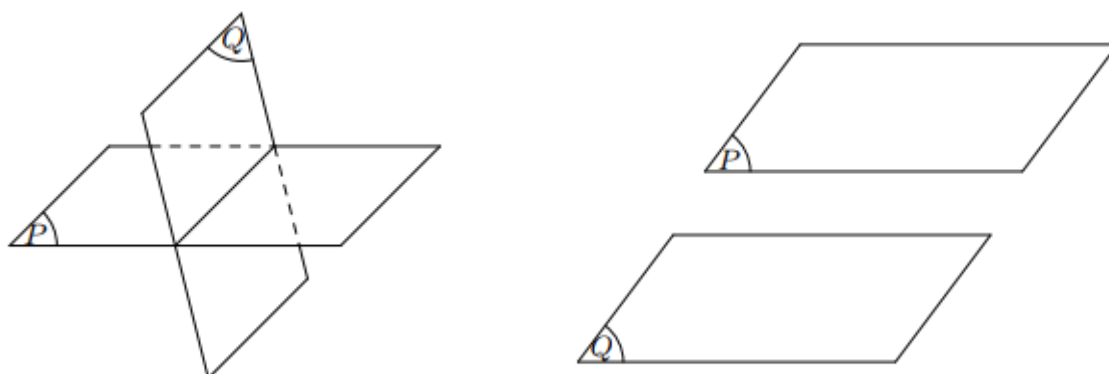


A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) . Có hai khả năng xảy ra:

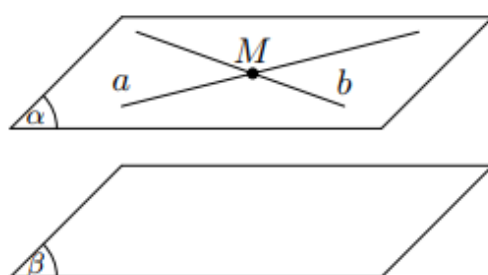


$(P), (Q)$ có một điểm chung: $(P) \cap (Q) = a$ $(P), (Q)$ không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

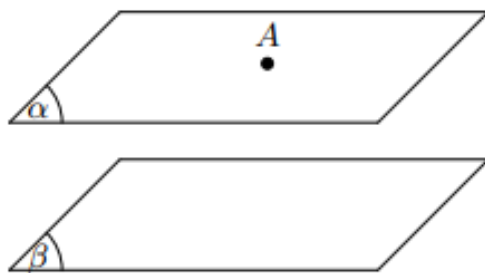
2 Điều kiện và tính chất của hai mặt phẳng song song

Tính chất 1: (Dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song). Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .



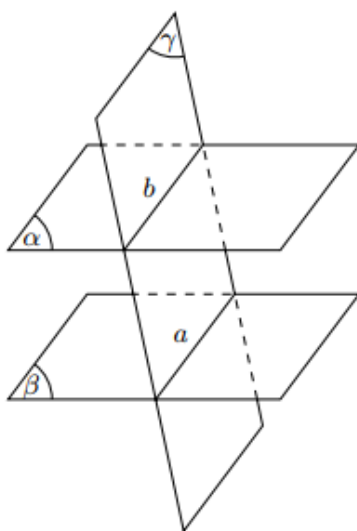
- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P) \parallel (Q)$.

Tính chất 2: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

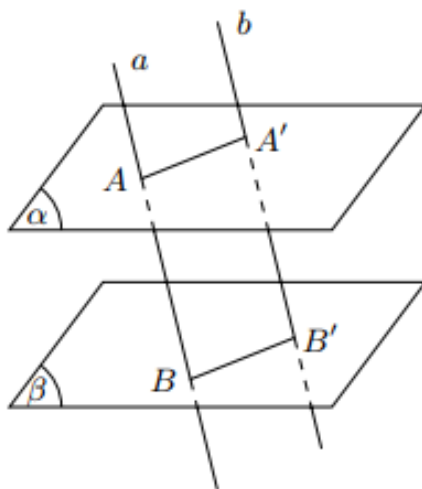


- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) . Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

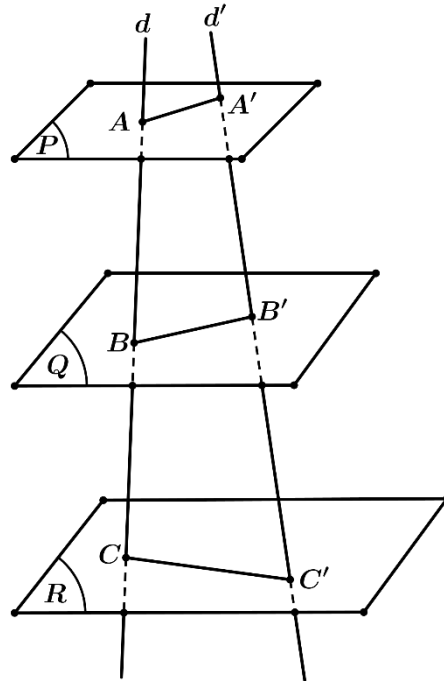
Tính chất 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.



- Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



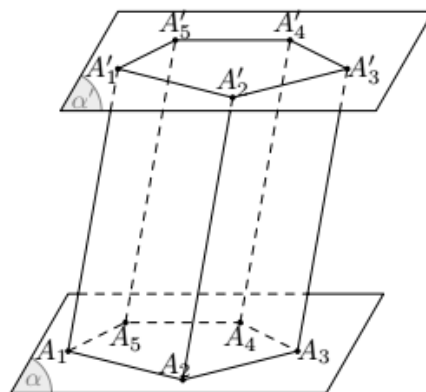
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Nếu hai cát tuyến d và d' cắt ba mặt phẳng song song $(P) \parallel (Q) \parallel (R)$ lần lượt tại các giao điểm A, B, C và A', B', C' thì $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

4 Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ: Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1, A'_2, ..., A'_n$ với các hình chữ nhật $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$,... được gọi là hình lăng trụ.

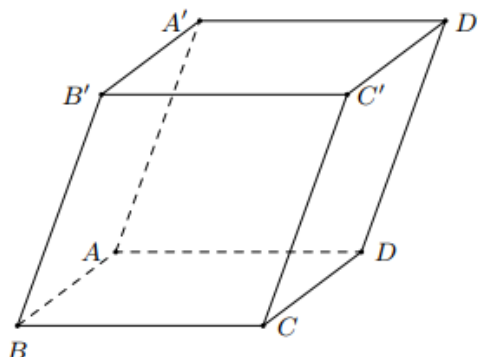


Tính chất:

- Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.
- Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.

- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots$ được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.
- Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.

Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

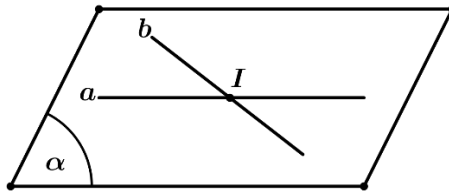


Tính chất:

- Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.
- Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.
- Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.
- Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.
- Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.
- Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.
- Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.

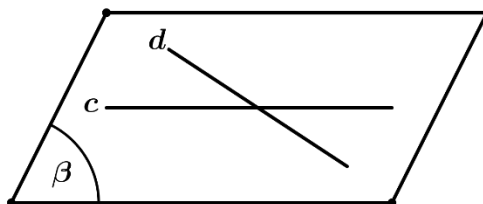
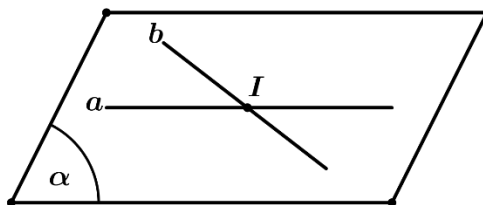
Dạng 1: Nhận biết và chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp: Để chứng minh hai mặt phẳng song song $(\alpha) \parallel (\beta)$ ta chứng minh mặt phẳng (α) có hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt song song với mặt phẳng (β) .



$$\text{Cụ thể: } \begin{cases} a \parallel (\beta) \\ b \parallel (\beta) \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

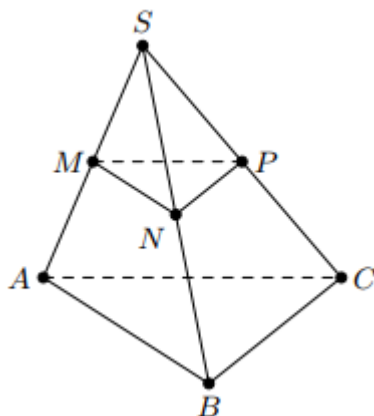
Ngoài ra, dựa vào phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ta còn có thể chứng minh hai mặt phẳng song song như sau: chứng minh hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng này, song song với hai đường thẳng (cắt nhau) nằm trong mặt phẳng kia.



$$\text{Cụ thể: } \begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel d \\ a, b \subset (\alpha) \\ c, d \subset (\beta) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC . Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABC)$.

