

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số liên tục tại một điểm

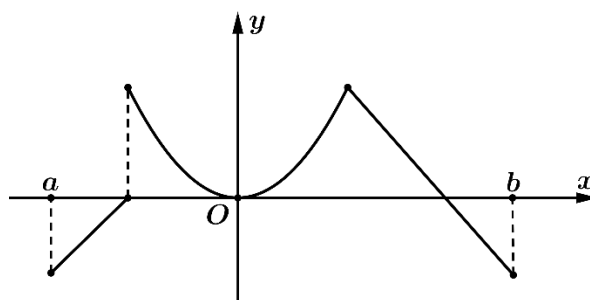
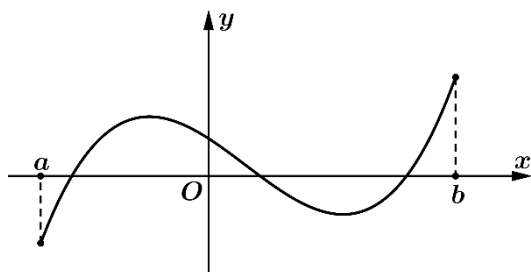
Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

2 Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chú ý: Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a; b]$; $[a; b)$; $(-\infty; b]$; $[a; +\infty)$ được định nghĩa một cách tương tự. Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó.



3 Một số định lý

Định lý 1:

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên tập xác định của nó.

Định lý 2: Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ cũng liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Bước 3: So sánh và rút ra kết luận.

- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 .
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0 .

Đối với bài toán có chứa tham số thì ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Bước 3: So sánh và rút ra kết luận.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

Từ đó tìm được tham số thỏa yêu cầu.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ tại điểm $x_0 = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -6 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -2$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 9 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{khi } x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$

f) $f(x) = \frac{2}{x - 1}$ tại điểm $x_0 = 2$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

$$h) f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \quad \text{tại điểm } x_0 = 1$$

Lời giải

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ và $x_0 \in (2; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } f(3) = \frac{1}{5} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{9 - 4} = \frac{1}{5} = f(3).$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

b) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và có $f(-2) = -6$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)} (x - 3) = -5 \neq f(-2).$$

Vậy hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại $x = -2$.

c) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f(3) = 9; \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 = f(3).$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$

d) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$ và có $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x + 1) = -2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 4x + 3) = 0$$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x_0 = 3$.

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$e) \text{ Ta có: } f(1) = -\frac{1}{2} \text{ và có } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -\frac{1}{2}$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.

f) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x - 1} = 1 = f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

g) Ta có $f(0) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$.

Ta có: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

h) Ta có $f(1) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{2} = -\frac{1}{2} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 2}{x + 1} = -\frac{1}{2}$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \neq 7 \\ 5a + 1 & \text{khi } x = 7 \end{cases}$

a) Với $a = 0$ hãy xét tính liên tục của hàm số tại $x = 7$.

b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 7$?

Lời giải

a) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\square$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} (-3x^2 + 2x + 1) = -3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 = -125$ và $f(7) = 5a + 1 = 1$

Vì $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) \neq f(7)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 7$ khi $a = 0$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} (-3x^2 + 2x + 1) = -3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1 = -125$ và $f(7) = 5a + 1$

Hàm số liên tục tại $x = 7 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7) \Leftrightarrow 5a + 1 = -125 \Leftrightarrow a = -\frac{126}{5}$

Bài tập 3: Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - m) = 8 - m$ và $f(2) = 2 + m$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow 8 - m = m + 2 \Leftrightarrow m = 3$

Bài tập 4: Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 3)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 3) = -4$

Và $f(-1) = m^2 + 5m$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = -1 \Leftrightarrow m^2 + 5m = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$

Bài tập 5: Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x + 5} - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{4x+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{(x+1)(\sqrt{4x+5}+3)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2m+3$$

$$\text{Để hàm số gián đoạn tại } x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 2m+3 \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq \frac{-4}{3}$$

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x > 1 \\ x^2 + 3 & \text{khi } x < 1 \\ k^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(1) = k^2$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)^2 = 4 \text{ suy ra } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

$$\text{Vậy để hàm số gián đoạn tại } x = 1 \text{ khi } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow k^2 \neq 4 \Leftrightarrow k \neq \pm 2.$$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm

số gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

$$\text{Hàm số gián đoạn tại } x = 1 \text{ khi } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \neq 3m$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \neq 3m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \neq 3m \Leftrightarrow 3 \neq 3m \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 14a.x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(1) = 14a \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 14ax = 14a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^6 - (8-4x)}{(x-1)(2x^3 + \sqrt{8-4x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8)}{(x-1)(2x^3 + \sqrt{8-4x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8}{2x^3 + \sqrt{8-4x}} = 7.$$

$$f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 1 \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 14a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3x + a}$$

$$\text{Nếu } a = -3 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{3} = 1 > 0 \text{ và } f(1) = 0$$

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

$$\text{Nếu } a \neq -3 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3x + a} = 0, \text{ nhưng } f(1) = 3 + a \neq 0$$

Nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 10: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{x^3 - 3x + 1}{x + 2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(0) = m + \frac{1}{2} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) + (1 - \sqrt[3]{1+x})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \sqrt[3]{1+x})[1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2]}{x[1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - (1+x)}{x[1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{x^3 - 3x + 1}{x + 2} \right) = m + \frac{1}{2}$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$$

Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn, tập xác định

Phương pháp: Hàm số $f(x)$ liên tục trên một đoạn, khoảng hoặc tập xác định nếu nó liên tục tại mọi điểm trên đoạn, khoảng hoặc tập xác định đó.

Lưu ý:

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ khi hàm số đó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và thỏa mãn điều kiện: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$
- Hàm số đa thức thường có tính chất liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức hữu tỉ, hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài tập 1:** Xét tính liên tục của hàm số sau:

a) $y = x^2 - 2x + \sin 2x$

b) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 3}$

c) $y = \sqrt{4-x}$

Lời giải

a) Ta thấy $x^2 - 2x$ là hàm đa thức và $\sin 2x$ là hàm số lượng giác có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên hàm số $y = x^2 - 2x + \sin 2x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Điều kiện $2x^2 + x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -\frac{3}{2} \end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; 1 \right\}$.

Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 3}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên hàm số liên tục trên từng khoảng xác định

là: $\left(-\infty; -\frac{3}{2} \right); \left(-\frac{3}{2}; 1 \right)$ và $(1; +\infty)$.

c) Tập xác định $D = (-\infty; 4]$ nên hàm số $y = \sqrt{4-x}$ liên tục trên $(-\infty; 4]$.

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của nó.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} & \text{khi } x < 2 \\ 2 - x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Trên $(-\infty; 2)$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16}$ xác định nên hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Trên $(2; +\infty)$ thì $f(x) = 2 - x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 3}{2(x^2 + 2x + 4)} = \frac{-1}{24} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại $x = 2$.

Do đó hàm số bị gián đoạn tại $x = 2$.

Vậy hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. Hàm số bị gián đoạn tại $x = 2$.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|}$ xác định nên hàm số liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x - 2)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x) = 1$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại $x = 1$.

Vậy hàm số liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Hàm số bị gián đoạn tại $x = 1$.

Bài tập 3: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Trên $(-\infty; -2); (-2; +\infty)$, hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ xác định nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4.$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = -2$ thì $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Leftrightarrow m = -4$.

