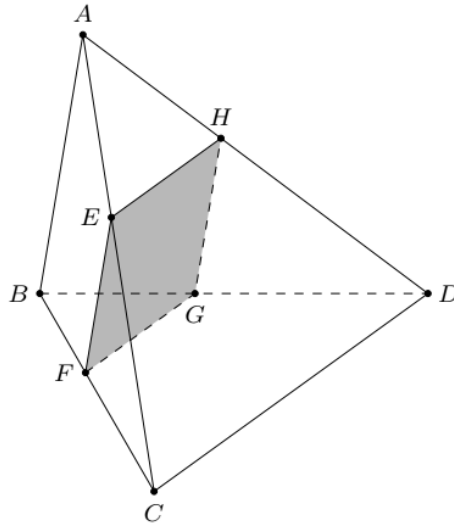
Kẻ  $EH \parallel SC, (H \in SA)$  thì  $EH$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(SAC)$ .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng  $(SAD)$  với  $(P)$  là  $PM$ , giao tuyến của mặt phẳng  $(SAB)$  với  $(P)$  là  $HM$ .

Vậy thiết diện của  $(P)$  với hình chóp  $S.ABCD$  là ngũ giác  $MKNPH$ .

**Bài tập 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm nằm giữa  $A, C$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $E$  và song song với hai đường thẳng  $AB, CD$ . Xác định giao tuyến của  $(P)$  với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(ABC)$  chứa đường thẳng  $AB$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ABC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $AB$ .

Kẻ  $EF \parallel AB, (F \in BC)$  thì  $EF$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABC)$ .

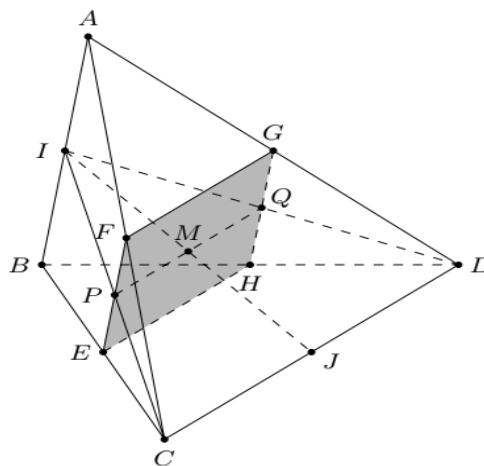
Hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  cùng chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ . Kẻ  $EH, FG$  lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$ . Khi đó  $GH$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABD)$ .

Mặt phẳng  $(ABD)$  chứa đường thẳng  $AB$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên  $GH \parallel AB$ .

Tứ giác  $EFGH$  có  $EF \parallel GH$  (vì cùng song song với  $AB$ ) và  $EH \parallel FG$  (vì cùng song song với  $CD$ ) nên nó là hình bình hành.

**Bài tập 4:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua điểm  $M$  trên đoạn  $IJ$  và song song với  $AB; CD$ . Xác định thiết diện của  $(P)$  với tứ diện.

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(IDC)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(IDC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Qua  $M$  kẻ  $PQ \parallel CD, (P \in IC, Q \in ID)$  thì  $PQ$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(IDC)$ .

Mặt phẳng  $(ABC)$  chứa đường thẳng  $AB$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ABC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $AB$ .

Qua  $P$  kẻ  $EF \parallel AB, (E \in BC, F \in AC)$  thì  $EF$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABC)$ .

Mặt phẳng  $(ACD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ACD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Kẻ  $FG \parallel CD, (G \in AD)$  thì  $FG$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ACD)$ .

Mặt phẳng  $(BCD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(BCD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Kẻ  $EH \parallel CD, (H \in BD)$  thì  $EH$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(BCD)$ .

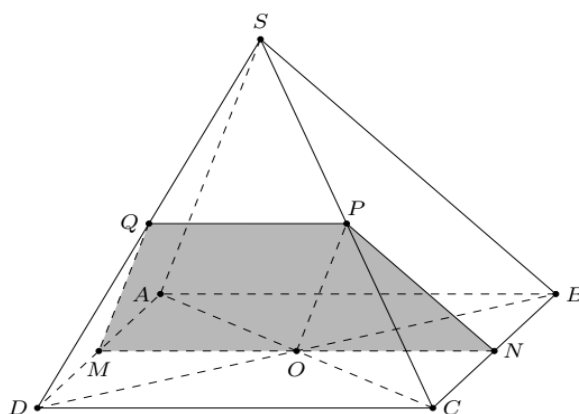
Khi đó giao tuyến của mặt phẳng  $(ABD)$  với mặt phẳng  $(P)$  là  $GH$ .

Ta có  $Q \in (ABD) \cap (P) \Rightarrow Q \in GH, EF \parallel GH; EH \parallel FG$ .

Vậy thiết diện của  $(P)$  và tứ diện  $ABCD$  là hình bình hành  $EFGH$ .

**Bài tập 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng  $(P)$  qua  $O$  đồng thời song song với  $SA$  và  $CD$ . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(P)$  và hình chóp.

#### Lời giải



Mặt phẳng  $(SAC)$  chứa đường thẳng  $SA$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(SAC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $SA$ .

Qua  $O$  kẻ  $OP \parallel SA, (P \in SC)$  thì  $PO$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(SAC)$ .

Mặt phẳng  $(ABCD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ABCD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Qua  $O$  kẻ  $MN \parallel CD, (M \in AD, N \in BC)$  thì  $MN$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ .

Mặt phẳng  $(SCD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(SCD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Kẻ  $PQ \parallel CD, (Q \in SD)$  thì  $PQ$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(SCD)$ .

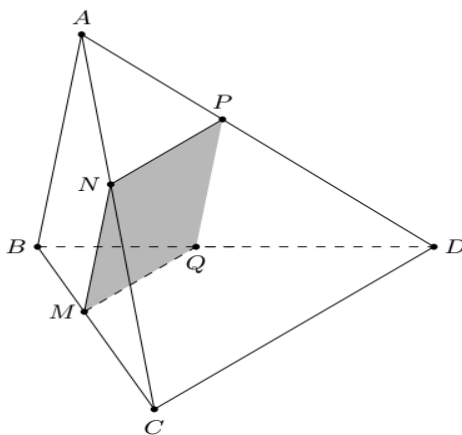
Khi đó giao tuyến của mặt phẳng  $(SAD)$  với mặt phẳng  $(P)$  là  $QM$ .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng  $(SCB)$  với mặt phẳng  $(P)$  là  $PN$ .

Tứ giác  $MNPQ$  có  $MN \parallel PQ$  (vì cùng song song với  $CD$ ) nên nó là hình thang.

**Bài tập 6:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì nằm trên cạnh  $BC$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua điểm  $M$  và song song với  $AB$ ;  $CD$ . Xác định thiết diện của  $(P)$  với tứ diện  $ABCD$ .

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(ABC)$  chứa đường thẳng  $AB$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ABC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $AB$ .

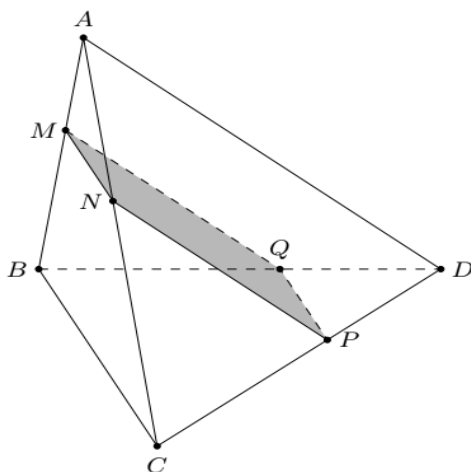
Qua  $M$  kẻ  $MN \parallel AB$ , ( $N \in AC$ ) thì  $MN$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABC)$ .

Hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  cùng chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ . Kẻ  $NP, MQ$  lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$ . Khi đó  $PQ$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABD)$ .

Tứ giác  $MNPQ$  có  $MN \parallel PQ$  (vì cùng song song với  $AB$ ) và  $NP \parallel MQ$  (vì cùng song song với  $CD$ ) nên nó là hình bình hành.

**Bài tập 7:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì nằm trên cạnh  $AB$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua điểm  $M$  và song song với  $BC$ ;  $AD$ . Xác định thiết diện của  $(P)$  với tứ diện  $ABCD$ .

**Lời giải**



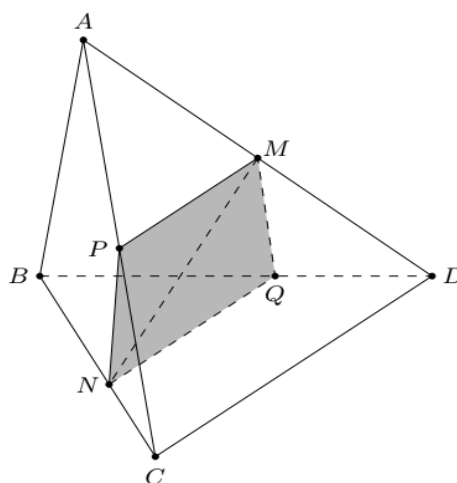
Mặt phẳng  $(ABC)$  chứa đường thẳng  $BC$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ABC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $BC$ .

Qua  $M$  kẻ  $MN \parallel BC, (N \in AC)$  thì  $MN$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABC)$ . Hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(ABD)$  cùng chứa đường thẳng  $AD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $AD$ . Kẻ  $NP, MQ$  lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(ABD)$ . Khi đó  $PQ$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(BCD)$ .

Tứ giác  $MNPQ$  có  $MN \parallel PQ$  (vì cùng song song với  $BC$ ) và  $NP \parallel MQ$  (cùng  $\parallel AD$ ) nên nó là hình bình hành.

**Bài tập 8:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì nằm trên cạnh  $AD$ ;  $N$  là điểm bất kì nằm trên cạnh  $BC$ . Mặt phẳng  $(P)$  chứa đường thẳng  $MN$  và song song với  $CD$ . Xác định thiết diện của  $(P)$  với tứ diện  $ABCD$ .

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(ACD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ACD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Qua  $M$  kẻ  $MP \parallel CD, (P \in AC)$  thì  $MP$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ACD)$ . Mặt phẳng  $(BCD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(BCD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ . Qua  $N$  kẻ  $NQ \parallel CD, (Q \in BD)$  thì  $NQ$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(BCD)$ .

Khi đó  $MQ$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABD)$ ;  $NP$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABC)$ .

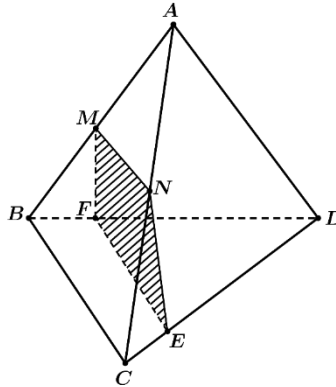
Tứ giác  $MNPQ$  có  $MP \parallel NQ$  (vì cùng song song với  $CD$ ) nên nó là hình thang.

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ ,  $E$  là điểm trên cạnh  $CD$  sao cho  $ED = 3EC$ . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(MNE)$  và tứ diện  $ABCD$  là hình:

- A. Tam giác                      B. Hình vuông.                      C. Hình thang.                      D. Hình chữ nhật.

**Lời giải**



Tam giác  $ABC$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$

Suy ra  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$

Từ  $E$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  và cắt  $BD$  tại  $F \Rightarrow EF \parallel BC$

Do đó  $MN \parallel EF$  suy ra bốn điểm  $M, N, E, F$  đồng phẳng và  $MNEF$  là hình thang.

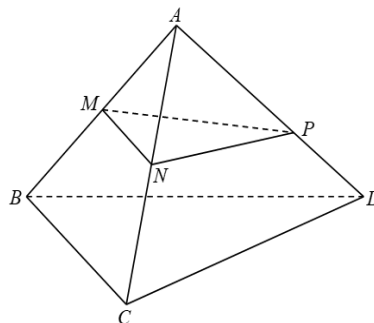
Vậy hình thang  $MNEF$  là thiết diện cần tìm.

**Câu 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  cắt tứ diện  $ABCD$  theo thiết diện là đa giác  $T$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $T$  là hình thang.  
B.  $T$  là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.  
 C.  $T$  là hình chữ nhật.  
 D.  $T$  là tam giác.

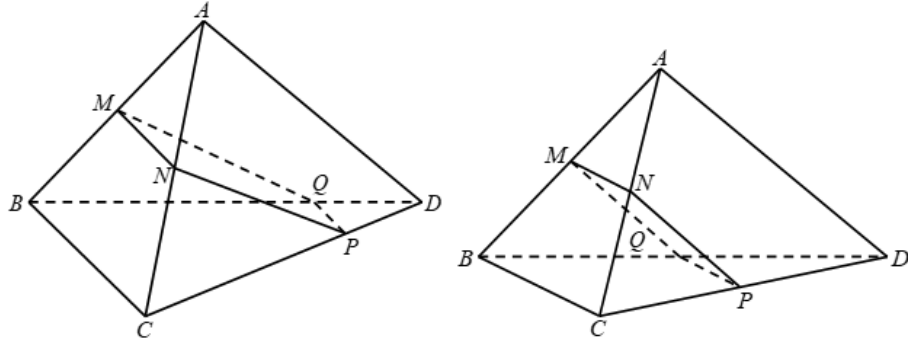
**Lời giải**

**Trường hợp 1:** Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  và cắt đoạn  $AD$  tại điểm  $P \Rightarrow$  Thiết diện là tam giác  $MNP$ .



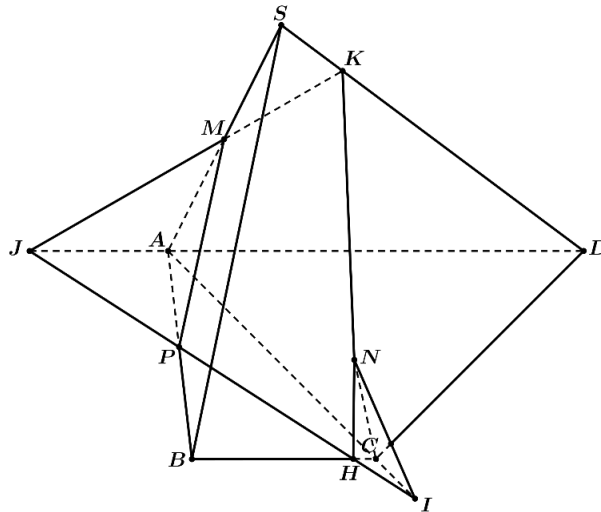
**Trường hợp 2:** Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  và cắt mặt phẳng  $(BCD)$  theo giao tuyến là  $PQ$

Thiết diện là hình thang  $MNPQ$  hoặc hình bình hành  $MNPQ$ .



- Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với đáy lớn  $AD$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $SA$ ,  $N$  là điểm trên cạnh  $SC$  sao cho  $SN = 3NC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $MN$  và song song với  $SB$  cắt hình chóp theo thiết diện là
- A. Tam giác  $MNK$  với  $K$  thuộc  $SD$ .
  - B. Tam giác  $MNP$  với  $P$  là trung điểm của  $AB$ .
  - C. Hình thang.
  - D. Ngũ giác.

**Lời giải**



Trong mặt phẳng  $(SAC)$  vì  $MN$  không song song với  $AC$  nên gọi  $I = MN \cap AC$ .

$(\alpha) \parallel AB$  nên  $(\alpha) \cap (SAB) = MP$  với  $MP \parallel SB$  và  $P \in AB$  suy ra  $P$  là trung điểm của  $AB$ .

Trong  $(ABCD)$  đường thẳng  $IP$  cắt  $AD$  và  $BC$  lần lượt tại  $J$  và  $H$ .

Trong mặt phẳng  $(SAD)$ ,  $JM$  cắt  $SD$  tại  $K$ .

Ta có 
$$\begin{cases} MP = (\alpha) \cap (SAB) \\ PH = (\alpha) \cap (ABCD) \\ HN = (\alpha) \cap (SBC) \\ NK = (\alpha) \cap (SCD) \\ KM = (\alpha) \cap (SDA) \end{cases} \quad \text{Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác } MPHNK.$$

- Câu 4:** Trong không gian, cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành,  $M, N$  lần lượt là trung điểm đoạn  $SC, BC$ . Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  song song với  $BD$  là hình gì?

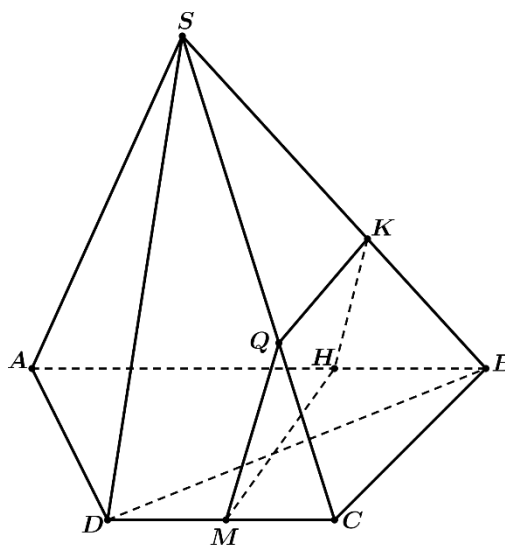


Theo định lí Thalet, ta có  $\frac{BH}{HC} = \frac{BK}{KD} = 2$  suy ra  $\begin{cases} \frac{HI}{AB} = \frac{CH}{CB} = \frac{1}{3} \\ \frac{KJ}{AB} = \frac{DK}{DB} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow HI = KJ.$

Vậy thiết diện của  $(P)$  và tứ diện  $ABCD$  là hình bình hành  $HIJK$ .

**Câu 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với đáy lớn là  $AB$ , điểm  $M$  là trung điểm  $CD$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song với cả  $SA, BC$ , cắt hình chóp theo một thiết diện là  
**A.** hình tam giác.      **B.** hình bình hành.      **C.** hình thoi.      **D.** hình thang.

**Lời giải**



Ta có:  $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BC // (\alpha) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MH (MH // BC, H \in AB).$

Ta có:  $\begin{cases} H \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = HK (HK // SA, K \in SB).$

Ta có:  $\begin{cases} K \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC // (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = KQ (KQ // BC, Q \in SC).$

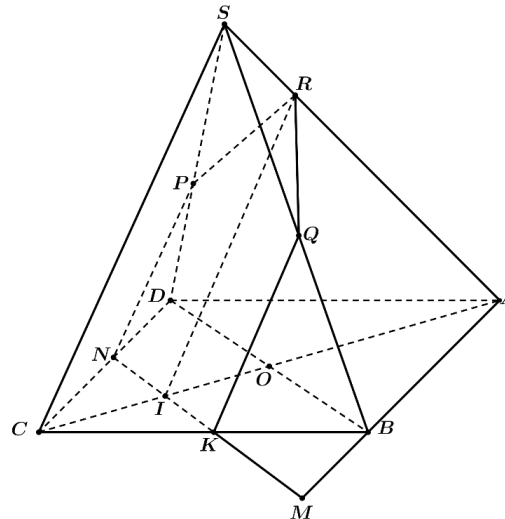
Ta có:  $\begin{cases} Q \in (\alpha) \cap (SCD) \\ M \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = QM.$

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  hình thang  $HKQM$ .

**Câu 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  và song song với  $SC, BD$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.  
**B.**  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.  
**C.**  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.  
**D.**  $(P)$  không cắt hình chóp.

**Lời giải**



Trong  $(ABCD)$ , kẻ đường thẳng qua  $M$  và song song với  $BD$  cắt  $BC$ ,  $CD$ ,  $CA$  tại  $K$ ,  $N$ ,  $I$ .

Trong  $(SCD)$ , kẻ đường thẳng qua  $N$  và song song với  $SC$  cắt  $SD$  tại  $P$ .

Trong  $(SCB)$ , kẻ đường thẳng qua  $K$  và song song với  $SC$  cắt  $SB$  tại  $Q$ .

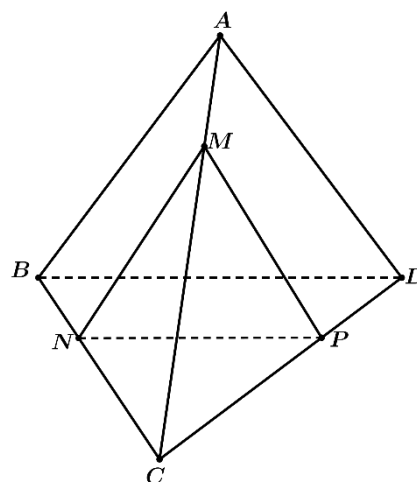
Trong  $(SAC)$ , kẻ đường thẳng qua  $I$  và song song với  $SC$  cắt  $SA$  tại  $R$ .

Thiết diện là ngũ giác  $KNPRQ$ .

**Câu 8:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AC$  ( $M$  khác  $A$ ,  $M$  khác  $C$ ). Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  song song với  $AB$  và  $AD$ . Thiết diện của  $(\alpha)$  với tứ diện  $ABCD$  là hình gì?

- A.** Hình vuông      **B.** Hình chữ nhật      **C.** Hình tam giác      **D.** Hình bình hành

**Lời giải**



Ta có  $\left. \begin{array}{l} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN \text{ với } MN // AB \text{ và } N \in BC.$

Ta có  $\left. \begin{array}{l} (\alpha) // AD \\ AD \subset (ADC) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (ADC) = MP \text{ với } MP // AD \text{ và } P \in CD.$

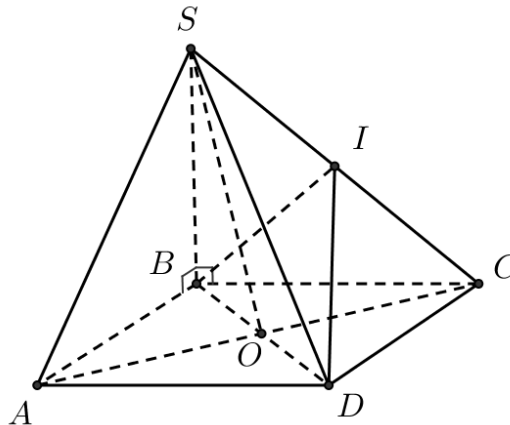
$$(\alpha) \cap (BCD) = NP.$$

Do đó thiết diện của  $(\alpha)$  với tứ diện  $ABCD$  là hình tam giác  $MNP$ .