Lời giải



Nếu hai mặt phẳng $(MNP), (ABC)$ có một điểm chung thì chúng có đường thẳng chung d .

Vì $MN \parallel AB$ nên $d \parallel AB$ hoặc d trùng với AB .

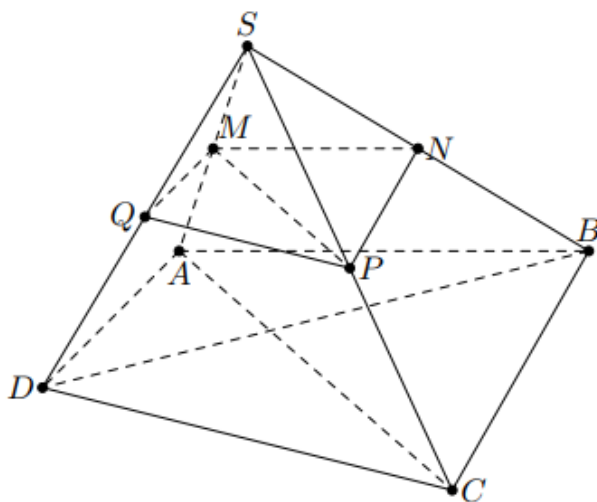
Tương tự, do $MP \parallel AC$ nên $d \parallel AC$ hoặc d trùng với AC mà điều này là không thể xảy ra vì AB cắt AC tại A .

Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC .

a) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Giả sử mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q . Chứng minh rằng Q là trung điểm của SD .

Lời giải



a) Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$.

Vì $AB \subset (ABCD)$ nên $MN \parallel (ABCD)$. Chứng minh tương tự ta có: $NP \parallel (ABCD)$ mà MN cắt NP nên ta có: $(MNP) \parallel (ABCD)$.

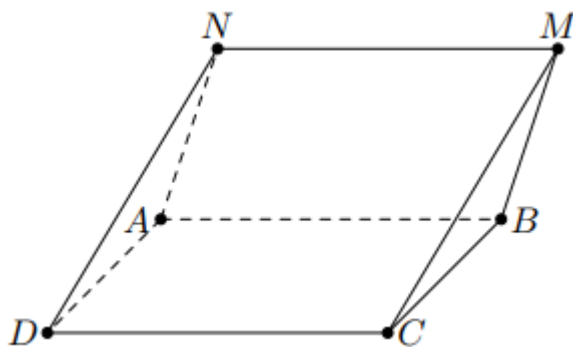
b) Vì Q là giao điểm của SD và (MNP) , M là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) nên MQ là giao tuyến của (MNP) và (SAD) .

Do $(MNP) \parallel (ABCD)$, $MQ = (MNP) \cap (SAD)$, $AD = (SAD) \cap (ABCD)$ nên ta có: $MQ \parallel AD$.

Trong tam giác SAD , M là trung điểm của SA và $MQ \parallel AD$ nên Q là trung điểm của SD .

Bài tập 3: Cho hai hình bình hành $ABCD, ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN) \parallel (BCM)$.

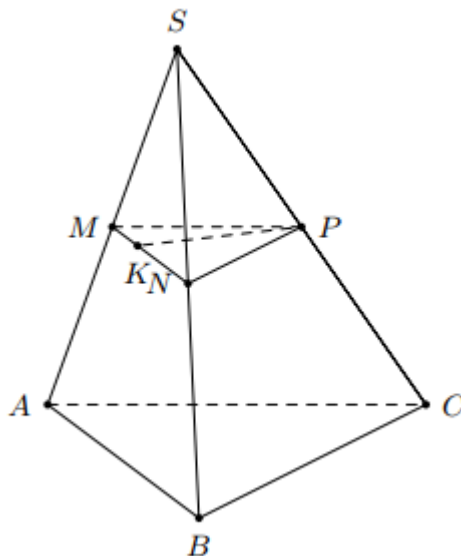
Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$ mà AD không thuộc mặt phẳng (BCM) suy ra $AD \parallel (BCM)$. Tương tự, do $ABMN$ là hình bình hành nên $AN \parallel BM$ suy ra $AN \parallel (BCM)$.
Mà AD, AN cắt nhau và nằm trong mặt phẳng (ADN) nên ta có $(ADN) \parallel (BCM)$.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC và K là điểm bất kỳ trên cạnh MN . Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABC)$. Từ đó suy ra $PK \parallel (ABC)$.

Lời giải



Ta có MN là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $MN \parallel AB$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \Rightarrow MN \parallel (ABC) \Rightarrow MN \parallel (ABC) \\ MN \not\subset (ABC) \end{cases}$$

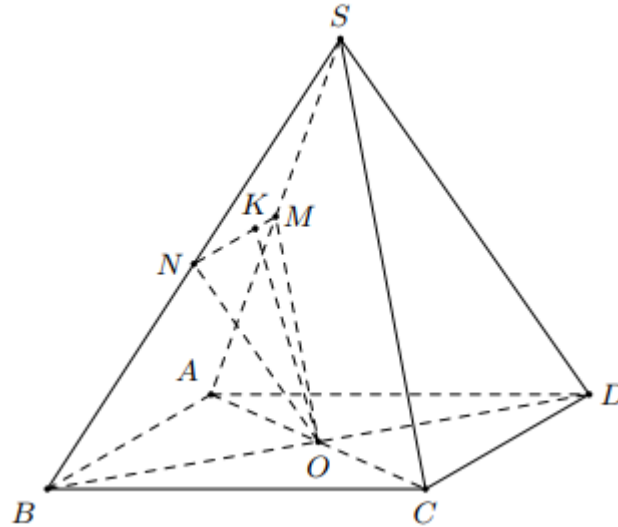
$$\text{Tương tự } \begin{cases} NP \parallel BC \\ BC \subset (ABC) \Rightarrow NP \parallel (ABC) \\ NP \not\subset (ABC) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} MN \parallel (ABC) \\ NP \parallel (ABC) \\ MN, NP \subset (MNP) \\ MN \cap NP = N \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC). \text{ Mặt khác do } PK \subset (MNP) \text{ nên } PK \parallel (ABC).$$

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB .

- a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.
b) Gọi K là điểm bất kỳ trên MN . Chứng minh $OK \parallel (SCD)$.

Lời giải



- a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.

Ta có OM là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OM \parallel SC$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD). \\ OM \not\subset (SCD) \end{cases} \text{ Tương tự } \begin{cases} ON \parallel SD \\ SD \subset (SCD) \Rightarrow ON \parallel (SCD). \\ ON \not\subset (SCD) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} OM, ON \parallel (SCD) \\ OM, ON \subset (OMN) \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD). \\ OM \cap ON = O \end{cases}$$

- b) Chứng minh $OK \parallel (SCD)$. Ta có $\begin{cases} (OMN) \parallel (SCD) \\ OK \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow OK \parallel (SCD).$

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD gấp đôi đáy bé BC . Gọi $O = AC \cap BD, M$ thuộc cạnh SA sao cho $AM = 2MS$ và N thuộc cạnh SB sao cho $2BN = NS$

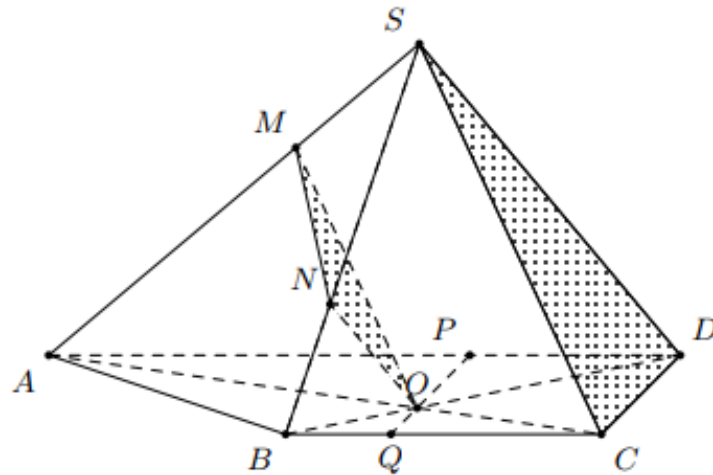
- a) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SCD)$.
b) Gọi $d = (OMN) \cap (ABCD), P = d \cap AD, Q = d \cap BC$. Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SCD)$.