Bài tập 4: Tìm giá trị tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ mx & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 1$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx) = m \text{ và } f(1) = m.\end{aligned}$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

Bài tập 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{5x-7}+3}{4-\sqrt{4-3x}} & \text{khi } x < -4 \\ |mx| - \frac{41}{81} & \text{khi } x \geq -4 \end{cases}$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -4)$ và $(-4; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -4$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt[3]{5x-7}+3}{4-\sqrt{4-3x}} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{5(x+4)(4+\sqrt{4-3x})}{\left((\sqrt[3]{5x-7})^2 - 3\sqrt[3]{5x-7} + 9\right)3(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{5(4+\sqrt{4-3x})}{\left((\sqrt[3]{5x-7})^2 - 3\sqrt[3]{5x-7} + 9\right)3} = \frac{40}{81}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(|mx| - \frac{41}{81}\right) = |4m| - \frac{41}{81} \text{ và } f(-4) = |4m| - \frac{41}{81}.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = -4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = f(-4) \Leftrightarrow |4m| - \frac{41}{81} = \frac{40}{81} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{4}$$

Dạng 3: Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp: Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D thì ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D thì ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1}) (i = 1, 2, \dots, k)$ nằm trong $D: f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x - 7$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $[0; 2]$.

Ta có $f(0) = -7, f(2) = 19$ nên $f(0) \cdot f(2) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Bài tập 2: Chứng minh rằng phương trình $\cos x = x$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \cos x - x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ nên $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập 3: Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có nghiệm dương.

Lời giải

Ta có $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 6x + 1} = 2 \Leftrightarrow x^3 + 6x + 1 = 4 \Leftrightarrow x^3 + 6x - 3 = 0$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 6x - 3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $[0; 1]$.

Ta có $f(0) = -3, f(1) = 4$ nên $f(0) \cdot f(1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Vậy phương trình $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

Bài tập 4: Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $[-1; 0]$.

Ta có $f(0) = -1$, $f(-1) = m^2 + 1$ nên $f(0) \cdot f(-1) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$.

Vậy phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Bài tập 5: Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục trên $[-2; -1]$.

Ta có $f(-1) = -1$, $f(-2) = m^2 + 2$ nên $f(-2) \cdot f(-1) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2; -1)$.

Vậy phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Bài tập 6: Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 2x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - 31x + 10$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$.

$\begin{cases} f(-3) = -32 \\ f(0) = 10 \end{cases} \Rightarrow f(-3) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-3; 0)$.

$\begin{cases} f(0) = 10 \\ f(1) = -12 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

$\begin{cases} f(1) = -12 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(1; 2)$.

Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên $f(x) = 0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Bài tập 7: Chứng minh rằng phương trình $a \cos 2x + b \sin x + \cos x = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b

Lời giải

Đặt $f(x) = a \cos 2x + b \sin x + \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(0) = a + 1; f(\pi) = a - 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a + b; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a - b$.

Vì $f(0) + f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ nên trong bốn số phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b .

Bài tập 8: Chứng minh rằng phương trình $a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm trên $[0; 2\pi]$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Nên cũng liên tục trên các đoạn $[0; 2\pi]$

$$f(0) = a + b + c, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b + 1, f(\pi) = -a + b - c, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -b - 1$$

Suy ra $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ nên suy ra nếu không có giá trị nào trong bốn giá trị bằng 0 thì ít nhất có một giá trị âm và dương.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài tập 9: Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải

Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m\sin x \cos x$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.

Bài tập 10: Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{m}{x+3} = 0$ luôn có nghiệm $\forall m$

Lời giải

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{m}{x+3} = 0 \Leftrightarrow mx + (x-2)(x+3)(x^3 + x + 1) = 0 (*)$$

Đặt $f(x) = mx + (x-2)(x+3)(x^3 + x + 1)$.

Nhận xét f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\begin{cases} f(-3) \cdot f(0) = 18m \\ f(0) \cdot f(2) = -12m \end{cases}$

Trường hợp 1: Nếu $m = 0$, phương trình luôn có 1 nghiệm $x = 2$

Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0 \Rightarrow (*)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-3; 0)$ hoặc $(0; 2)$

Suy ra: $\forall m \in \mathbb{R}$, luôn có ít nhất một nghiệm thuộc D .

Vậy $\forall m \in \mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại $x=2$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Khi đó ta phải gán $f(2)$ bằng bao nhiêu?

- A. $f(2) = -4$. B. $f(2) = -1$. C. $f(2) = 1$. **D. $f(2) = 4$.**

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Suy ra $f(2) = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $f(0) = 0$. **B. $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.**
C. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$.

Lời giải

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 0^2 + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{hàm số gián đoạn tại } x_0 = 0.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số liên tục tại $x=2$.** B. Hàm số gián đoạn tại $x=2$.
C. $f(4) = 2$. D. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $f(2) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2}+2) = 4 = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \\ x + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x=0$.**
B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.
C. Hàm số đã cho liên tục tại $x=0$.
D. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 - 1) = -1 \neq f(0)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 = f(0)$.

Do đó hàm số f gián đoạn tại $x = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 2 & \text{khi } x < 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ x + 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Hàm số không có giới hạn tại $x = 1$ và không liên tục tại $x = 1$.
- B. Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ và liên tục tại $x = 1$.
- C. Hàm số không có giới hạn tại $x = 1$ nhưng liên tục tại $x = 1$.
- D.** Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $\begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 - x + 2) = 3 \end{cases}$

Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ -3 & \text{khi } x = 2 \\ 1-2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** Hàm số không có giới hạn tại $x = 2$ và không liên tục tại $x = 2$.
- B. Hàm số có giới hạn tại $x = 2$ và liên tục tại $x = 2$.
- C. Hàm số không có giới hạn tại $x = 2$ nhưng liên tục tại $x = 2$.
- D. Hàm số có giới hạn tại $x = 2$ nhưng không liên tục tại $x = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $\begin{cases} f(2) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-(x+2)) = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-2x) = -3 \end{cases}$

Suy ra hàm số không có giới hạn tại $x = 2$ và không liên tục tại $x = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

gián đoạn tại $x = 1$.

A. $m \neq -2$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m \neq 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3.$$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow m \neq 3$.

- Câu 8:** Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} & \text{khi } x > 4 \\ 3x + m & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại $x=4$ khi m nhận giá trị là
- A. -20. **B.** 20. C. -44. D. 44.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x + m) = 12 + m = f(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} [(x+4)(\sqrt{x} + 2)] = 32.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=4$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 12 + m = 32 \Leftrightarrow m = 20.$$

- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $f(1)$ không tính được. B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
- C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **D.** $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải

Ta có: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \text{ và } f(1) = 2.$$

Suy ra hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ x + 2021 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **ĐÚNG**?

- A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ B. Hàm số gián đoạn tại $x=3$
- C.** Hàm số gián đoạn tại $x=0$ D. Hàm số gián đoạn tại $x=1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x} + 1} = 1$$

$$\neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2021) = 2021.$$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 0$

Câu 11: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x + \frac{1}{x}$. **B.** $y = \sqrt{2-x}$. **C.** $y = \frac{2x+1}{x-7}$. **D.** $y = x + 7$.

Lời giải

Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

Câu 12: Hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}$ liên tục trên

A. $(3;10)$ **B.** $[-3;4]$ **C.** $[-3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;4]$

Lời giải

Tập xác định của hàm số $[-3;4]$.

Vì với mọi $x_0 \in (-3;4)$ ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-3;4)$. Ngoài ra ta có:

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (\sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}) = \sqrt{7} = f(-3) \text{ nên hàm số liên tục phải tại } x = -3$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow (4)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (4)^-} (\sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}) = \sqrt{7} = f(4) \text{ nên hàm số liên tục trái tại } x = 4.$$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-3;4]$.

Câu 13: Hàm số $y = \frac{5}{x(x^2-1)}$ liên tục tại điểm nào sau đây?

A. $x = 0$. **B.** $x = \sqrt{2}$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{5}{x(x^2-1)}.$$

$$\text{Hàm số } y = \frac{5}{x(x^2-1)} \text{ xác định khi } \begin{cases} x \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta thấy } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{5}{x(x^2-1)} = \frac{5}{\sqrt{2}(2-1)} = \frac{5\sqrt{2}}{2}; \quad f(\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{5}{x(x^2-1)} = f(\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra hàm số liên tục tại $x = \sqrt{2}$.