**Câu 9:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ , gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $SC$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Đường thẳng  $IO$  song song với mặt phẳng  $(SAD)$ .
- B. Đường thẳng  $IO$  song song với mặt phẳng  $(SAB)$ .
- C. Mặt phẳng  $(IBD)$  cắt mặt phẳng  $(SAC)$  theo giao tuyến  $OI$ .
- D. Mặt phẳng  $(IBD)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo một thiết diện là tứ giác.

**Lời giải**



Trong tam giác  $SAC$  có  $O$  là trung điểm  $AC$ ,  $I$  là trung điểm  $SC$  nên  $IO // SA$

$\Rightarrow IO$  song song với hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$ .

Mặt phẳng  $(IBD)$  cắt  $(SAC)$  theo giao tuyến  $IO$ .

Mặt phẳng  $(IBD)$  cắt  $(SBC)$  theo giao tuyến  $BI$ , cắt  $(SCD)$  theo giao tuyến  $ID$ , cắt  $(ABCD)$  theo giao tuyến  $BD \Rightarrow$  thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(IBD)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là tam giác  $IBD$ .

**Câu 10:** Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $H$ , song song với  $CD$  và  $SB$ . Thiết diện tạo bởi  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là hình gì?

- A. Ngũ giác.
- B. Hình bình hành.
- C. Tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song.
- D. Hình thang.

## Lời giải

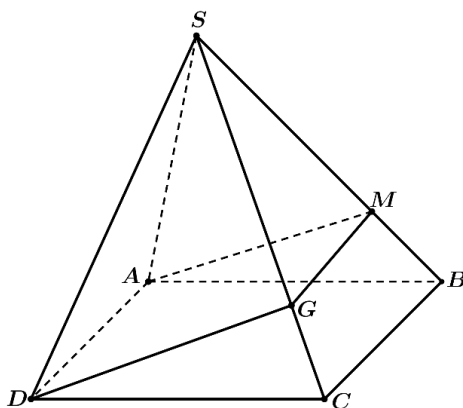
( $P$ ) là mặt phẳng qua  $H$ , song song với  $CD$  và  $SB$  nên ( $P$ ) cắt ( $ABCD$ ) theo giao tuyến qua  $H$  song song  $CD$  cắt  $BC, AD$  lần lượt tại  $F, E$ ; ( $P$ ) cắt ( $SBC$ ) theo giao tuyến  $FI \parallel SB$  ( $I \in SC$ ); ( $P$ ) cắt ( $SCD$ ) theo giao tuyến  $JI \parallel CD$  ( $J \in SD$ ).

Khi đó thiết diện tạo bởi  $(P)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là hình thang vì  $JI \parallel FE$ ,  $FI \parallel SB$ ,  $JE \parallel SA$  nên  $FI$  không song song với  $JE$ .

**Câu 11:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành.  $M$  là một điểm thuộc đoạn  $SB$ . Mặt phẳng  $(ADM)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là

- A. Hình thang.      B. Hình chữ nhật.      C. Hình bình hành.      D. Tam giác.**

## Lời giải

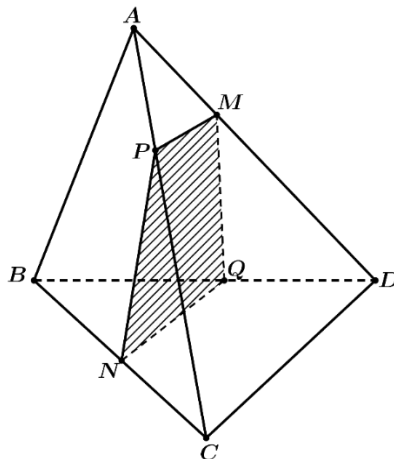


Do  $BC \parallel AD$  nên mặt phẳng  $(ADM)$  và  $(SBC)$  có giao tuyến là đường thẳng  $MG$  song song với  $BC$  nên thiết diện là hình thang  $AMGD$ .

**Câu 12:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AD$ ,  $BC$  theo thứ tự lấy các điểm  $M$ ,  $N$  sao cho  $\frac{MA}{AD} = \frac{NC}{CB} = \frac{1}{3}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa đường thẳng  $MN$  và song song với  $CD$ . Khi đó thiết diện của tứ diện  $ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là:

- A.** một tam giác.  
**B.** một hình bình hành.  
**C.** một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.  
**D.** một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

## Lời giải



Trong mặt phẳng  $(ACD)$  từ  $M$  kẻ  $MP \parallel CD$  ( $P \in AC$ ).

Trong mặt phẳng  $(BCD)$  từ  $M$  kẻ  $NQ \parallel CD$  ( $Q \in BD$ ).

Khi đó ta có  $MPNQ$  là thiết diện của mặt phẳng  $(P)$  và tứ diện  $ABCD$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} MP \parallel CD \\ MP = \frac{1}{3}CD \end{cases}; \begin{cases} NQ \parallel CD \\ NQ = \frac{2}{3}CD \end{cases} \text{ nên ta suy ra } \begin{cases} NQ \parallel MP \\ MP = \frac{1}{2}NQ \end{cases}.$$

Vậy  $MPNQ$  là hình thang có đáy lớn bằng hai lần đáy nhỏ.

**Câu 13:** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AB$ . Mặt phẳng  $(IB'D')$  cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình bình hành.      B. Hình thang.      C. Hình chữ nhật.      D. Tam giác

**Lời giải**

Ta có  $(IB'D')$  và  $ABCD$  có  $I$  là một điểm chung.

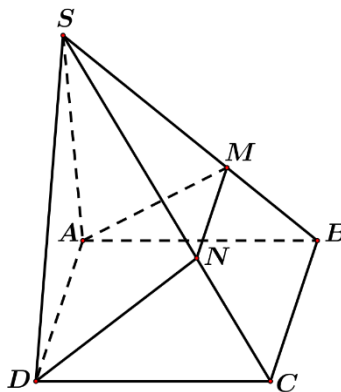
$$\left. \begin{array}{l} B'D' \subset (IBD) \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' \parallel BD \end{array} \right\} \Rightarrow (IBD) \cap (ABCD) = IJ \parallel BD \quad (J \in AD)$$

Thiết diện là hình thang  $IJD'B'$ .

**Câu 14:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành.  $M$  là một điểm thuộc đoạn  $SB$  ( $M$  khác  $S$  và  $B$ ). Mặt phẳng  $(ADM)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là

- A. Hình bình hành.      B. Tam giác.      C. Hình chữ nhật.      D. Hình thang.

**Lời giải**



Ta có  $M$  là một điểm thuộc đoạn  $SB$  với  $M$  khác  $S$  và  $B$ .