$$\text{Ta có } AM = 2MS \Rightarrow \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3} \text{ và } 2BN = NS \Rightarrow \frac{BN}{BS} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Xét } \triangle OAB \text{ và } \triangle OBC \text{ có } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AD = 2BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = 2OC \\ OD = 2OB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AO}{AC} = \frac{2}{3} \\ \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3} \end{cases}$$



$$\text{Trong tam giác } SAC \text{ có } \frac{AM}{AS} = \frac{AO}{AC} = \frac{2}{3} \text{ nên } OM \parallel SC.$$

$$\text{Trong tam giác } SBD \text{ có } \frac{BN}{BS} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3} \text{ nên } ON \parallel SD.$$

$$\text{Nhu vậy } \begin{cases} OM \parallel SC \\ ON \parallel SD \\ OM, ON \subset (OMN) \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD) \\ SC, SD \subset (SCD) \\ OM \cap ON = O \end{cases}$$

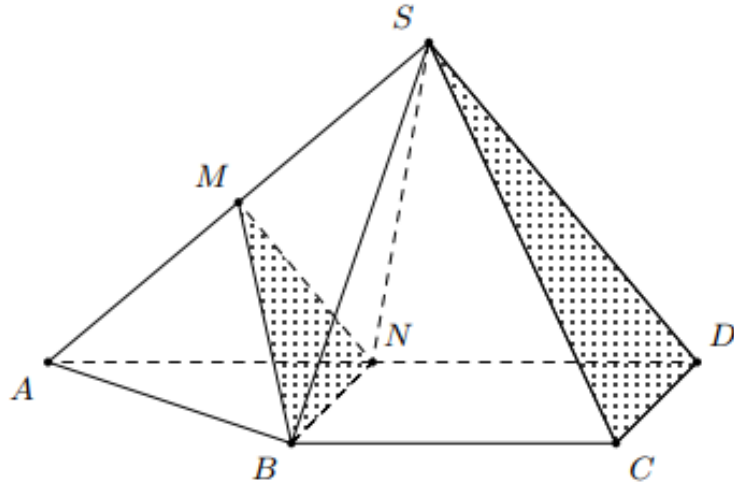
b) Chứng minh tứ giác PQCD là hình bình hành.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (OMN) \parallel (SCD) \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \Rightarrow d \parallel CD, \text{ trong đó } d \text{ đi qua } O \in (ABCD) \cap (OMN). \\ (ABCD) \cap (OMN) = d \end{cases}$$

$$\text{Xét tứ giác } PQCD \text{ có } \begin{cases} PQ \parallel CD \\ PD \parallel CQ \end{cases} \Rightarrow PQCD \text{ là hình bình hành.}$$

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$ từ đó suy ra $BM \parallel (SCD)$

Lời giải



Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của SA và $AD \Rightarrow MN$ là đường trung bình của

$$\Delta SAD \Rightarrow MN \parallel SD. \text{ Ta có } \begin{cases} MN \parallel SD \\ SD \subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases}$$

Mà có $2ND = AD = 2BC$ và $ND \parallel BC$ nên suy ra $BNDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BN \parallel CD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} NB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \Rightarrow NB \parallel (SCD). \\ NB \not\subset (SCD) \end{cases} \text{ Khi đó: } \begin{cases} MN, NB \parallel (SCD) \\ MN, NB \subset (BMN) \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD). \\ MN \cap NB = N \end{cases}$$

Mặt khác do $BM \subset (BMN)$ nên $BM \parallel (SCD)$.

Bài tập 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và $A'B'$

a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.

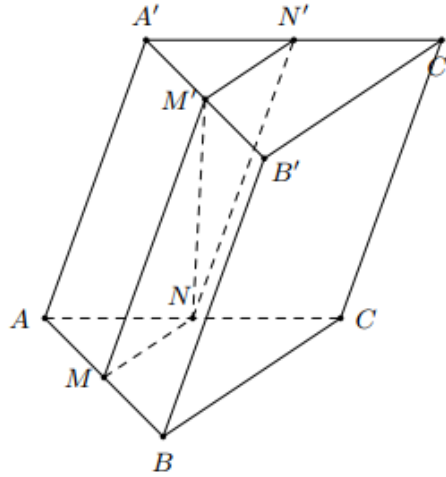
b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM') . Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

Lời giải

a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MM' \parallel BB' \\ MN \parallel BC \\ MM', MN \subset (MNM') \Rightarrow (MNM') \parallel (BCC'B') \\ BB', BC \subset (BB'C'C) \\ MN \cap MM' = M \end{cases}$$

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM') . Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?



Ta có
$$\begin{cases} (MNM') \parallel (BCC'B') \\ (A'B'C') \cap (BCC'B') = B'C' \text{ suy ra } (A'B'C') \cap (MNM') = x'M'x \parallel B'C' \\ M' \in (A'B'C') \cap (MNM') \end{cases}$$

Trong $(A'B'C')$, gọi $N' = A'C' \cap x'M'x \Rightarrow \begin{cases} N' \in A'C' \\ N' \in x'M'x \subset (MNM') \end{cases} \Rightarrow N' = A'C' \cap (MNM')$.

Suy ra MN' là đường trung bình tam giác $A'B'C' \Rightarrow MN' = \frac{1}{2}B'C'$.

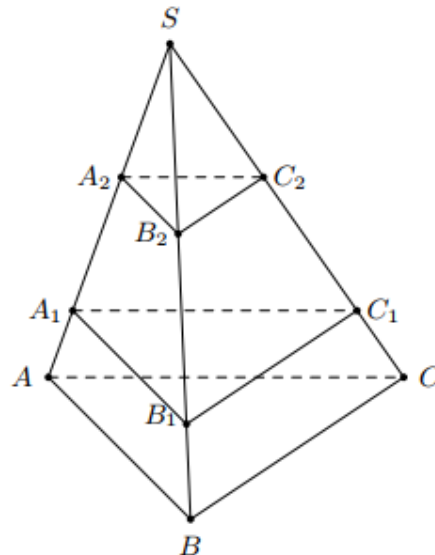
Mà MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Lại do $BC \parallel B'C'$ và $BC = B'C'$ nên $MN \parallel M'N'$ và $MN = M'N'$.

Vậy tứ giác $MNN'M'$ là hình bình hành.

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA lấy hai điểm A_1, A_2 sao cho $A_2A_1 = 2A_1A$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng lần lượt đi qua A_1, A_2 , đồng thời cùng song song với (ABC) . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 ; mặt phẳng (Q) lần lượt cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $B_2B_1 = 2B_1B$ và $C_2C_1 = 2C_1C$.

Lời giải

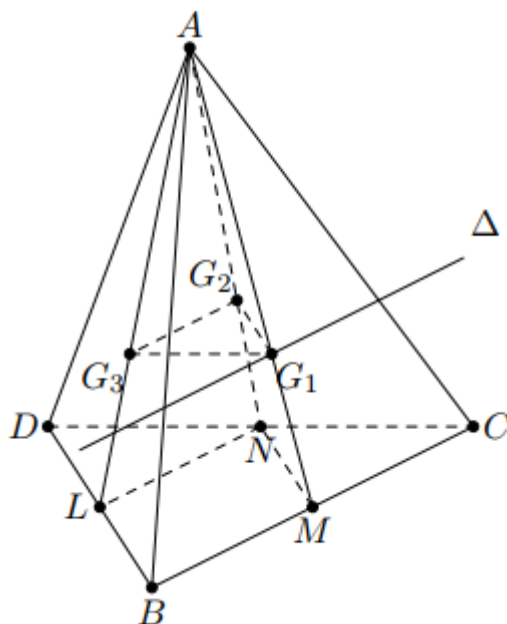


SA, SB ta được $\frac{A_2A_1}{A_1A} = \frac{B_2B_1}{B_1B}$

Chúng minh tương tự ta được $C_2C_1 = 2C_1C$.

a) Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

Lời giải


$$\text{Ta có } \frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{AG_3}{AL} = \frac{2}{3} \text{ suy ra } \begin{cases} G_1G_2 \parallel MN \\ G_2G_3 \parallel NL \end{cases}$$

b) Từ $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$ suy ra $BC \parallel (G_1G_2G_3)$.