Câu 14: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m+2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

A. $m = 3$.

B. $m = 0$.

C. $m = 4$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \Rightarrow x_0 = 1 \in D$.

Ta có: $f(1) = m + 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow m + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Xác định số thực a để hàm số liên tục tại điểm

$x = 1$.

A. $a = -1$.

B. $a = 1$.

C. $a = 3$.

D. $a = -3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(1) = a + 1$

và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+1) = a+1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3) = -2$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a+1 = -2 \Leftrightarrow a = -3$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ a+2 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để

hàm số liên tục tại $x_0 = 4$.

A. $a = 3$.

B. $a = -\frac{15}{8}$.

C. $a = 2$.

D. $a = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+8}) \cdot (\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x+8})}{(x-4) \cdot (\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x+8})}$

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x+8})} = \frac{1}{8}$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 4 \Leftrightarrow f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Leftrightarrow a+2 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a = -\frac{15}{8}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên

tục tại $x = 2$.

A. $m = \frac{17}{2}$.

B. $m = \frac{15}{2}$.

C. $m = \frac{13}{2}$.

D. $m = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2) = 2m + 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m + 1 = 12 \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{khi } x > 1 \\ -x^2 + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

B. Hàm số liên tục tại $x = 1$.

C. Hàm số gián đoạn trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(0; 3)$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + 1) = 0$

Suy ra: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x} & \text{khi } x > 1 \\ ax + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 1$.

A. -3 .

B. 3 .

C. -1 .

D. 0 .

Lời giải

Xét $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{5x-1} - 2 + 2 - \sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x}$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{5x-1} - 2}{1-x} + \frac{2 - \sqrt[3]{x^2+x+6}}{1-x} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{5x-5}{(1-x)(\sqrt{5x-1}+2)} + \frac{8-(x^2+x+6)}{(1-x)\left(4+2\sqrt[3]{x^2+x+6}+(\sqrt[3]{x^2+x+6})^2\right)} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{-5}{(\sqrt{5x-1}+2)} + \frac{x+2}{4+2\sqrt[3]{x^2+x+6}+(\sqrt[3]{x^2+x+6})^2} \right) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 2) = a + 2 \text{ và } f(1) = a + 2$$

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 2 = -1 \Leftrightarrow a = -3$.

Câu 20: Gọi a là giá trị để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x} - x - 2\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } 0 < x \leq 4 \\ a + \frac{4-x}{x-2}, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$. Khẳng

định nào sau đây đúng?

A. $a \in \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. **B.** $a \in \left(-1; -\frac{3}{5}\right)$. **C.** $a \in \left(0; \frac{2}{5}\right)$. **D.** $a \in \left(-\frac{2}{5}; 0\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4-x} - x - 2\sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{4-x} - 2\sqrt{1+x}}{x} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4-x-4-4x}{x(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1+x})} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-5x}{x(\sqrt{4-x}+2\sqrt{1+x})} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-5}{\sqrt{4-x}+2\sqrt{1+x}} - 1 \right) = -\frac{9}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(a + \frac{4-x}{x-2} \right) = a - 2 \text{ và } f(0) = a - 2.$$

Hàm số liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a - 2 = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$

Vậy $a \in \left(-\frac{2}{5}; 0\right)$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x = 2$.

B. Hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

C. $f(4) = 2$.

D. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+2}+2) = 4 \text{ và } f(2) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x^2-3x+2}$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

Hàm số có nghĩa khi $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Vậy theo định lí ta có hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x^2+3x+2}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1); (1; 2)$ và $(2; +\infty)$

Câu 23: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = |x|$. B. $y = \frac{x}{x-1}$. C. $y = \sin x$. D. $y = \frac{x}{|x|+1}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 24: Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $f(x) = \sqrt{x-5}$. B. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4}$. C. $f(x) = \cot x + 3$. D. $f(x) = \frac{x^2+3}{2-x}$.

Lời giải

Hàm số $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4}$ là hàm phân thức hữu tỉ và có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ do đó hàm số

$f(x) = \frac{x+5}{x^2+4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x + \sin x$. B. $y = 5x - \tan x$. C. $y = 2 - \cot x$. D. $y = \frac{1}{\sin x}$.

Lời giải

Hàm số $y = x + \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$. B. Hàm số liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$.
C. Hàm số liên tục tại điểm $x = -1$. D. Hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-1}$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Do đó hàm số không liên tục tại các điểm $x = \pm 1$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + x + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Với $x > 2$, ta có $f(x) = -x^2 + x + 3$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Với $x < 2$, ta có $f(x) = 5x + 2$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Tại $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + x + 3) = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5x + 2) = 12$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow$ không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục trên tập nào sau đây?

A. $\emptyset$.

B. $(-\infty; \sqrt{3}]$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $[1; +\infty)$.

Lời giải

Nếu $x \neq \sqrt{3}$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; \sqrt{3})$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$. Tại $x = \sqrt{3}$, ta có $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$,

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (x + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{hàm số liên tục tại } x = \sqrt{3}$$

Vậy hàm số liên tục trên $\emptyset$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm

số liên tục tại $x = 3$.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m \in \emptyset$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\emptyset$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1.$$

Tương tự ta có $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$ (có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m , hàm số đã cho không liên tục tại $x = 3$.

Câu 30: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m + 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

A. $m = 3$.

B. $m = 0$.

C. $m = 4$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \Rightarrow x_0 = 1 \in D$.

Ta có: $f(1) = m + 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow m + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 31: Số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x - 1 = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3x - 1$

Do $f(x) = x^3 - 3x - 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $[-2; -1], [-1; 0], [0; 2]$.

Ta có $\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2)f(-1) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-2; -1).$

$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)f(0) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-1; 0).$

$\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(2)f(0) < 0 \longrightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (0; 2).$

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2; 2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x) = 0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2$, $f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$:

A. Vô nghiệm.

B. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm.

D. Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Ta có $f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 = 0$. Đặt $g(x) = f(x) - 5$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} g(-1) = f(-1) - 5 = 2 - 5 = -3 \\ g(4) = f(4) - 5 = 7 - 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4) < 0.$$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 4)$ hay phương trình $f(x) = 5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 4)$.

Câu 33: Đối với tiền điện thông thường theo tháng sẽ được tính theo kiểu bậc thang. Cụ thể như sau:
Mức tiêu thụ điện ở 50 số điện đầu tiên từ 1–50kw sẽ có giá 865đ/mỗi số điện.
Mức tiêu thụ điện 50 số điện tiếp theo từ 51–100kw sẽ có giá 1135đ/mỗi số điện
Từ số điện thứ 101 giá tiền là 1495đ/mỗi số điện

Gọi y (đồng) là số tiền anh B phải trả sau khi tiêu thụ x (kw).

$$\text{Khi đó hàm số của } y \text{ theo } x \text{ là } y = \begin{cases} 865x & \text{khi } x \leq 50 \\ 1135x - 13500 & \text{khi } 50 < x \leq 100 \\ 1495x - 49500 & \text{khi } x > 100 \end{cases}$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

B. Hàm số gián đoạn tại $x = 50$.

C. Hàm số gián đoạn tại $x = 100$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x = 50$ và $x = 100$.

Lời giải

$$\text{Ta xét hàm số: } y = \begin{cases} 865x & \text{khi } x \leq 50 \\ 1135x - 13500 & \text{khi } 50 < x \leq 100 \\ 1495x - 49500 & \text{khi } x > 100 \end{cases}$$

Nhận thấy hàm số liên tục trên từng khoảng $(0; 50)$; $(50; 100)$; $(100; +\infty)$

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 50$; $x = 100$:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 50^-} (865x) = 43250 = y(50) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 50^+} (1135x - 13500) = 43250.$$

$$\text{Từ trên ta có } \lim_{x \rightarrow 50^-} y = \lim_{x \rightarrow 50^+} y = 43250 = y(50) \text{ nên hàm số liên tục tại } x = 50.$$

Xét tương tự, hàm số liên tục tại $x = 100$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x < 1 \\ k^2 & \text{khi } x = 1 \\ (x+1)^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của k để $f(x)$ gián đoạn tại

$x = 1$.