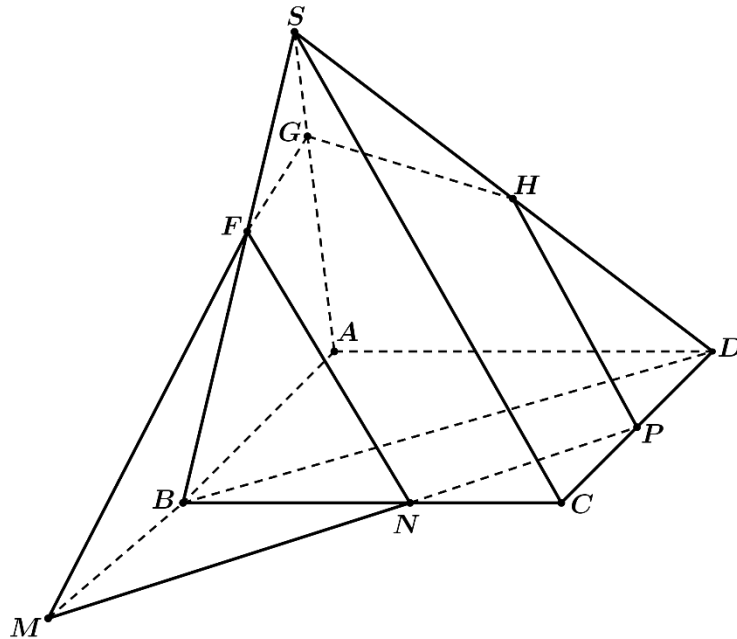
$$\text{Suy ra } \begin{cases} M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \subset (ADM) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx \parallel BC \parallel AD.$$

Gọi  $N = Mx \cap SC$  thì  $(ADM)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là tứ giác  $AMND$ .

Vì  $MN \parallel AD$  và  $MN$  với  $AD$  không bằng nhau nên tứ giác  $AMND$  là hình thang.

- Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  và song song với hai đường thẳng  $SC, BD$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $(P)$  không cắt hình chóp.  
 B.  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.  
 C.  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.  
D.  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  và song song với hai đường thẳng  $SC, BD$

$$(P) \cap (ABCD) = Mx \parallel BD, Mx \cap BC = N, Mx \cap CD = P.$$

$$(P) \cap (SBC) = Ny \parallel SC, Ny \cap SB = F.$$

$$(P) \cap (SCD) = Pt \parallel SC, Pt \cap SD = H.$$

$$\text{Trong } (SAB): MF \cap SA = G.$$

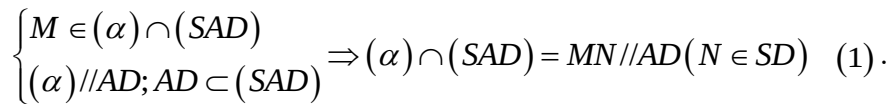
$$(P) \cap (ABCD) = NP; (P) \cap (SCD) = PH; (P) \cap (SAD) = HG.$$

$$(P) \cap (SAB) = GF; (P) \cap (SBC) = FN.$$

Vậy  $(P)$  cắt hình chóp theo thiết diện là ngũ giác  $NPHGF$ .

- Câu 16:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là trung điểm  $SA$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $M$ , song song với  $SC$  và  $AD$ . Thiết diện của  $(\alpha)$  với hình chóp  $S.ABCD$  là hình gì?
- A. Hình thang.      B. Hình thang cân.      C. Hình chữ nhật.      D. Hình bình hành.

**Lời giải**



$$\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) // AD; AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ // AD (Q \in AB) \quad (2).$$

Mặt phẳng  $(ABC)$  chứa đường thẳng  $AB$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ABC)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $AB$ .

Qua  $M$  kẻ  $HK \parallel AB, (H \in BC, K \in AC)$  thì  $HK$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABC)$ .

Mặt phẳng  $(ACD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(ACD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Qua  $K$  kẻ  $KE \parallel CD, (E \in AD)$  thì  $KE$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ACD)$

Mặt phẳng  $(BCD)$  chứa đường thẳng  $CD$  song song với mặt phẳng  $(P)$  nên mặt phẳng  $(BCD)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến song song với  $CD$ .

Qua  $H$  kẻ  $HF \parallel CD, (F \in BD)$  thì  $HF$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(BCD)$

Khi đó  $EF$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(ABD)$ .

Tứ giác  $KEFH$  có  $KE \parallel HF$  (vì cùng song song với  $CD$ ) và  $HK \parallel FE$  (vì cùng song song với  $AB$ ) nên nó là hình bình hành.

**Câu 18:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang ( $AB \parallel CD$ ). Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AD, BC$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAB$ . Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(IJG)$  là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?

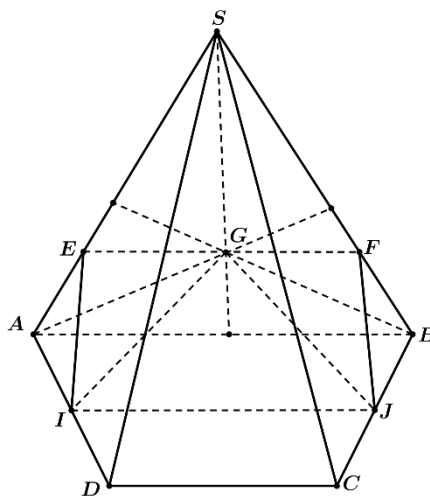
A.  $AB = 3CD$ .

B.  $AB = \frac{1}{3}CD$ .

C.  $AB = \frac{3}{2}CD$ .

D.  $AB = \frac{2}{3}CD$ .

**Lời giải**



Từ giả thiết suy ra  $IJ \parallel AB \parallel CD$  và  $IJ = \frac{AB + CD}{2}$ .

Xét 2 mặt phẳng  $(IJG), (SAB)$  có  $G$  là điểm chung nên giao tuyến của chúng là đường thẳng  $EF$  đi qua  $G$  và  $EF \parallel AB \parallel CD \parallel IJ$  với  $E \in SA, F \in SB$ .

Nối các đoạn thẳng  $EI, FJ$  ta được thiết diện là tứ giác  $EFJI$ , là hình thang vì  $EF \parallel IJ$ .

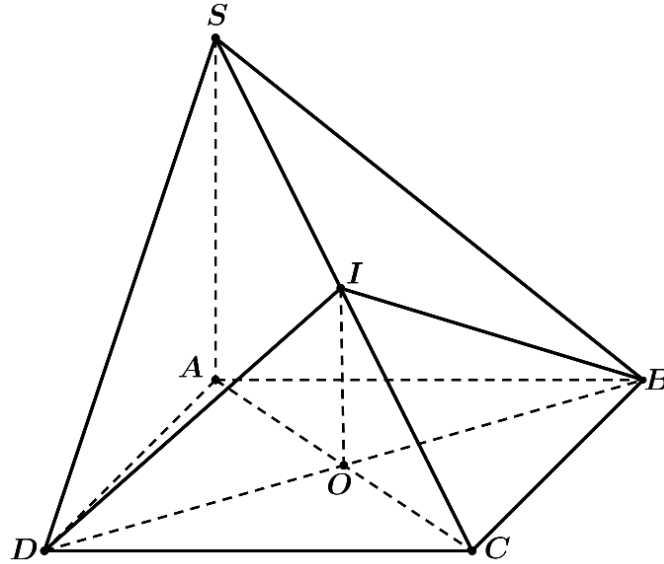
Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAB$  và  $EF \parallel AB$  nên theo định lý Ta lét ta có:  $EF = \frac{2}{3}AB$

Nên để thiết diện là hình bình hành ta cần:  $EF = IJ \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{2} = \frac{2AB}{3} \Leftrightarrow AB = 3CD$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

- Câu 1:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $I$  là trung điểm cạnh  $SC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
- Đường thẳng  $IO$  song song với mặt phẳng  $(SAD)$ .
  - Mặt phẳng  $(IBD)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là một tứ giác.
  - Đường thẳng  $IO$  song song với mặt phẳng  $(SAB)$ .
  - Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IBD)$  và  $(SAC)$  là  $IO$ .