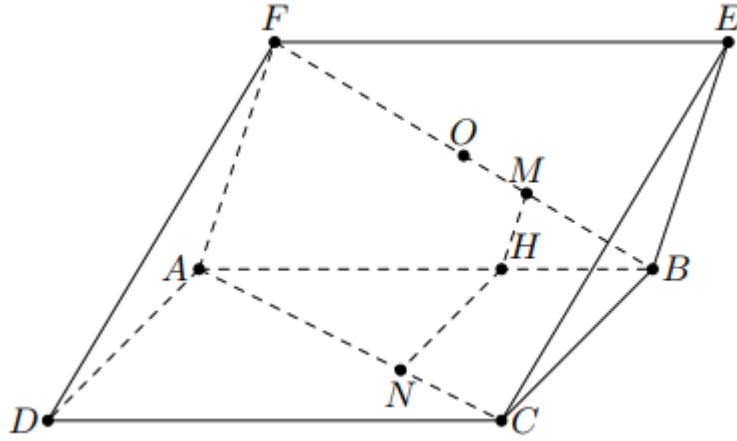
$$\text{Ta có } \begin{cases} G_1 \in (ABC) \cap (G_1G_2G_3) \\ BC \subset (ABC) \\ BC // (G_1G_2G_3) \end{cases} \Rightarrow (ABC) \cap (G_1G_2G_3) = \Delta // BC \text{ với } \Delta \text{ qua } G_1.$$

Bài tập 11: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $(AFD) \parallel (BEC)$.

b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD) . Lấy N là giao điểm của (P) và AC . Tính $\frac{AN}{NC}$.

Lời giải



a) Ta có $AD \parallel BC$, suy ra $AD \parallel (BCE)$. Tương tự $AF \parallel (BCE)$.

Khi đó $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Ta có $(P) \parallel (AFD)$ nên $(P) \cap (ABF) = MH$ với $M \in AB$ và $MH \parallel AF$.

Vì M là trọng tâm của tam giác ABE nên $\frac{BM}{BO} = \frac{2}{3}$ với O là tâm hình bình hành $ABEF$.

Vì $ABEF$ là hình bình hành nên $\frac{BO}{BF} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\frac{BM}{BD} = \frac{1}{3}$. Do đó $\frac{BM}{MF} = \frac{1}{2}$.

Khi đó $\frac{BH}{AH} = \frac{1}{2}$ (vì $AF \parallel MH$) mà $(P) \parallel (AFD)$ nên $(P) \cap (ABC) = NH$ với $N \in AC$ và $NH \parallel AD$.

Do đó $\frac{AN}{NC} = \frac{AH}{BH} = 2$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Qua một điểm có vô số mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.
- B. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
- C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
- D. Qua một điểm tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Câu 2: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , a là đường thẳng bất kì. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. Nếu a cắt mp (α) thì a cắt mp (β) .
- B. Nếu $a \subset (\alpha)$ thì a song song với mp (β) .
- C. Nếu $a \subset (\beta)$ thì a song song với mp (α) .
- D. Nếu a song song với mp (α) thì a song song với mp (β) .

Lời giải

Nếu a song song với mp (α) thì a song song với mp (β) .

Câu 3: Cho một đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với (P) .

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. Vô số.

Lời giải

Có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với (P) .

Câu 4: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .
- B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β) .
- C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.
- D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước có một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Lời giải

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) , đường thẳng $a // (\alpha)$. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (β) ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Vì $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a // (\alpha) \end{cases}$ nên a và (β) chỉ có thể có 2 vị trí tương đối: $(\alpha) // (\beta)$ hoặc a nằm trên (β) .

Câu 6: Cho các mệnh đề sau:

- 1) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
- 2) Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
- 3) Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề sai là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Mệnh đề "Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau." là một khẳng định sai vì chúng có thể cắt nhau.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau." là một mệnh đề sai vì hai mặt này có thể trùng nhau.

Mệnh đề "Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại." là một mệnh đề đúng.

Câu 7: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β) .

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(\alpha) // (\beta)$

D. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong (α) .

Lời giải

Mệnh đề: "Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) ." là đúng.

Câu 8: Chọn khẳng định sai:

A. Hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

- B.** Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
- C.** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song nhau.
- D.** Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Lời giải

Theo định lý 1 (dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song): Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

Câu 9: Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

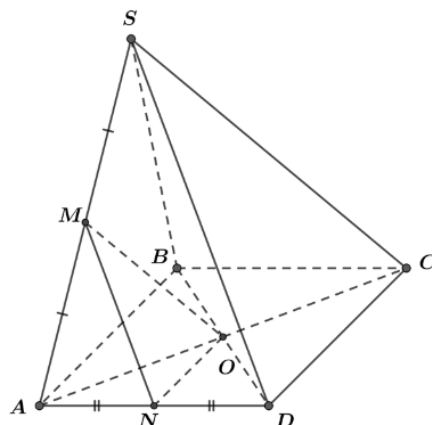
- A.** Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.
- B.** Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
- C.** Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
- D.** Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Lời giải

Hình lăng trụ là một đa diện có hai mặt đáy là các đa giác bằng nhau và những mặt bên là các hình bình hành.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , gọi M , N lần lượt là trung điểm SA , AD . Mặt phẳng (MNO) song song với mặt phẳng nào sau đây?

- A.** (SBC) . **B.** (SAB) . **C.** (SAD) . **D.** (SCD) .



Lời giải

Vì MN là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow MN \parallel SD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel SD \\ MN \not\subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD) \\ SD \subset (SCD) \end{cases}$$

Tương tự $ON \parallel (SCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN // (SCD), ON // (SCD) \\ MN \subset (MNO), ON \subset (MNO) \Rightarrow (MNO) // (SCD). \\ MN \cap ON = \{N\} \end{cases}$$

Câu 11: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $(\alpha) // (\beta)$?

- A. $(\alpha) // a$ và $(\alpha) // b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .
 B. $(\alpha) // a$ và $(\alpha) // b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .
 C. $(\alpha) // a$ và $(\alpha) // b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .
 D. $(\alpha) // \gamma$ và $(\beta) // (\gamma)$ là mặt phẳng nào đó.

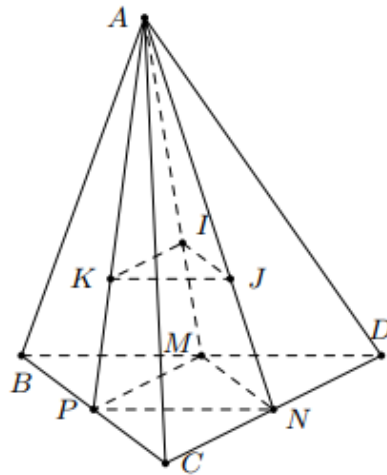
Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} a // (\alpha) \\ b // (\alpha) \\ a \times b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta).$$

Câu 12: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ACD, ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BD, CD, BC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $(DIK) // (ABC)$.
 B. $(IJK) // (BCD)$.
 C. $(KMN) // (ABC)$.
 D. $(IJK) // (AMD)$.

Lời giải



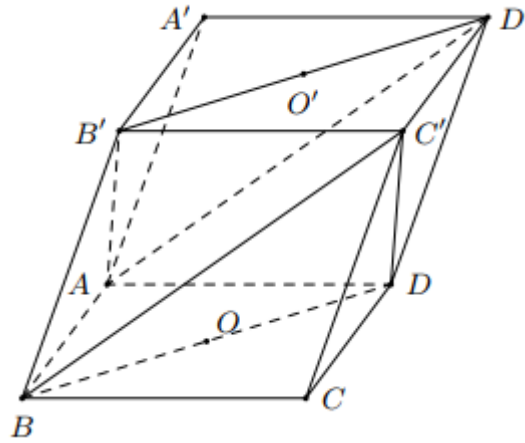
$$\text{Ta có } \frac{AK}{AP} = \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \text{ nên } KJ // PN \text{ và } IJ // MN.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} KJ // PN \\ IJ // MN \\ KJ, IJ \subset (KIJ) \\ PN, MN \subset (BCD) \\ KJ \cap IJ = J \end{cases} \text{ suy ra } (KIJ) // (BCD).$$

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, AC cắt BD tại O còn $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O' . Khi đó $(AB'D')$ sẽ song song mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $(A'OC')$. B. (BDA') . C. (BDC') . D. (BCD) .

Lời giải

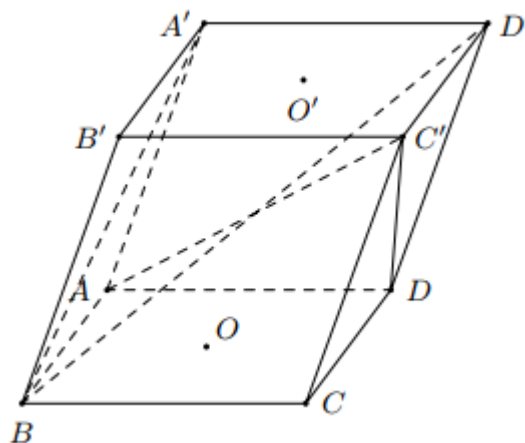


$$\text{Ta có } \begin{cases} B'D' \parallel BD \\ AB' \parallel DC' \\ B'D', AB' \subset (AB'D') \Rightarrow (AB'D') \parallel (BDC'). \\ DC', BD \subset (BDC') \\ B'D' \cap AB' = B' \end{cases}$$

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' . Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $(AA'B'B) \parallel (DD'C'C)$. B. $(BA'D') \parallel (ADC')$.
C. $A'B'CD$ là hình bình hành. D. $BB'D'D$ là một tứ giác.