A. $k \neq -2$.

B. $k \neq 2$.

C. $k \neq \pm 2$.

D. $k \neq \pm 1$.

Lời giải

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \text{ ta có } \begin{cases} f(1) = k^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow k^2 \neq 4 \Leftrightarrow k \neq \pm 2.$$

Câu 35: Tìm m, n để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \text{ liên tục tại } x = 1. \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

A. $n = -1$ và $m = 0$. **B.** $n = m = 1$. **C.** $n = 0$ và $m = 1$. **D.** $n = 1$ và $m = 0$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \square$ ta có $\begin{cases} f(1) = n \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + 1) = m + 1 \end{cases}$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 1 \end{cases}.$$

Câu 36: Hàm số nào sau đây không liên tục tại $x=2$?

A. $y = \sqrt{x+2}$. **B.** $y = \sin x$. **C.** $y = \frac{x^2}{x-2}$. **D.** $y = x^2 - 3x + 2$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x^2}{x-2}$ không xác định tại $x=2$ nên gián đoạn tại $x=2$.

Câu 37: Hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ không xác định tại $x=2$ nên gián đoạn tại $x=2$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ x + 2023 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số liên tục trên $\square$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=3$.
C. Hàm số gián đoạn tại $x=0$. **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2023) = 2023$

Do đó, không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x, & x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x}, & 0 \leq x < 1 \\ x^3, & x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.
- C. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x = 1$.
- D. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x \cos x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1+x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 = 1$. Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Mặt khác $f(0) = 0$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$, gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Giá trị của m để hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 2$

là

- A. $m \neq 3$.
- B. $m \neq 1$.
- C. $m = 1$.
- D. $m = 3$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1; f(2) = m$

Do đó, để hàm số gián đoạn tại $x = 2$ thì $m \neq 1$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
- B. Hàm số liên tục tại mọi điểm.
- C. Hàm số gián đoạn tại $x = 1$.
- D. Tất cả đều sai.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}; f(1) = \frac{2}{3}$

Do đó, hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 42: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ gián đoạn tại

$$x = 1$$

A. $m \neq 0$.

B. $m \neq 6$.

C. $m = 0$.

D. $m = 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = 3; f(1) = 3 + m$$

Do đó, để hàm số gián đoạn tại $x = 1$ thì $3 + m \neq 3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + 2x - 1} - 2}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 4 - m & x = 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$ khi

A. $m = 3$.

B. $m \neq 3$.

C. $m = 7$.

D. $m \neq 7$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2 + 2x - 1} - 2}{x^2 - 1} = 1; f(1) = 4 - m$$

Do đó để hàm số gián đoạn tại $x = 1$ thì $4 - m \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 3$.

Câu 44: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x = -1$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{5}{2}$.

C. $m \neq \frac{3}{2}$.

D. $m \neq \frac{5}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2}; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (mx + 2) = -m + 2.$$

$$\text{Mặt khác } f(-1) = -m + 2$$

$$\text{Do đó để hàm số gián đoạn tại } x = -1 \text{ thì } -m + 2 \neq \frac{-1}{2} \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{2}.$$

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 + mx - 2 & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính tổng các giá trị tìm được của tham số m để

hàm số liên tục tại $x = 1$.

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. -1

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt nên theo định lý Viet tổng các giá trị của tham số m cần tìm bằng -1.

- Câu 46:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 1$.
- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $f(1) = m$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = 1-2 = -1.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = -1$.

- Câu 47:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = \frac{11}{2}$. B. $m = \frac{15}{2}$. C. $m = \frac{13}{2}$. D. $m = \frac{17}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12.$$

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow 12 = mx + 1 \Leftrightarrow 11 = 2m \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}$.

- Câu 48:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \neq 2 \\ m + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 2$ bằng?
- A. 4. B. 2. C. 0. D. 5.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 2) = 6$ và $f(2) = m + 1$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 6 = m + 1 \Leftrightarrow m = 5$.

- Câu 49:** Gọi S là tập các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2 + m - 8 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$

. Tích các phần tử của tập S bằng

A. -2. B. -8. C. -6. D. -1.

Lời giải

Ta có $f(1) = m^2 + m - 8$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x) = -2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 + m - 8 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$.

Vậy $S = \{2; -3\}$. Tích các phần tử S là -6.

Câu 50: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2mx + m^2 - 4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

- A. $m = 1$. **B.** $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$. D. $m = -3$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$ và $f(1) = m^2 + 2m - 4$

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 + 2m - 4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$

Câu 51: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x + 2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 4m + 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm

số đã cho liên tục tại $x = 2$?

- A. 0. B. 2. **C.** 1. D. 3.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x + 2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x - 1)(\sqrt{x + 2} + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1)(\sqrt{x + 2} + 2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2x - 4m + 6) = 2m^2 - 4m + 6; f(2) = 2m^2 - 4m + 6$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} & \text{khi } x > 8 \\ ax + 4 & \text{khi } x \leq 8 \end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x = 8$, giá trị của a là

- A. 2. B. 3. **C.** 1. D. 4.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(8) = 8a + 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{(x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8^+} (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 12.$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} (ax + 4) = 8a + 4.$$

Hàm số liên tục tại $x = 8 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = f(8) \Leftrightarrow 8a + 4 = 12 \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.

. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x^2 - x + 36a < 0$.

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Ta có $f(0) = 3$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)} = \frac{2}{2a+1}$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Ta có bất phương trình } x^2 - x + 36a < 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$$

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 4.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3a-5b-1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm điều kiện của tham số a, b để hàm

số trên liên tục tại điểm $x = 0$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $a - 8b = 1$.

B. $2a - 6b = 1$.

C. $16a - 33b = 6$.

D. $2a - 4b = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1}-1+1-\sqrt{1-bx}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x} + \frac{1-\sqrt{1-bx}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax+1-1}{x(\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{ax+1} + 1)} + \frac{1-(1-bx)}{x(1+\sqrt{1-bx})} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{(\sqrt[3]{(ax+1)^2} + \sqrt[3]{ax+1} + 1)} + \frac{b}{(1+\sqrt{1-bx})} \right) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{2a+3b}{6}.$$

$$\text{Ta lại có } f(0) = 3a - 5b - 1.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+3b}{6} = 3a - 5b - 1 \Leftrightarrow 2a + 3b = 18a - 30b - 6 \Leftrightarrow 16a - 33b = 6.$$

Câu 55: Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 + 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \frac{3x-4}{x-2}$.

Lời giải

Do các hàm số $y = x^3 + 1$, $y = x^4 - 2x^2 + 1$ là các hàm đa thức có TXĐ $D = \mathbb{R}$ nên đều liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số ở đáp án $y = \sin x$ là hàm số lượng giác có TXĐ $D = \mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số $y = \frac{3x-4}{x-2}$ có TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-4}{x-2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x-4}{x-2} = -\infty$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 2$. Vậy hàm số

$y = \frac{3x-4}{x-2}$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 56: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x + \frac{1}{x}$. B. $y = \sqrt{2-x}$. C. $y = \frac{2x+1}{x-7}$. **D.** $y = x + 7$.

Lời giải

Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$. Chọn hàm số $y = x + 7$.

Câu 57: Hàm số nào trong các hàm số sau đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = |x|$. **B.** $y = \frac{x}{x-1}$. C. $y = \sin x$. D. $y = \frac{x}{|x|+1}$.

Lời giải

Ta có tập xác định của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 58: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+5x+6}$. Hàm số đã cho liên tục trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; 3)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-3; 2)$. **D.** $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$.