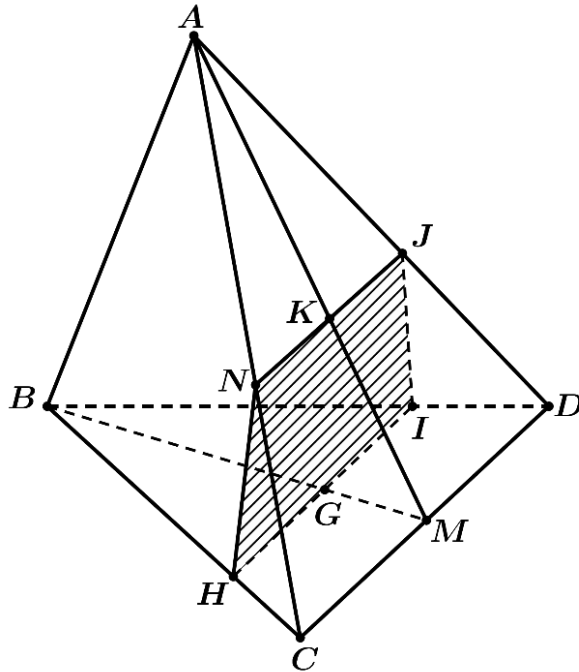
**Lời giải**



- Đúng:  $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAD)$ .
- Sai:  $(IBD)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  theo thiết diện là tam giác  $IBD$ .
- Đúng:  $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$ .
- Đúng:  $(IBD) \cap (SAC) = IO$ .

- Câu 2:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Điểm  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $G$  và song song với  $AB$  và  $CD$ . Đồng thời  $(\alpha)$  cắt trung tuyến  $AM$  của tam giác  $ACD$  tại  $K$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
- $(\alpha)$  cắt tứ diện  $ABCD$  theo thiết diện là một hình tam giác.
  - $\frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$ .
  - $AK = \frac{1}{3}AM$ .
  - Giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(ABD)$  cắt  $CD$ .

**Lời giải**



a) Sai: Xác định thiết diện:  $(\alpha)$  qua  $G$  song song với  $CD \Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = HI$

Tương tự ta được  $(\alpha) \cap (ABD) = IJ$  ( $JI \parallel AB$ )

$(\alpha) \cap (ACD) = JN$  ( $JN \parallel CD$ );  $(\alpha) \cap (ABC) = HN$  nên  $(\alpha)$  là một tứ giác

b) Đúng: Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$  mà  $IG \parallel CD$  nên  $\frac{BG}{BM} = \frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$

Mặt khác  $IJ$  song song  $AB$  nên  $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$

c) Sai: Lại có  $JK$  song song  $DM$  nên  $\frac{AK}{AM} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$  nên  $AK = \frac{2}{3}AM$

d) Sai: Giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(ABD)$  không cắt  $CD$ .

**Câu 3:** Cho tứ diện  $ABCD$ . Giả sử  $M$  thuộc đoạn thẳng  $BC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  song song với  $AB$  và  $CD$ . Khi đó:

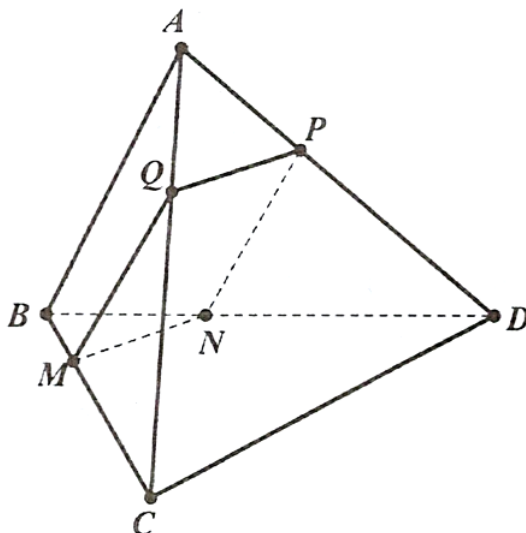
a) Giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(ABC)$  là đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $AB$

b) Giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(BCD)$  là đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $CD$

c) Giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(ABD)$  là đường thẳng đi qua  $N$  và song song với  $AB$

d) Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình thang

**Lời giải**



a) Đúng: Vì  $(\alpha) \parallel AB$  nên giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(ABC)$  là đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $AB$  và cắt  $AC$  tại  $Q$ .

b) Đúng: Vì  $(\alpha) \parallel CD$  nên giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(BCD)$  là đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $CD$  và cắt  $BD$  tại  $N$ .

c) Đúng: Vì  $(\alpha) \parallel AB$  nên giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(ABD)$  là đường thẳng đi qua  $N$  và song song với  $AB$  và cắt  $AD$  tại  $P$ .

Ta có  $MN \parallel PQ \parallel CD, MQ \parallel PN \parallel AB$ .

d) Sai: Vậy hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình bình hành  $MNPQ$ .

**Câu 4:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy bằng 2 và  $M$  là một điểm thuộc cạnh  $SA$  sao cho  $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  song song với  $AB$  và  $AD$ , cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

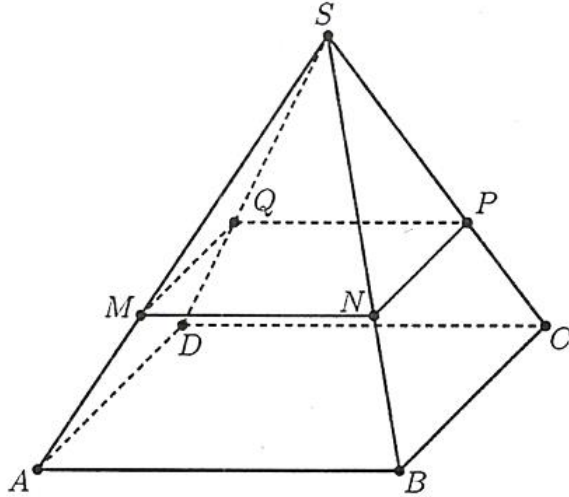
a) Giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(SAB)$  là đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $AB$

b) Giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  với mặt phẳng  $(SAD)$  là đường thẳng đi qua  $M$  và song song với  $SD$

c)  $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

d) Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $M$  song song với  $AB$  và  $AD$ , cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác có diện tích bằng  $\frac{16}{9}$ .

**Lời giải**



a) Đúng: Vì  $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel AB, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MN \text{ với } MN \parallel AB, N \in SB$

b) Sai: Mặt khác:  $\begin{cases} M \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel AD, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = MQ \text{ với } MQ \parallel AD, Q \in SD$

Vì  $BC \parallel AD \parallel MQ$  và  $BC \not\subset (\alpha), MQ \subset (\alpha)$  nên  $BC \parallel (\alpha)$ .