Lời giải

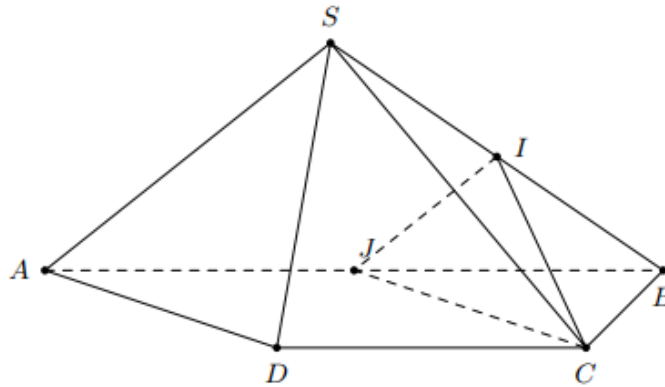


$$\text{Ta có } \begin{cases} BD' \subset (BA'D') \\ AC' \subset (ADC') \Rightarrow (BA'D') \parallel (ADC'). \\ AC' \cap BD' \neq \emptyset \end{cases}$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB . Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD) ?

- A. (BCI) . B. (BIJ) . C. (CIJ) . D. (SJC) .

Lời giải



Vì I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB nên $IJ \parallel SA$.

Do J là trung điểm AB và $AB = 2CD$ nên $AJ = CD$.

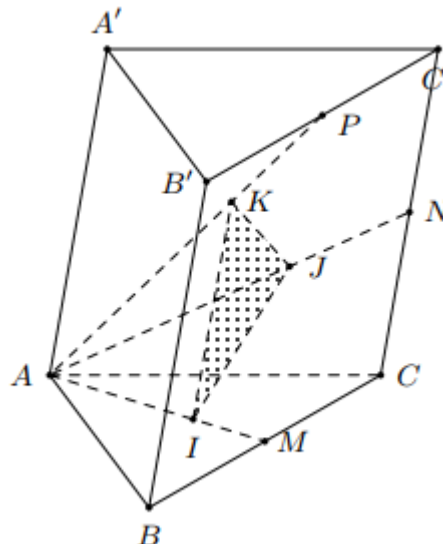
Mà $AJ \parallel CD$ nên $AJCD$ là hình bình hành nên $CJ \parallel AD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} IJ \parallel SA \\ IC \parallel AD \\ IJ, IC \subset (CIJ) \Rightarrow (CIJ) \parallel (SAD) \\ SA, AD \subset (SAD) \\ CI \cap IJ = I \end{cases}$$

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle ACC'$ và $\triangle AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK) ?

- A. $(BC'A)$. B. $(AA'B)$. C. $(BB'C)$. D. $(CC'A)$.

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CC' và $B'C'$.

Ta có $\frac{AK}{AP} = \frac{AJ}{AN} = \frac{AI}{AM} = \frac{2}{3}$ suy ra $IK // PM$ và $KJ // PN$.

Khi đó $\begin{cases} IK // PM \\ KJ // PN \\ IK, KJ \subset (IJK) \\ PM, PN \subset (BCC'B') \\ IK \cap KJ = K \end{cases}$ suy ra $(IJK) // (BCC'B')$ hay $(IJK) // (BB'C)$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn $AB', AC', B'C$

sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{C'N}{AC'} = \frac{CP}{CB'} = x$. Để $(MNP) // (A'BC')$ thì x bằng bao nhiêu?

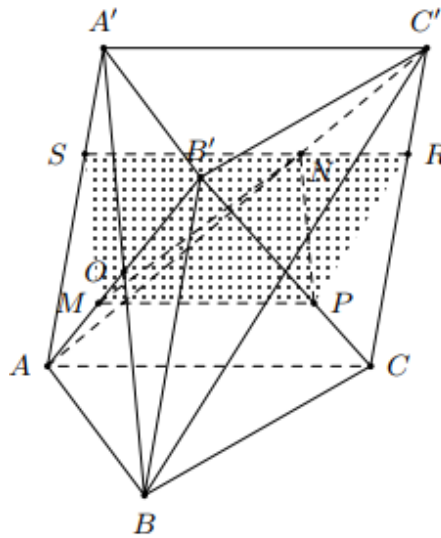
A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{1}{3}$.

C. $x = \frac{2}{3}$.

D. $x = \frac{1}{4}$.

Lời giải



Gọi $O = AB' \cap A'B$.

Ta có $\frac{AM}{AB'} = \frac{CP}{CB'} = x$ suy ra $MP // AC // A'C'$, do đó $(MNP) \cap (ACC')$ là đường thẳng qua N và song song với $A'C'$ cắt CC', AA' lần lượt tại R, S .

Vậy (MNP) chính là mặt phẳng $(MPRS)$.

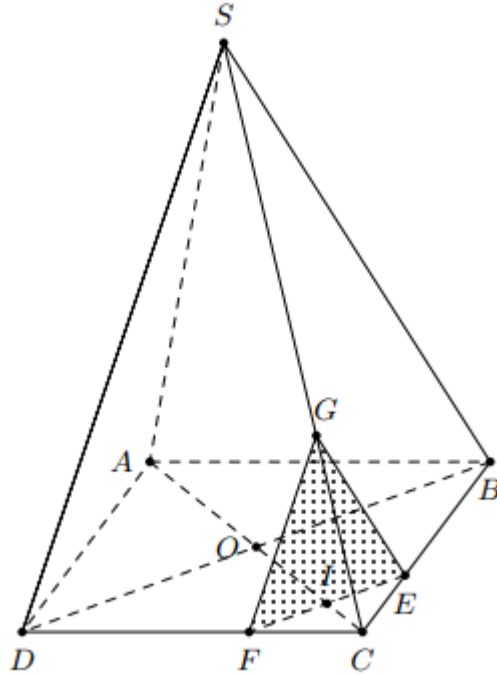
Để $(MNP) // (A'BC')$ thì cần $MS // A'B$ suy ra $\frac{AM}{AO} = \frac{AS}{AA'}$ mà $\begin{cases} \frac{AM}{AO} = 2 \cdot \frac{AM}{AB'} = 2x \\ \frac{AS}{AA'} = 1 - x \end{cases}$.

Do đó ta có $2x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O và $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD đều. Gọi (P) là mặt phẳng đi động đi qua điểm I trên đoạn OC , song song với (SBD) . Đặt $AI = x \left(\frac{a}{2} < x < a \right)$, cắt các cạnh BC, CD, SC lần lượt tại E, F, G . Diện tích tam giác EFG bằng

- A. $\frac{b^2(a-x)^2\sqrt{2}}{a^2}$ B. $\frac{b^2(a+x)^2\sqrt{3}}{a^2}$ C. $\frac{b^2(a+x)^2}{a^2\sqrt{3}}$ **D. $\frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.**

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (P) \cap (ABCD) = EF \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases} \Rightarrow EF \parallel BD \text{ suy ra } \frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \begin{cases} EG \parallel SB \Rightarrow \frac{EG}{SB} = \frac{CE}{CB} \\ GF \parallel SD \Rightarrow \frac{GF}{SD} = \frac{CF}{CD} \end{cases} \text{ suy ra } \frac{EF}{BD} = \frac{EG}{SB} = \frac{GF}{SD}.$$

Lại do $SB = SD = BD$ nên $EG = GF = EF$ hay tam giác GEF đều.

$$\text{Ta có } \frac{EF}{BD} = \frac{CI}{CO} \Rightarrow EF = \frac{CI}{CO} \cdot BD = \frac{2(a-x)}{a} \cdot b.$$

$$\text{Vậy } S_{GEF} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{b^2 \cdot (a-x)^2 \sqrt{3}}{a^2}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song nhau, nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

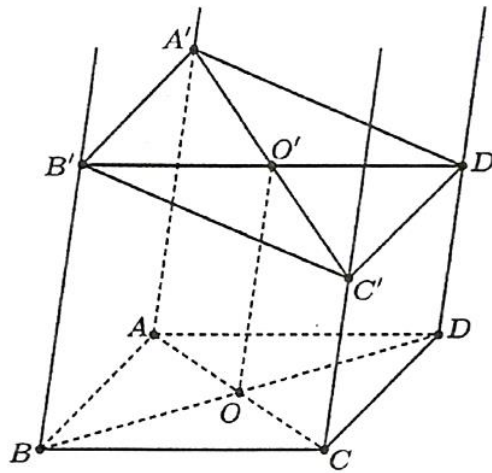
a) Mặt phẳng (AA', BB') song song với mặt phẳng (CC', DD') .