Hàm số $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+5x+6}$ là hàm phân thức, liên tục trên từng khoảng xác định tập xác định, tức liên tục trên $(-\infty; -3)$; $(-3; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 59: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & \text{khi } x < 2 \\ 2-x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số không liên tục trên $(2; +\infty)$. **D.** Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Với $x < 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16}$ xác định nên hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Với $x > 2 \Rightarrow f(x) = 2 - x$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $(2; +\infty)$.

Tại $x = 2$ ta có : $f(2) = 2 - 2 = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)}{2(x^2+2x+4)} = -\frac{1}{24} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } f(2) = m^2 \cdot 2^2 = 4m^2; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2 x) = 4m^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1-m)x] = 2(1-m)$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 4m^2 = 2(1-m) \Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 61: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; +\infty)$ (với m là tham số).

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. m là một số hữu tỉ.

B. m là một số vô tỉ.

C. $m > 10$.

D. $m < 0$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $[0; +\infty)$ và liên tục trên $[0; +\infty)$.

Khi đó để $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; +\infty)$ thì hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\text{Tức là ta cần có: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad (*)$$

Ta có:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 4 \\ f(1) = m \end{cases}$$

Do đó (*) xảy ra khi và chỉ khi $m = 4$.

Câu 62: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó.

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = 4$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Khi $x < 1$ ta có: $f(x) = x^2 + x$ là đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.

Khi $x > 1$ ta có: $f(x) = mx + 1$ là đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(1; +\infty)$.

Khi $x = 1$ ta có: $f(1) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + 1) = m + 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2.$$

Suy ra $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $f(x)$ liên tục trên $D = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = 1$.

Câu 63: Trong một thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C , mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3°C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ\text{C}$) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases} \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Biết rằng $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Giá trị của k là

A. $k = 0$.

B. $k = 340$.

C. $k = 310$.

D. $k = 430$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [0; 100]$

Hàm số $T(t)$ liên tục trên $(0; 60)$ và $(60; 100)$.

Khi đó để hàm số liên tục trên $[0; 100]$ thì hàm số liên tục tại $t = 60$.

Tức là ta cần có
$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) = T(0) \\ \lim_{t \rightarrow 60^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 60^+} T(t) = T(60) \quad (*) \\ \lim_{t \rightarrow 100^-} T(t) = T(100) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (10 + 2t) = 10 \\ T(0) = 10 + 2 \cdot 0 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 100^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 100^-} (k - 3t) = k - 300 \\ T(100) = k - 3 \cdot 100 = k - 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 60^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 60^-} (10 + 2t) = 130 \\ \lim_{t \rightarrow 60^+} T(t) = \lim_{t \rightarrow 60^+} (k - 3t) = k - 180 \\ T(60) = k - 3 \cdot 60 = k - 180 \end{cases}$$

Do đó (*) xảy ra khi và chỉ khi $k - 180 = 130 \Leftrightarrow k = 340$.

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 1000x^2 + 0,01$. Phương trình $f(x) = 0$ nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng

I. $(-1; 0)$. II. $(0; 1)$. III. $(1; 2)$. IV. $(2; 1000)$.

A. Chỉ I, II, III.

B. Chỉ I và II.

C. Chỉ I, II, IV.

D. Cả I, II, III và IV.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 1000x^2 + 0,01$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-1; 0]; [0; 1]; [1; 2]; [2; 1000]$.

Ta có $f(-1) = -1000,99$; $f(0) = 0,01$ nên $f(0) \cdot f(-1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 0)$.

Ta có $f(1) = -998,99$; $f(0) = 0,01$ nên $f(0) \cdot f(1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 1)$.

Ta có $f(1) = -998,99$; $f(2) = -3991,99$ nên $f(2) \cdot f(1) > 0$. Khi đó ta chưa kết luận được số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $(1; 2)$.

Ta có $f(1000) = 0,01$; $f(2) = -3991,99$ nên $f(2) \cdot f(1000) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(2; 1000)$.

Mà phương trình bậc ba chỉ có nhiều nhất ba nghiệm nên ở mỗi khoảng I, II, IV phương trình đều có một nghiệm và trên khoảng III không có nghiệm.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2$; $f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$?

A. Vô nghiệm.

B. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm

D. Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Ta có $f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 = 0$. Đặt $g(x) = f(x) - 5$ liên tục trên $[-1; 4]$.

Ta có $g(-1) = -3; g(4) = 2$ nên $g(-1).g(4) < 0$. Khi đó phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 4)$. Nên phương trình $f(x) = 5$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 4)$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\square$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. liên tục trên $\square$ nên liên tục trên các đoạn $[-2; -1]; [-1; 0]; [0; 2]$.

Ta có $f(-2) = -3; f(-1) = 1$ nên $f(-2).f(-1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-2; -1)$.

Ta có $f(-1) = 1; f(0) = -1$ nên $f(0).f(-1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 0)$.

Ta có $f(0) = -1; f(2) = 1$ nên $f(0).f(2) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 2)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng ba nghiệm vì phương trình bậc ba có tối đa ba nghiệm.

Câu 67: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Phương trình có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.
B. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.
 C. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.
 D. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$. liên tục trên $\square$ nên liên tục trên các đoạn $[-2; -1]; [-1; 0]; [0; 1]$.

Ta có $f(-2) = 15; f(0) = -3$ nên $f(-2).f(-1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-2; -1)$.

Ta có $f(-1) = -3; f(0) = 1$ nên $f(-1).f(0) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 0)$. Vậy đáp án C, D sai.

Ta có $f(0) = 1; f(1) = -1$ nên $f(0).f(1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 1)$. Vậy đáp án A sai.

Câu 68: Cho phương trình $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - \frac{1}{8} = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Phương trình có đúng một nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$.
 B. Phương trình có đúng hai nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$.

C. Phương trình có đúng ba nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình có đúng bốn nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - \frac{1}{8} = 0$. liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn

$$[-1;0]; \left[0; \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{1}{2}; 1\right]; [1;3].$$

Ta có $f(-1) = \frac{23}{8}$; $f(0) = -\frac{1}{8}$ nên $f(-1) \cdot f(0) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$.

Ta có $f(0) = -\frac{1}{8}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$ nên $f(0) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$; $f(1) = -\frac{9}{8}$ nên $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Ta có $f(1) = -\frac{9}{8}$; $f(3) = \frac{23}{8}$ nên $f(1) \cdot f(3) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(1;3)$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất bốn nghiệm trên $(-1;3)$. Mặt khác phương trình bậc bốn có tối đa 4 nghiệm. Vậy phương trình có đúng bốn nghiệm trong khoảng $(-1;3)$.

Câu 69: Cho phương trình $-4x^3 + 4x - 1 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai*?

A. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

B. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

C. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-\infty;1)$.

D. Hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên các đoạn $[-2;0]; \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Ta có $f(-2) = 23$; $f(0) = -1$ nên $f(-2) \cdot f(0) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1;0)$. Vậy đáp án A đúng.

Ta có $f(0) = -1$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ nên $f(0) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Vậy đáp án B đúng.

Đáp án D đúng.

Ta có $f(-2) = 23$; $f(0) = -1$ nên $f(-2) \cdot f(0) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-2; 0)$. Vậy phương trình không thể vô nghiệm trên $(-\infty; 1)$. Vậy đáp án C sai.

Câu 70: Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$?

A. Phương trình $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

B. Phương trình $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$.

C. Phương trình $(x-1)^5 - x^7 - 2 = 0$.

D. Phương trình $3x^{2023} - 8x + 4 = 0$.

Lời giải

Ta có phương trình $2x^2 - 3x + 4 = 0$ vô nghiệm nên đáp án A sai.

Ta có phương trình $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$ vô nghiệm nên đáp án B sai.

Xét hàm số $f(x) = (x-1)^5 - x^7 - 2$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$

Ta có $f(0) = -3$; $f(1) = -3$ nên $f(1) \cdot f(0) > 0$. Khi đó ta chưa kết luận được số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong khoảng $(0; 1)$. Vậy đáp án C sai.