Khi đó, ta có:  $\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = NP \text{ (với } NP \parallel BC, P \in SC).$

Nối các đỉnh  $M, N, P, Q$  ta được một tứ giác.

c) Sai: Ta có:  $MN \parallel AB, MQ \parallel AD, NP \parallel BC, PQ \parallel CD$  nên theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{MQ}{AD} = \frac{2}{3}.$$

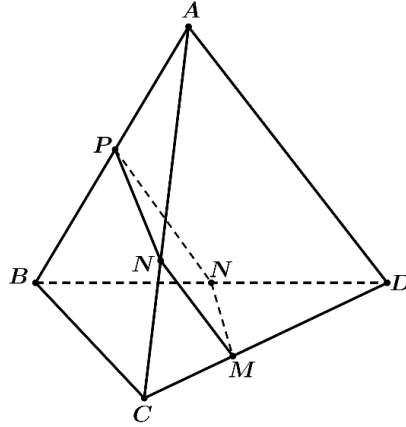
Suy ra  $MN = NP = PQ = MQ = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$  (đáy hình của chóp là hình vuông cạnh 2).

d) Đúng: Dễ thấy  $MNPQ$  là một hình vuông có cạnh bằng  $\frac{4}{3}$  nên có diện tích bằng  $\frac{16}{9}$  (đơn vị diện tích).

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AD=9\text{ cm}$ ,  $CB=6\text{ cm}$  và  $M$  là điểm bất kì trên cạnh  $CD$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $AD$ ,  $BC$ . Nếu thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là hình thoi thì cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu?

**Lời giải**



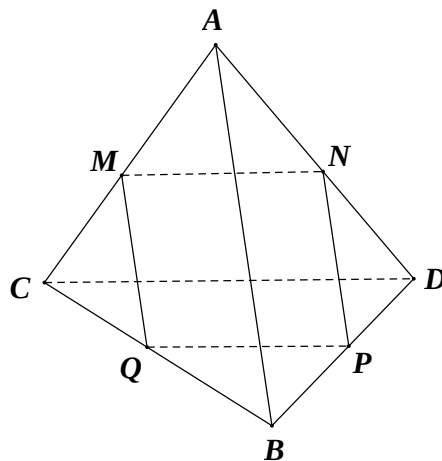
Thiết diện là hình bình hành  $MNPQ$ .

$$\text{Ta có } \frac{MN}{BC} = \frac{DN}{BD} \Leftrightarrow \frac{MN}{6} = \frac{DN}{BD} \text{ và } \frac{PN}{AD} = \frac{BN}{BD} \Leftrightarrow \frac{PN}{9} = \frac{BN}{BD} \text{ suy ra } \frac{MN}{6} + \frac{PN}{9} = 1.$$

$$\text{Khi thiết diện là hình thoi thì } MN = PN \text{ nên } \frac{MN}{9} + \frac{MN}{6} = 1 \Leftrightarrow MN = \frac{18}{5} = 3,6$$

**Câu 2:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB=6, CD=8$ . Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với  $AB, CD$  để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

**Lời giải**



Giả sử một mặt phẳng song song với  $AB, CD$  cắt tứ diện  $ABCD$  theo một thiết diện là hình thoi

$$MNPQ \text{ như hình vẽ trên. Khi đó ta có } \begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel CD \parallel PQ \\ MQ = PQ \end{cases}$$

Theo định lí Talet ta có:  $\frac{CQ}{CB} = \frac{CM}{CA} = \frac{MQ}{AB} = k_1 \Rightarrow MQ = k_1 \cdot AB = 6k_1$

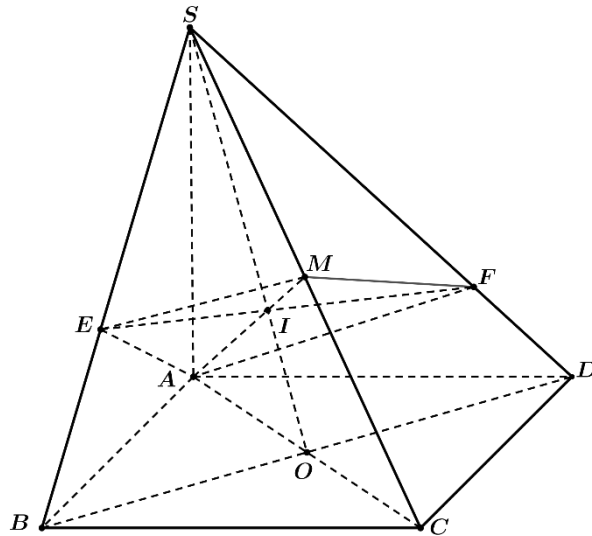
$$\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BD} = \frac{PQ}{CD} = k_2 \Rightarrow PQ = k_2 \cdot CD = 8k_2$$

Ta có  $k_1 + k_2 = \frac{CQ}{CB} + \frac{BQ}{BC} = 1$  (\*) và  $MP = PQ \Rightarrow 6k_1 = 8k_2$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra  $k_1 = \frac{4}{7}, k_2 = \frac{3}{7} \Rightarrow MQ = 6 \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{7} = 3,42$ .

**Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA$  vuông góc với mặt đáy,  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a\sqrt{2}$ ,  $SA = 2a$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SC$ ,  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $A, M$  và song song với đường thẳng  $BD$ . Diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  bằng  $\frac{a^2 m \sqrt{m}}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tính  $m + 2n$ .

**Lời giải**



Gọi  $O = AC \cap BD$ ,  $I = SO \cap AM$ . Trong mặt phẳng  $(SBD)$  qua  $I$  kẻ  $EF \parallel BD$ , khi đó ta có  $(AEMF) \equiv (\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $AM$  và song song với  $BD$ . Do đó thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là tứ giác  $AEMF$ .

Ta có:  $\begin{cases} FE \parallel BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow FE \perp (SAC) \Rightarrow FE \perp AM$ .

Mặt khác ta có:  $AC = 2a = SA$  nên tam giác  $SAC$  vuông cân tại  $A$  suy ra  $AM = a\sqrt{2}$ .

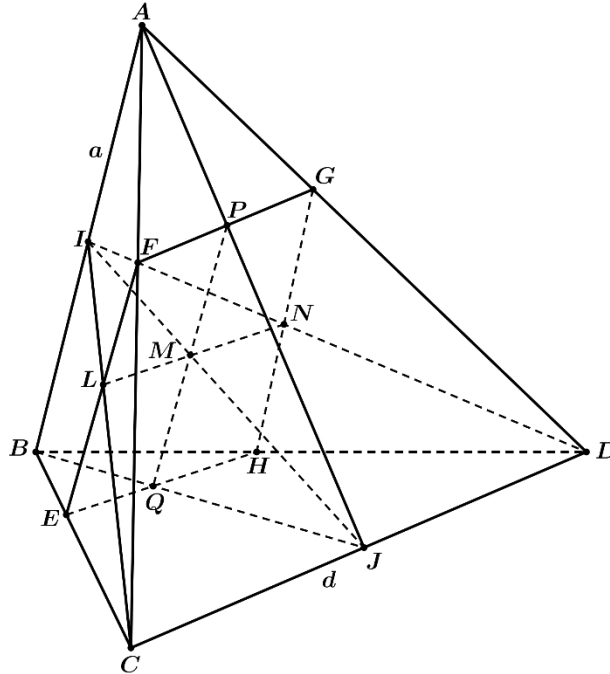
$I$  là trọng tâm tam giác  $SAC$ , mà  $EF \parallel BD$  nên tính được  $EF = \frac{2}{3}BD = \frac{4a}{3}$ .

Tứ giác  $AEMF$  có hai đường chéo  $FE \perp AM$  nên  $S_{AEMF} = \frac{1}{2}FE \cdot AM = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ .

Khi đó  $m = 2; n = 3$  nên  $m + 2n = 2 + 2 \cdot 3 = 8$

**Câu 4:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $CD = b$ . Gọi  $I$ ,  $J$  lần lượt là trung điểm  $AB$  và  $CD$ , giả sử  $AB \perp CD$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $M$  nằm trên đoạn  $IJ$  và song song với  $AB$  và  $CD$ . Biết  $IM = \frac{1}{3}IJ$  thì diện tích thiết diện của tứ diện  $ABCD$  với mặt phẳng  $(\alpha)$  là  $S = \frac{m}{n}.ab$  với  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tính  $2n + m$

**Lời giải**



Ta có  $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow$  giao tuyến của  $(\alpha)$  với  $(ICD)$  là đường thẳng qua  $M$  và

song song với  $CD$  cắt  $IC$  tại  $L$  và  $ID$  tại  $N$ .

$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases} \Rightarrow$  giao tuyến của  $(\alpha)$  với  $(JAB)$  là đường thẳng qua  $M$  và song song

với  $AB$  cắt  $JA$  tại  $P$  và  $JB$  tại  $Q$ .

Ta có  $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow EF // AB$

Tương tự  $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow HG // AB \Rightarrow EF // HG // AB$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ACD) \\ P \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow FG // CD$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (BCD) \\ Q \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow EH // CD \Rightarrow FG // EH // CD.$$

Suy ra  $EFGH$  là hình bình hành. Mà  $AB \perp CD$  nên  $EFGH$  là hình chữ nhật.

$$\text{Xét tam giác } ICD \text{ có: } LN // CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}.$$

$$\text{Xét tam giác } ICD \text{ có: } MN // JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}.$$

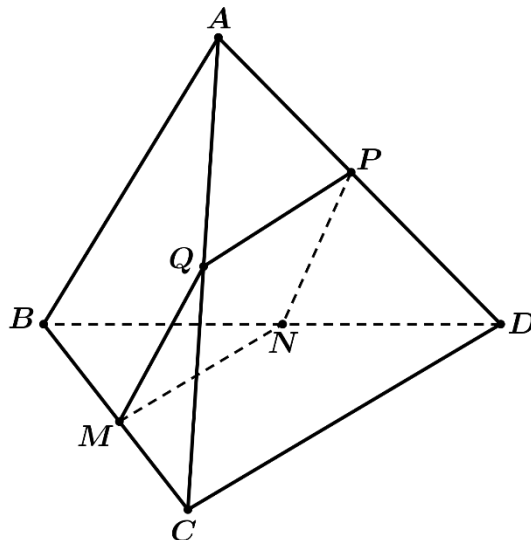
$$\text{Do đó } \frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{1}{3}CD = \frac{b}{3}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{EFGH} = PQ \cdot LN = \frac{2ab}{9}.$$

**Câu 5:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB$  vuông góc với  $CD$ ,  $AB = CD = 6$ .  $M$  là điểm thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $MC = x \cdot BC$  ( $0 < x < 1$ ). mp( $P$ ) song song với  $AB$  và  $CD$  lần lượt cắt  $BC, DB, AD, AC$  tại  $M, N, P, Q$ . Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

**Lời giải**



$$\text{Xét tứ giác } MNPQ \text{ có } \begin{cases} MQ // NP // AB \\ MN // PQ // CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

Mặt khác  $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$ . Do đó,  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

Vì  $MQ \parallel AB$  nên  $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$ .

Theo giả thiết  $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$ .

Vì  $MN \parallel CD$  nên  $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$ .

Diện tích hình chữ nhật  $MNPQ$  là

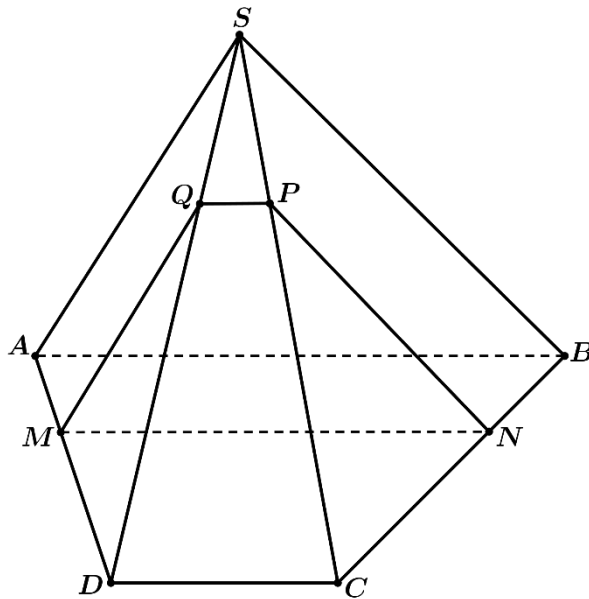
$$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \leq 36 \left( \frac{x+1-x}{2} \right)^2 = 9.$$

Ta có  $S_{MNPQ} = 9$  khi  $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác  $MNPQ$  lớn nhất bằng 9 khi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**Câu 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang ( $AB \parallel CD$ ), cạnh  $AB = 3a$ ,  $AD = CD = a$ . Tam giác  $SAB$  cân tại  $S$ ,  $SA = 2a$ . Mặt phẳng  $(P)$  song song với  $SA, AB$  cắt các cạnh  $AD, BC, SC, SD$  theo thứ tự tại  $M, N, P, Q$ . Đặt  $AM = x$  ( $0 < x < a$ ). Gọi  $x$  là giá trị để tứ giác  $MNPQ$  ngoại tiếp được đường tròn, bán kính đường tròn đó khi  $a = 6\sqrt{7}$  là bao nhiêu?

**Lời giải**



$$(P) \parallel SA \Rightarrow MQ \parallel SA; (P) \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AB;$$

$$(P) \parallel AB \Rightarrow (P) \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel MN$$

Tứ giác  $MNPQ$  là hình thang.

$$(P) \parallel SA; (P) \parallel AB \Rightarrow (P) \parallel (SAB) \Rightarrow PN \parallel SB \Rightarrow \frac{PN}{SB} = \frac{CN}{CB}.$$

$$MQ // SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA}.$$

$$MN // AB \Rightarrow \frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB} \Rightarrow \frac{PN}{SB} = \frac{QM}{SA} \Rightarrow PN = QM \Rightarrow MNPQ \text{ là hình thang cân.}$$

$$MQ // SA \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x)$$

$$PQ // CD \Rightarrow \frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$$

$$\begin{aligned} \text{Gọi } E = MN \cap BD &\Rightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow ME = 3(a-x); \frac{EN}{CD} = \frac{BN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EN = x \\ &\Rightarrow MN = ME + EN = 3a - 2x. \end{aligned}$$

Hình thang cân  $MNPQ$  có đường tròn nội tiếp  $\Rightarrow MN + PQ = MQ + NP$

$$\Rightarrow 3a - 2x + x = 4(a-x) \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

$$MN = \frac{7a}{3}; PQ = \frac{a}{3}; QM = \frac{4a}{3} \Rightarrow MF = \frac{1}{2}MN - \frac{1}{2}PQ = a$$

$$\Rightarrow QF = \sqrt{MQ^2 - MF^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{9} - a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{Vậy bán kính đường tròn nội tiếp hình thang } MNPQ \text{ là } R = \frac{1}{2}QF = \frac{a\sqrt{7}}{6} \xrightarrow{a=6\sqrt{7}} R = 7$$

-----HẾT-----