b) $A'B' \parallel C'D'$

c) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang

d) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó $OO' \parallel AA'$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $AA' \parallel DD'$ và $AB \parallel CD$ nên $mp(AA', BB') \parallel mp(CC', DD')$.

b) Đúng: Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} mp(AA', BB') \parallel mp(CC', DD') \\ (Q) \cap mp(AA', BB') = A'B' \\ (Q) \cap mp(CC', DD') = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel C'D' \quad (1)$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $A'D' \parallel B'C'$ (2)

c) Sai: Từ (1) và (2) suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

$$\text{d) Đúng: Ta có } \begin{cases} (ACC'A') \cap (BDD'B') = OO' \\ AA' \subset (ACC'A'), BB' \subset (BDD'B') \Rightarrow OO' \parallel AA' \parallel BB' \text{ hay } OO' \parallel AA'. \\ AA' \parallel BB' \end{cases}$$

Câu 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

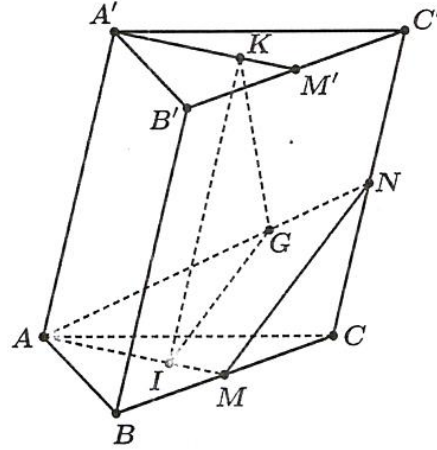
a) $AMM'A'$ là hình bình hành

b) $\frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{1}{3}$

c) Mặt phẳng (IKG) cắt $(BCC'B')$

d) $(A'KG) \parallel (AIB')$.

Lời giải



MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên

a) Đúng: $\begin{cases} MM' \parallel BB' \\ MM' = BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM' \parallel AA' \\ MM' = AA' \end{cases} \Rightarrow AMM'A' \text{ là hình bình hành}$

Vì I, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ nên

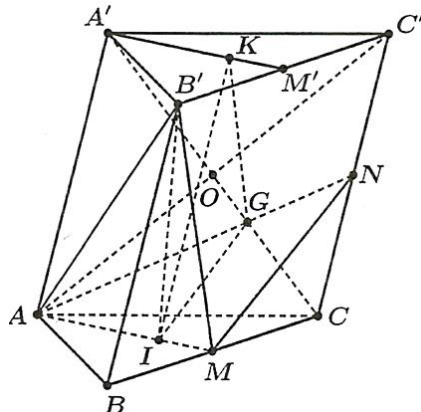
$IM = KM' = \frac{1}{3} A'M' = \frac{1}{3} AM$, mà $IM \parallel KM'$ nên $IKM'M$ là hình bình hành.

Suy ra $IK \parallel MM', MM' \subset (BCC'B') \Rightarrow IK \parallel (BCC'B')$. (1)

b) Sai: Gọi N là trung điểm của CC' tam giác AMN có $\frac{AI}{AM} = \frac{AG}{AN} = \frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm)

Suy ra $IG \parallel MN$ mà $MN \subset (BCC'B')$ nên $IG \parallel (BCC'B')$ (2)

c) Sai: Từ (1) và (2) suy ra $(IKG) \parallel (BCC'B')$.



Vì $(A'KG) \equiv (A'M'C'), (AIB') \equiv (AMB')$ ta cần chứng minh $(A'M'C') \parallel (AMB')$.

Để thấy $AMM'A'$ là hình bình hành nên $AM \parallel A'M'$ mà $A'M' \subset (A'M'C)$ nên $AM \parallel (A'M'C)$
(3)

Ta có: $\begin{cases} CM \parallel B'M' \\ CM = B'M' \end{cases} \Rightarrow CMB'M'$ là hình bình hành

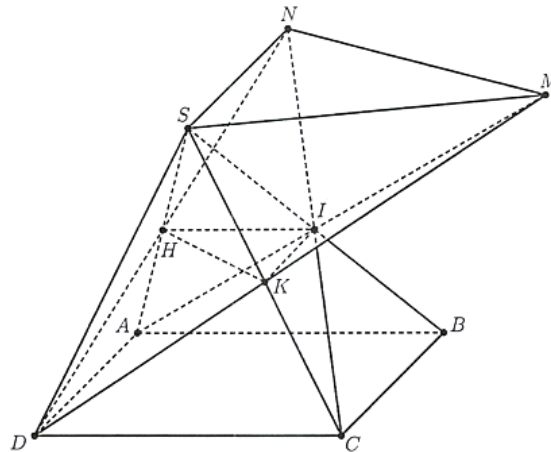
Suy ra $B'M \parallel CM', CM' \subset (A'M'C) \Rightarrow B'M \parallel (A'M'C)$. (4)

d) Đúng: Từ (3) và (4) suy ra $(A'M'C) \parallel (AMB')$ hay $(A'KG) \parallel (AIB')$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Gọi M là giao điểm của AI và KD , N là giao điểm của DH và CI . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- $HI \parallel (ABCD)$
- $(HIK) \parallel (ABCD)$.
- SM và HI chéo nhau
- (SMN) cắt (HIK)

Lời giải



a) Đúng: Vì HI là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $HI \parallel AB$ mà $AB \subset (ABCD)$

$\Rightarrow HI \parallel (ABCD)$ (1)

b) Đúng: Tương tự ta có: $KI \parallel BC, BC \subset (ABCD) \Rightarrow KI \parallel (ABCD)$ (2)

Mặt khác: $HI \subset (HKI), KI \subset (HKI), HI \cap KI = I$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(HIK) \parallel (ABCD)$.

c) Sai: $\begin{cases} M \in AI, AI \subset (SAB) \\ M \in DK, DK \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow SM = (SAB) \cap (SCD)$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = SM \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \Rightarrow SM \parallel AB \parallel CD \Rightarrow SM \parallel HI \text{ (1)} \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} N \in DH, DH \subset (SAD) \\ N \in CI, CI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow SN = (SAD) \cap (SBC)$$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = SN \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \Rightarrow SN \parallel AD \parallel BC \Rightarrow SN \parallel KI \text{ (2)} \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

Mặt khác ba điểm S, M, N không thẳng hàng (3)

d) Đúng: Từ (1), (2), (3) suy ra $(SMN) \parallel (HIK)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $MN \parallel (SBC)$

b) $(OMN) \parallel (SBC)$.

c) Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON . Khi đó EF cắt với mặt phẳng (SBC) .

d) Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD . Khi đó GN cắt (SAB)

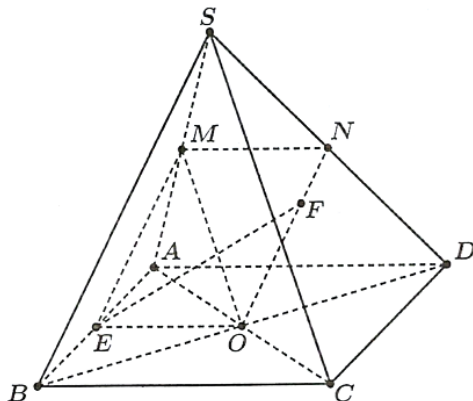
Lời giải

a) Đúng: Vì MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN \parallel AD \Rightarrow MN \parallel BC$

$$\Rightarrow MN \parallel (SBC) \text{ (1)}$$

b) Đúng: Tương tự ta có O, N theo thứ tự là trung điểm của BD, SD nên ON là đường trung bình của tam giác $SBD \Rightarrow ON \parallel SB \Rightarrow ON \parallel (SBC) \text{ (2)}$

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

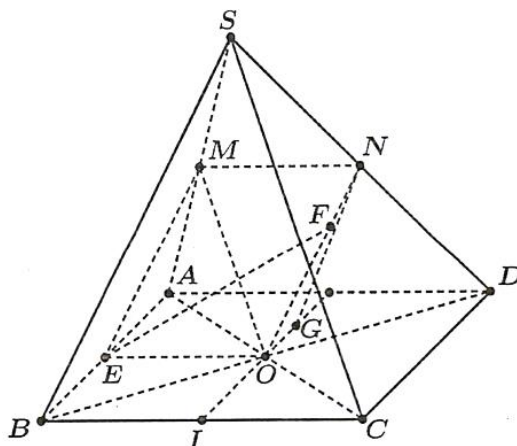


c) Sai: Ta có OE là đường trung bình của tam giác ABD nên $OE \parallel AD \Rightarrow OE \parallel MN$.