Xét hàm số $f(x) = 3x^{2023} - 8x + 4$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$

Ta có $f(0) = 4$; $f(1) = -1$ nên $f(1) \cdot f(0) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Câu 71: Phương trình $3x^5 + 5x^3 + 10 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-10; -2)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 10$

Hàm số liên tục trên đoạn $[-2; -1]$

Ta có $f(-2) = -126$; $f(-1) = 2$ nên $f(-2) \cdot f(-1) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2; -1)$.

Trên các khoảng $(-1; 0)$; $(0; 1)$ thì $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 10$ luôn nhận giá trị dương nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Trên khoảng $(-10; -2)$ thì $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 10$ luôn nhận giá trị âm nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 72: Phương trình $2x^4 - 4x^3 - 3 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 2)$. D. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3$

Hàm số liên tục trên đoạn $[-3; 0]$

Ta có $f(-3) = 267$; $f(0) = -3$ nên $f(-3) \cdot f(0) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-3; 0)$.

Trên các khoảng $(0; 1)$; $(1; 2)$; $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ thì $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3$ luôn nhận giá trị âm nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm

Câu 73: Phương trình $3x^3 + 4x^2 - 5 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(1; 2)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 1]$

Ta có $f(1) = 2$; $f(0) = -5$ nên $f(1) \cdot f(0) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Trên các khoảng $(-2; -1)$; $(-1; 0)$ thì $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$ luôn nhận giá trị âm nên phương trình

$f(x) = 0$ vô nghiệm.

Trên khoảng $(1; 2)$ thì $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$ luôn nhận giá trị dương nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 74: Số nghiệm của phương trình $x^3 + 2x = 4 + 3\sqrt{3 - 2x}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Điều kiện: $x \leq \frac{3}{2}$. Phương trình $\Leftrightarrow x^3 + 2x - 3\sqrt{3 - 2x} - 4 = 0$

Ta có hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 3\sqrt{3 - 2x} - 4$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

Ta có: $f(0) < 0, f\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm

Giả sử phương trình có 2 nghiệm a, b và $f(a) - f(b) = 0$

$$\Leftrightarrow (a-b) \left(a^2 + ab + b^2 + 2 + \frac{6}{\sqrt{3-2a} + \sqrt{3-2b}} \right) = 0$$

Do $a^2 + ab + b^2 + 2 + \frac{6}{\sqrt{3-2a} + \sqrt{3-2b}}$

$$= \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 2 + \frac{6}{\sqrt{3-2a} + \sqrt{3-2b}} > 0 \text{ với } \forall a, b < \frac{3}{2} \Rightarrow a = b$$

Vậy phương trình có đúng một nghiệm nên hàm số liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 75: Bảng giá cước của một hãng taxi được cho như sau:

Giá mở cửa	Giá km tiếp theo
11 000 đồng trên 0,7 km	a đồng trên 1km ($a > 11000$ đ)

Giá mở cửa: Khi lên taxi mà quãng đường di chuyển không quá 0,7 km thì hãng taxi vẫn tính 11000 đồng. Gọi y (đồng) là số tiền phải trả sau khi đi x (km). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số của y theo x liên tục tại $x = 0,7$?

A. 0. B. 1. C. Vô số. D. 3.

Lời giải

Nếu quãng đường đi không quá 0,7 km ($x \leq 0,7$) thì số tiền phải trả là: $y = 11000$ (đồng)

Nếu quãng đường khách đi trên 0,7 km ($x > 0,7$) thì số tiền phải trả là: $y = 11000 + (x - 0,7) \cdot a$ (đồng)

Do đó ta có hàm số của y theo x là: $y = \begin{cases} 11000 & \text{khi } x \leq 0,7 \\ 11000 + (x - 0,7) \cdot a & \text{khi } x > 0,7 \end{cases}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0,7^-} 11000 = 11000 = y(0,7)$ và $\lim_{x \rightarrow 0,7^+} (11000 + (x - 0,7) \cdot a) = 11000$.

Từ trên ta có $\lim_{x \rightarrow 0,7^-} y = \lim_{x \rightarrow 0,7^+} y = 11000 = y(0,7), \forall a$

Vậy có vô số số a thỏa mãn.

Câu 76: Giá cước gọi quốc tế của tập đoàn viễn thông X trong dịp khuyến mãi mừng thành lập tập đoàn cho bởi bảng sau

Thời gian	Giá cước (VND/phút)
5 phút đầu	6000
Từ phút thứ 6 đến phút thứ 10	5800
Từ phút thứ 11 đến phút thứ 20	5200
Từ phút thứ 21 đến phút thứ 30	5000
30 phút trở lên	a ($1000 \leq a \leq 4500$)

Gọi y (đồng) là số tiền bác An phải trả sau khi gọi x (phút). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a là bội của 1000 để hàm số của y theo x liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Gọi y (đồng) là số tiền bác An phải trả sau khi gọi x (phút). ($x \geq 0; y \geq 0$)

Nếu $x \leq 5$ thì $y = 6000x$ (đồng)

Nếu $5 < x \leq 10$ thì $y = 6000.5 + (x - 5).5800 = 5800x + 1000$ (đồng)

Nếu $10 < x \leq 20$ thì $y = 6000.5 + 5.5800 + (x - 10).5200 = 5200x + 7000$ (đồng)

Nếu $20 < x \leq 30$ thì $y = 6000.5 + 5.5800 + 10.5200 + (x - 20).5000 = 5000x + 11000$ (đồng)

Nếu $x > 30$ thì $y = 6000.5 + 5.5800 + 10.5200 + 10.5000 + (x - 30).a = (x - 30).a + 161000$ (đồng)

$$\text{Vậy ta có hàm số } y = \begin{cases} 6000x & \text{khi } 0 \leq x \leq 5 \\ 5800x + 1000 & \text{khi } 5 < x \leq 10 \\ 5200x + 7000 & \text{khi } 10 < x \leq 20 \\ 5000x + 11000 & \text{khi } 20 < x \leq 30 \\ (x - 30).a + 161000 & \text{khi } x > 30 \end{cases}$$

Nhận thấy hàm số liên tục trên từng khoảng $(0;5); (5;10); (10;20); (20;30); (30;+\infty)$ và liên tục tại các điểm $x=5; x=10; x=20$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=30$:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 30^-} (5000x + 11000) = 161000 = y(30); \lim_{x \rightarrow 30^+} ((x - 30).a + 161000) = 161000.$$

$$\text{Từ trên ta có } \lim_{x \rightarrow 30^-} y = \lim_{x \rightarrow 30^+} y = 161000 = y(30), \forall a$$

$$\text{Vì } a:1000; a \in [1000; 4500] \Rightarrow a \in \{1000; 2000; 3000; 4000\}$$

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} & \text{khi } x \neq 45 \\ 2m + 4 & \text{khi } x = 45 \end{cases}$ (m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng

định sau:

a) Tập xác định của hàm số $\mathbb{R} \setminus \{45\}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 45} f(x) = 90$.

c) Hàm số liên tục tại $x = 20$ với mọi m .

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = 44$.

Lời giải

a) Sai: Hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Vậy a) Sai

b) Đúng: Ta có $\lim_{x \rightarrow 45} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} = \lim_{x \rightarrow 45} (x + 45) = 90$. Vậy a) Đúng.

c) Đúng: Ta có $f(20) = 65$

$\lim_{x \rightarrow 20} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} = \lim_{x \rightarrow 20} (x + 45) = 65 = f(20)$, nên $f(x)$ liên tục tại $x = 20$. Vậy c) Đúng.

d) Sai: Với $x \neq 45$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 2025}{x - 45}$ hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; 45) \cup (45; +\infty)$

Suy ra hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 45)$ và $(45; +\infty)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 45 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} f(x) = f(45)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} \frac{x^2 - 2025}{x - 45} = 2m + 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} \frac{(x - 45)(x + 45)}{x - 45} = 2m + 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 45} (x + 45) = 2m + 4$$

$$\Leftrightarrow 90 = 2m + 45 \Leftrightarrow m = 43. \text{ Suy ra } m = 43 \text{ thì hàm số liên tục trên } \mathbb{R}.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x > 1 \\ mx + 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ (với m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng

định sau:

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

c) Hàm số luôn liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -1$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{b) Sai: Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [(\sqrt{x} + 1)(x + 1)] = 4 \end{aligned}$$

c) Đúng: Với $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$, hàm số xác định trên $(1; +\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Sai: Với $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$, hàm số xác định trên $(1; +\infty)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

Với $x < 1$ thì $f(x) = mx + 3$, hàm số xác định trên khoảng $(-\infty; 1)$. Do đó hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx+3) = m+3$, $f(1) = m+3$

Suy ra $m+3=4 \Leftrightarrow m=1$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=1$.

Câu 3: Cho hàm số $g(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{ khi } |x| \leq 1 \\ x-1 & \text{ khi } |x| > 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) $g(-1) = -2$.

c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=-1$.

d) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có hàm số $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ xác định trên $[-1;1]$ và hàm số $y = x-1$ xác định trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Sai: $g(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.

Do đó hàm số $g(x)$ không liên tục tại $x=-1$.

d) Đúng: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ đồng thời $g(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$. Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại $x=1$.

Câu 4: Cho các hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x+15}$ và $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ khi } x < 1 \\ g(x) & \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính đúng

sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

b) Hàm số $g(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

c) $h(1) = 4$.

d) Hàm số $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ xác định trên khoảng $(-\infty; 1)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

b) Đúng: Hàm số $g(x) = \sqrt{x + 15}$ xác định trên khoảng $(1; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

c) Đúng: $h(1) = g(1) = \sqrt{1 + 15} = 4$.

d) Sai: Tập xác định của hàm số $h(x)$ là $\mathbb{R}$.

Trên khoảng $(-\infty; 1)$ ta có $h(x) = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ nên hàm số $h(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Trên khoảng $(1; +\infty)$ ta có $h(x) = g(x) = \sqrt{x + 15}$ nên hàm số $h(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

Tại $x = 1$: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x + 15} = 4$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.

Do đó hàm số $h(x)$ không liên tục tại $x = 1$ nên hàm số $h(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

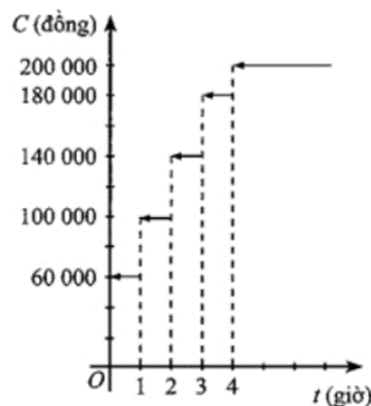
Câu 5: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.

b) Hàm số $C = C(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

c) Từ đồ thị ta thấy $\lim_{t \rightarrow 3} C(t) = 180000$.

d) Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người là 20000 đồng.



Lời giải

- a) Đúng: Đồ thị hàm số $C = C(t)$ (hình vẽ) biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.
- b) Sai: Từ đồ thị ta thấy hàm số $C(t)$ bị gián đoạn tại $t = 1$ (giờ); $t = 2$ (giờ); $t = 3$ (giờ); $t = 4$ (giờ) nên hàm số không liên tục trên $[0; +\infty)$.
- c) Sai: Ta có: $\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) = 180000, \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t) = 140000$
- Vì $\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) \neq \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t)$ nên không tồn tại $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$
- d) Sai: Một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là $180000 - 140000 = 40000$ (đồng).

Câu 6: Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5km)	Giá cước các km tiếp theo đến 30km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

- a) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x) = \begin{cases} 5000 + 13500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$$

- b) Công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển

$$f(x) = \begin{cases} 10000x; & x \leq 0,5 \\ 5000 + 13500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$$

- c) Hàm số $f(x) = \begin{cases} 10000x; & x \leq 0,5 \\ 5000 + 13500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- d) Khách hàng đi quãng đường 40 km thì số tiền vị khách đó phải trả là 515000 đồng.

Lời giải

- a) Sai: Đoạn mở cửa (0,5 km):

Giá mở cửa là 10.000 đồng cho 0,5 km đầu tiên. Khi $0 < x \leq 0,5$, tiền cước là: $f(x) = 10000$

Đoạn từ 0,5 km đến 30 km:

Sau 0,5 km, giá cước là 13.500 đồng cho mỗi km. Ta có:

Khi $0,5 < x \leq 30$, tiền cước là: $f(x) = 10000 + 13500(x - 0,5)$

Vì 10.000 đồng là giá mở cửa, và ta trừ 0,5 km đầu tiên đã tính trong giá mở cửa.

Đoạn từ km thứ 31 trở đi:

Giá cước giảm còn 11.000 đồng mỗi km. Ta tiếp tục từ mức giá của 30 km đầu:

Khi $x > 30$, tiền cước là: $f(x) = 10000 + 13500(30 - 0,5) + 11000(x - 30)$

- b) Đúng: Đoạn mở cửa (0,5 km):

Giá mở cửa là 10.000 đồng cho 0,5 km đầu tiên.

Khi $0 < x \leq 0,5$, tiền cước là: $f(x) = 10000$

Đoạn từ 0,5 km đến 30 km:

Sau 0,5 km, giá cước là 13.500 đồng cho mỗi km. Ta có:

Khi $0,5 < x \leq 30$, tiền cước là: $f(x) = 10000 + 13500(x - 0,5)$

Vì 10.000 đồng là giá mở cửa, và ta trừ 0,5 km đầu tiên đã tính trong giá mở cửa.

Đoạn từ km thứ 31 trở đi:

Giá cước giảm còn 11.000 đồng mỗi km. Ta tiếp tục từ mức giá của 30 km đầu:

Khi $x > 30$ tiền cước là: $f(x) = 10000 + 13500(30 - 0,5) + 11000(x - 30)$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \begin{cases} 10000x; & x \leq 0,5 \\ 5000 + 13500(x - 0,5); & 0,5 < x \leq 30 \\ 403250 + 11000(x - 30); & x > 30 \end{cases}$$

c) Đúng: Xét tính liên tục của hàm số

Ta cần kiểm tra tính liên tục tại các điểm chuyển tiếp $x = 0,5$ và $x = 30$.

Tại $x = 0,5$: $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f(x) = f(0,5) = 5000$ và $\lim_{x \rightarrow 0,5^+} f(x) = 5000 + 13500(0,5 - 0,5) = 5000$.

Hàm số liên tục tại $x = 0,5$.

Tại $x = 30$: $\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = f(30) = 5000 + 13500(30 - 0,5) = 403205$.

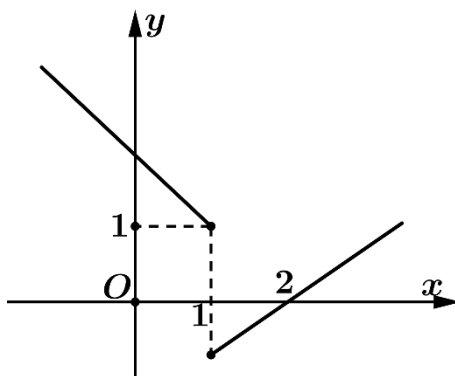
Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = 5000 + 13500(30 - 0,5) = 403205$.