Do đó $E \in (OMN)$ mà $F \in ON, ON \subset (OMN) \Rightarrow F \in (OMN)$.

Ta có: $\begin{cases} EF \subset (OMN) \\ (OMN) \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel (SBC)$.

d) Sai: Vì G thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ và cách đều AB, CD nên G thuộc đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ (ứng với hai cạnh AB, CD).



Gọi I là trung điểm BC thì I, O, G thẳng hàng.

Ta có OI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $OI \parallel AB \Rightarrow OI \parallel (SAB)$ (3)

Tương tự ta có $ON \parallel SB \Rightarrow ON \parallel (SAB)$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $(OIN) \parallel (SAB)$ mà $NG \subset (OIN)$ nên $NG \parallel (SAB)$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD, B'D'C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

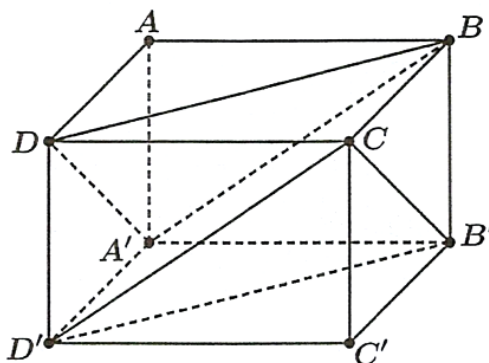
a) $A'D'CB$ là hình bình hành

b) $(A'BD) \parallel (B'D'C)$

c) G_1, G_2 cùng thuộc AC'

d) $G_1G_2 = \frac{2}{3}AC'$

Lời giải



a) Đúng: Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\begin{cases} A'D' \parallel BC \\ A'D' = BC \end{cases} \Rightarrow A'D'CB$ là hình bình hành.

Suy ra $A'B \parallel CD' \Rightarrow A'B \parallel (B'D'C)$ (1)

Tương tự ta có: $\begin{cases} A'B' \parallel CD \\ A'B' = CD \end{cases} \Rightarrow A'B'CD$ là hình bình hành.

Suy ra $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'D \parallel (B'D'C)$ (2)

b) Đúng: Từ (1) và (2) suy ra $(A'BD) \parallel (B'D'C)$.

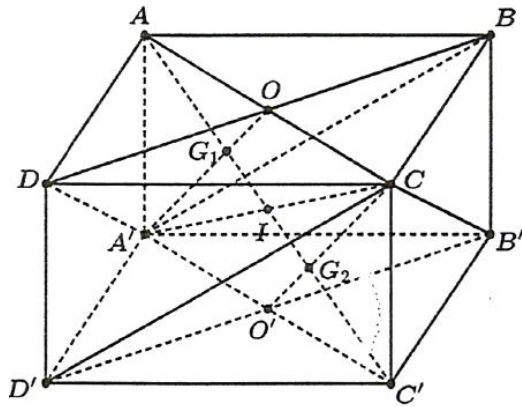
c) Đúng: Gọi O, O', I theo thứ tự là tâm của các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ACC'A'$.

Vì G_1 là trọng tâm tam giác $AB'D$ nên $\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1$ là trọng tâm tam giác $A'AC$ nên suy ra $G_1 = AI \cap A'O$ (3)

Tương tự, G_2 là trọng tâm tam giác $B'D'C$ nên $\frac{CG_2}{CO'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow G_2$ là trọng tâm tam giác $A'C'C$ suy ra $G_2 = C'I \cap CO'$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra G_1, G_2 cùng thuộc AC' .



Ta có: $\frac{AG_1}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG_1}{AC'} = \frac{1}{3}; \frac{C'G_2}{C'I} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{C'G_2}{AC'} = \frac{1}{3}$.

d) Sai: Do vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \frac{1}{3}AC'$.

Vậy G_1, G_2 cùng thuộc AC' , đồng thời chia AC' thành ba phần bằng nhau.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm $\triangle ABE$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF) . Gọi N là giao điểm của (P) và AC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

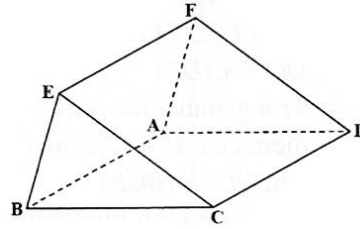
a) $EFDC$ là hình thang

b) $FD \parallel EC$

c) $(ADF) \parallel (BCE)$.

d) $\frac{AN}{NC} = 3$

Lời giải

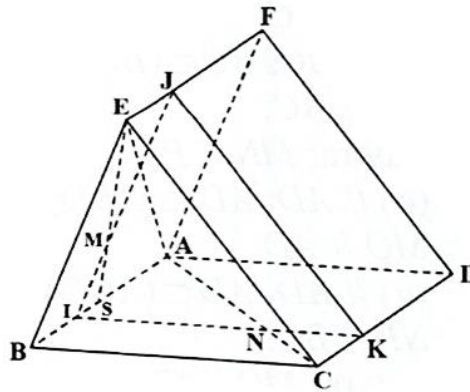


a) Sai: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} EF \parallel CD (\parallel AB) \\ EF = CD (= AB) \end{cases} \Rightarrow EFDC \text{ là hình bình hành} \Rightarrow FD \parallel EC$.

c) Đúng: Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC; AF \parallel BE \\ AD, AF \subset (ADF); AD \cap AF = A \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE) \\ BC, BE \subset (BCE); BC \cap BE = B \end{cases}$

d) Sai: Tính $\frac{AN}{NC}$.



Vẽ mặt phẳng (P) chứa M và $(P) \parallel (ADF)$ cắt AB, AC, CD, EF lần lượt tại I, N, K, J .

Ta có: $\frac{AI}{BI} = \frac{AN}{NC} (IN \parallel BC)$ và $\frac{EJ}{IS} = \frac{ME}{MS} = 2 (IS \parallel JE)$

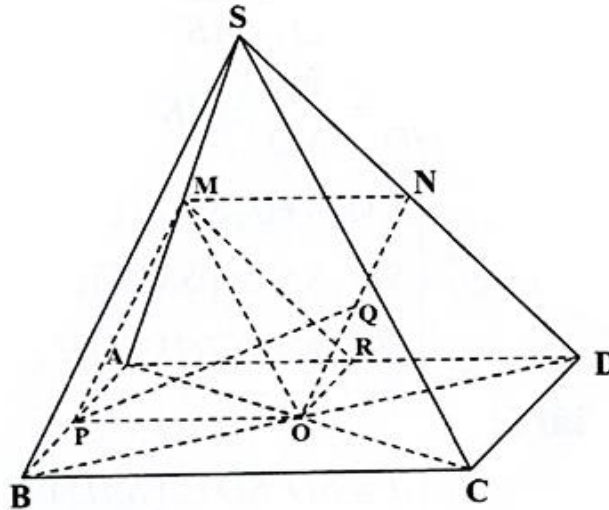
Mặt khác: $BI = EJ$ (tứ giác $BIJE$ là hình bình hành)

$$\Rightarrow \frac{BI}{IS} = 2 \Rightarrow \frac{BI}{2} = \frac{IS}{1} = \frac{BI + IS}{2 + 1} = \frac{BS}{3} \Rightarrow BI = \frac{2}{3}BS; IS = \frac{1}{3}BS$$

$$\text{Ta có: } AI = AS + IS = BS + \frac{1}{3}BS = \frac{4}{3}BS \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{\frac{4}{3}BS}{\frac{2}{3}BS} = 2 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = 2$$

- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
- ON chéo nhau với SB
 - $(OMN) \parallel (SBC)$.
 - Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON . Khi đó PQ cắt (SBC)
 - Gọi R là trung điểm AD . Khi đó $(MOR) \parallel (SCD)$.

Lời giải



a) Sai: Ta có $OM \parallel SC$ (đường trung bình tam giác SAC). Ta có $ON \parallel SB$ (đường trung bình tam giác SBD).

b) Đúng: Ta có
$$\begin{cases} ON \parallel SB; OM \parallel SC \\ OM, ON \subset (OMN), OM \cap ON = O \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC) \\ SB, SC \subset (SBC), SB \cap SC = S \end{cases}$$

c) Sai: Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và ON . Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$

Ta có
$$\begin{cases} OP \parallel AB \\ AB \parallel MN \end{cases} \Rightarrow OP \parallel MN \Rightarrow OMPN \text{ là hình thang} \Rightarrow P \in (OMN).$$

Ta có
$$\begin{cases} NP \subset (OMN) \\ (OMN) \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel (SBC)$$

d) Đúng: Gọi R là trung điểm AD . Chứng minh $(MOR) \parallel (SCD)$.

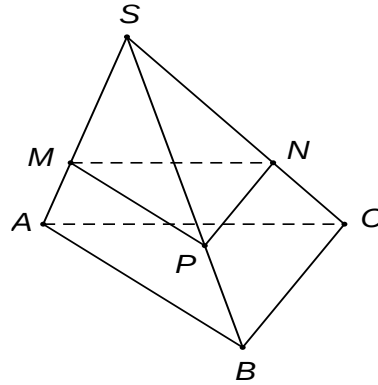
Ta có $OR \parallel CD$ (đường trung bình của tam giác ACD)

Ta có
$$\begin{cases} OM \parallel SC \\ OR \parallel CD \\ OM, OR \subset (MOR), OM \cap OR = O \Rightarrow (MOR) \parallel (SCD) \\ SC, SD \subset (SCD), SC \cap SD = S \end{cases}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $BAC = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Gọi P là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SC . Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

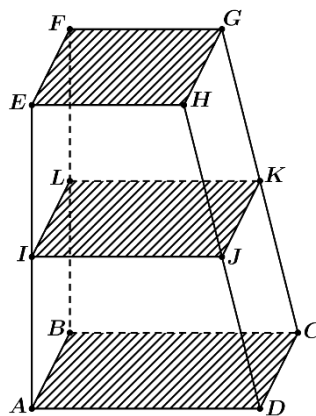


Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 4$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC .

Vì $(P) \parallel (ABC)$ nên theo định lí Talet ta có : $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

Câu 2: Một kệ đồ gỗ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 100$ cm, $CG = 120$ cm và muốn đóng thêm mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên, tầng dưới và $EI = 42$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng KG



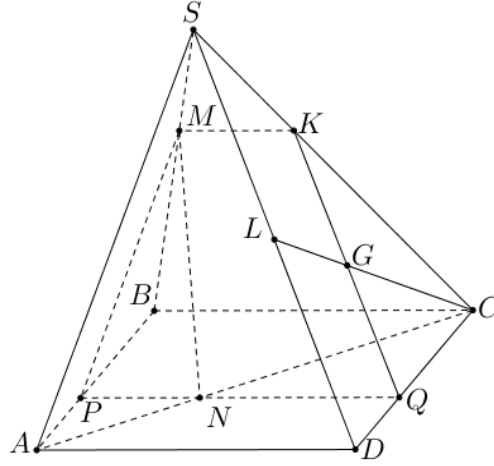
Lời giải

Áp dụng định lý Thales trong không gian, ta có $\frac{KG}{EI} = \frac{GC}{EA} \Leftrightarrow KG = \frac{42 \cdot 120}{100} = 50,4$

Vậy $KG = 50,4$ cm.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, AC sao cho $\frac{BM}{MS} = \frac{CN}{NA} = x, (0 < x \neq 1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tìm x để $(MNG) \parallel (SAD)$.

Lời giải



Gọi các giao điểm của (MNG) với các cạnh hình chóp như hình vẽ.

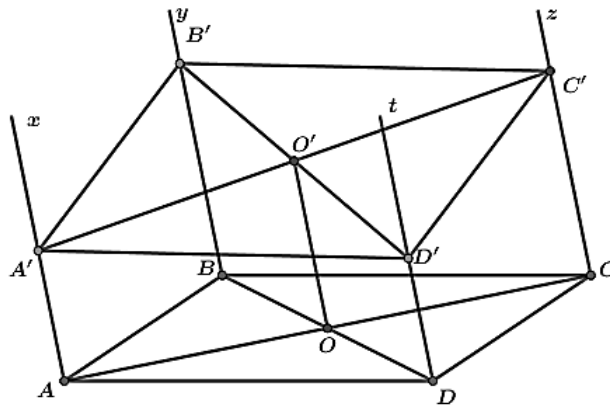
Ta có $\frac{BM}{MS} = \frac{CN}{NA} = x, (0 < x \neq 1)$ nên BC, MN, SA lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MN \parallel (SAD), \forall x \in (0 < x \neq 1)$. Do đó

$$(MNG) \parallel (SAD) \Leftrightarrow NQ \parallel AD \Leftrightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{QC}{QD} \Leftrightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{GC}{GL} = 2.$$

Vậy với $x = 2$ thì $(MNG) \parallel (SAD)$.

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA' = 3, BB' = 5, CC' = 4$. Tính DD' .

Lời giải



Do (P) cắt mặt phẳng (Ax, By) theo giao tuyến $A'B'$; cắt mặt phẳng (Cz, Dt) theo giao tuyến $C'D'$, mà hai mặt phẳng (Ax, By) và (Cz, Dt) song song nên $A'B' // C'D'$.

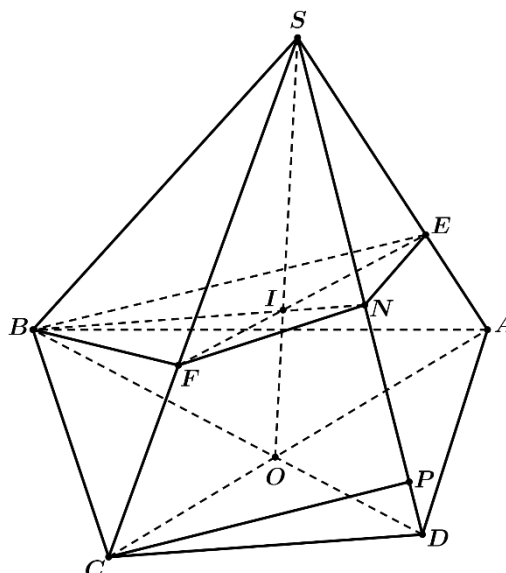
Tương tự có $A'D' // B'C'$ nên $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Gọi O, O' lần lượt là tâm $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Dễ dàng có OO' là đường trung bình của hai hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$ nên $OO' = \frac{AA' + CC'}{2} = \frac{BB' + DD'}{2}$.

Từ đó ta có $DD' = 2$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB // CD$ và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy E thuộc cạnh SA , F thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (BEF) . Gọi P là giao điểm của SD với (α) . Tính tỉ số $\frac{SP}{SD}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Vì $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ nên đường thẳng $EF // AC$. Mà $EF \subset (BEF)$, $AC \not\subset (BEF)$ nên AC song song với mặt phẳng (BEF) .

Vì AC qua O và song song với mặt phẳng (BEF) nên $AC \subset (\alpha)$.

Trong (SAC) , gọi $I = SO \cap EF$, trong (SBD) , gọi $N = BI \cap SD$. Suy ra N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (BEF) .

Hai mặt phẳng song song (BEF) và (α) bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba là (SCD) theo hai giao tuyến lần lượt là FN và Ct nên hai giao tuyến đó song song nhau, tức là $Ct // FN$.

Trong (SCD) , Ct cắt SD tại P . Khi đó P là giao điểm của SD với (α) .

Trong hình thang $ABCD$, do $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$ nên $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD} = 2 \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$.

Trong tam giác SAC , có $EF \parallel AC$ nên $\frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IS}{IO} = 2$.

Xét tam giác SOD với cát tuyến NIB , ta có: $\frac{NS}{ND} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{NS}{ND} = \frac{BO}{BD} \cdot \frac{IS}{IO} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.

Suy ra: $\frac{SN}{SD} = \frac{4}{7}$ và ta lại có $\frac{SN}{SP} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ nên suy ra $\frac{SP}{SD} = \frac{6}{7} \approx 0,86$.

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên ba cạnh AA', BB', CC' , sao cho $AM = \frac{1}{2}AA', BN = \frac{1}{3}BB', CP = \frac{1}{4}CC'$. Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng DD' . Khi đó tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

Lấy M', N' lần lượt trên các cạnh DD' và CC' sao cho $M'D = MA, N'C = NB$.

Ta có:
$$\begin{cases} (ABB'A') \parallel (CDD'C') \\ (\alpha) \cap (ABB'A') = MN \Rightarrow MN \parallel PQ \\ (\alpha) \cap (CDD'C') = PQ \end{cases}$$

Khi đó: $D'Q = D'M' + QM' = \frac{DD'}{2} + (N'C - PC) = \frac{DD'}{2} + \left(\frac{DD'}{3} - \frac{DD'}{4} \right) = \frac{7DD'}{12}$

Vậy $\frac{D'Q}{DD'} = \frac{7}{12} \approx 0,58$.

-----HẾT-----