Hàm số liên tục tại $x = 30$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

d) Sai: Khách hàng đi quãng đường 40 km thì số tiền vị khách đó phải trả là:

$$f(40) = 403250 + 11000(40 - 30) = 513250 \text{ đồng}$$

Câu 7: Cho hàm số có đồ thị như hình dưới:



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.
- b) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x = 2$.
- c) Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 1$.
- d) Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số đã cho suy ra hàm số liên tục tại điểm $x = 0$, không liên tục tại điểm $x = 1$ và liên tục tại điểm $x = 2$

- a) Đúng: Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.
- b) Sai: Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 2$.
- c) Sai: Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x = 1$.
- d) Đúng: Hàm số đã cho không liên tục tại điểm $x = 1$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{khi } -1 < x < 1 \\ 2x + 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = -2$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm $x = 0$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = -1$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; -1)$ nên hàm số liên tục tại điểm $x = -2$
- b) Sai: Ta lại có hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 1)$ nên hàm số liên tục tại điểm $x = 0$
- c) Đúng: Mặt khác, ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + x + 1) = f(-1) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 2) = 1$ suy ra hàm số liên tục tại $x = -1$.
- d) Sai: Lại có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3) = 5$ suy ra hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $f(1) = 8 + a^2$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4a + 3$.
- c) Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi $a = 0$.
- d) Có tất cả 2 giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có $f(1) = 8 + a^2$.
- b) Sai: Tập xác định: $D = [-3; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (ax+2)(\sqrt{x+3}+2) = 4(a+2) = 4a+8. \end{aligned}$$

- c) Đúng: Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4(a+2) = 8 + a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi $a = 0$.

- d) Đúng: giải thích ở câu trên ta có 2 giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Câu 10: Cho phương trình $2x^3 - 8x - 1 = 0$ (1). Đặt hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 8x - 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 8x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- b) Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-5; -1)$.
- c) Phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.

d) Phương trình $f(\sin x) + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 8x - 1$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Sai: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số liên tục trên $[-5; -1]$.

Lại có $f(-5) = -211 < 0$ và $f(-1) = 5 > 0$, khi đó $f(-5) \cdot f(-1) < 0$.

Vậy phương trình (1) đã cho có nghiệm trong khoảng $(-5; -1)$.

c) Đúng: Hàm số $f(x) = 2x^3 - 8x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-5) = -211$, $f(-1) = 5 > 0$, $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 29 > 0$ nên phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm trên $(-5; -1), (-1; 2), (2; 3)$.

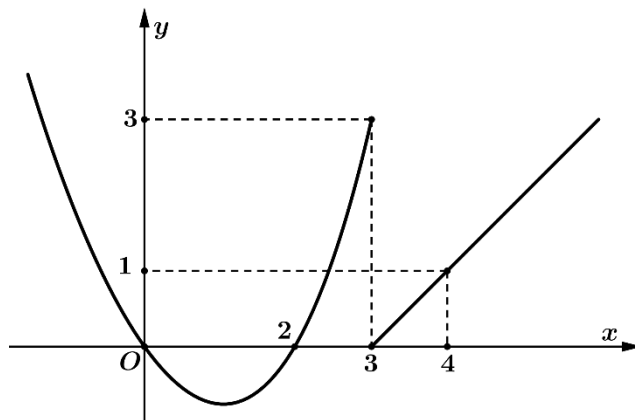
Mà phương trình bậc ba có tối đa 3 nghiệm nên phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

d) Sai: $f(\sin x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^3 x - 8\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin^2 x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \in [-1; 1] \\ \sin x = 2 \notin [-1; 1] \\ \sin x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ mà $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$, suy ra $x \in \{0; \pi; 2\pi\}$.

Vậy phương trình $f(\sin x) + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$.

b) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$.

c) Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 3$.

d) Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$. Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 3$. Như vậy:

a) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$.

b) Sai: Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 3$ nên không liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$.

c) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 3$.

d) Sai: Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ không xác định tại $x = 0$ và $x = 2$ suy ra hàm số gián đoạn tại $x = 0, x = 2$. Suy ra hàm số không liên tục trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai cho mỗi khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- b) Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.
- c) Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 2$.
- d) Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$. $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$. Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$.

d) Với $x \neq 2$ thì $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Suy ra hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$. Mặt khác hàm số liên tục tại $x = 2$. Suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

- a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.
- b) Nếu $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ thì hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
- c) Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ với $a = -1$.
- d) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với $a = 1$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Nếu $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ thì hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

c) Sai: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) = 3$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a$ và $f(1) = 2 + a$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 + a = 3 \Leftrightarrow a = 1$.

d) Đúng: Khi $x < 1$ thì $f(x) = 2x + a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Khi $x > 1$ thì $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

Khi $a = 1$ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ với $a = 1$.

Câu 14: Cho phương trình $x^2 = \sqrt{x+1}$ (1) và phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ (2). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x \geq -1$.
- b) Phương trình (1) và (2) có nghiệm trong $(1; 2)$.
- c) Phương trình (1) và (2) có nghiệm trong $(-1; 0)$.
- d) Phương trình (1) có nhiều nhất 1 nghiệm.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện xác định của phương trình (1) là $x \geq -1$.

b) Đúng : Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{x+1} = 0$. Đặt $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0 \\ f(2) = 4 - \sqrt{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2) < 0.$$

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-1; +\infty)$ do đó liên tục trên $[1; 2]$

Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong $(1; 2)$.

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x + 1. \text{ Ta có } \begin{cases} g(1) = -1 \\ g(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow g(1).g(2) < 0.$$

Hàm số $y = g(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ do đó liên tục trên $[1; 2]$

Phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong $(1; 2)$.

c) Sai : Xét trên khoảng $(-1; 0)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1).f(0) < 0 \text{ nên hàm số } y = f(x) \text{ liên tục trên } [-1; 0]$$

Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$.

Một cách tương tự ta chứng minh được phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên các khoảng $(-2; -1), (0; 1), (1; 2)$.

Mặt khác, phương trình (2) là phương trình bậc ba nên có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt và $(-2; -1), (0; 1), (1; 2)$ là các khoảng rời nhau do đó phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt thuộc 3 khoảng này.

Phương trình (2) không có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

d) Sai : Từ câu b) và c) suy ra: Phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -6 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $f(-2) = -6$.
- b) $f(-2) = 6$.
- c) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -5$.
- d) Hàm số liên tục tại $x = -2$.

Lời giải

- a) Đúng: Khi $x = -2$ ta có $f(-2) = -6$.
- b) Sai: $f(-2) = -6$
- c) Đúng: $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x + 2)(x - 3)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)} (x - 3) = -5$.
- d) Sai: $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -5 \neq f(-2)$ nên hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại $x = -2$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $f(1) = 4$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + 3$.
- d) Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $a = -2$.

Lời giải

- a) Sai: $f(1) = a \cdot 1 + 3 = a + 3$
- b) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - 1) = 1$
- c) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 3) = a + 3$
- d) Đúng: Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 3 = 1 \Leftrightarrow a = -2$$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với $a = -3; b = 0; c = 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$
- b) Với $a = -3; b = 0; c = 2$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-2; 3)$
- c) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là 2.

d) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + c > b + 1 \\ a + b + c + 1 < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là 3.

Lời giải

a) Đúng: Ta có hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Suy ra hàm số liên tục trên $[-2; 0]$

Ta có: $\begin{cases} f(-2) = -18 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0)$.

b) Đúng: Ta có hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên tục trên $[-2; 3]$.

Ta có: $\begin{cases} f(-2) = -18 \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2; 0)$.

$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(2) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; 2)$.

Do đó phương trình có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$.

c) Sai: Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Khi đó $\begin{cases} f(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0 \\ f(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0 \end{cases}$

$f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$

$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm

trong khoảng $(-2; 2)$

$\begin{cases} f(2) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(2; +\infty)$

$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-\infty; -2)$

Mà hàm số $f(x)$ là hàm bậc ba nên đồ thị của nó cắt trục Ox tối đa tại 3 điểm

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại đúng 3 điểm.

d) Đúng: Vì hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba nên đồ thị hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và số giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox nhiều nhất là 3.

Theo đề bài ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $y(-1) = a + c - b - 1 > 0$, $y(1) = a + b + c + 1 < 0$

Do đó hàm số đã cho có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$.

Từ đó suy ra số giao điểm cần tìm là 3.

Câu 18: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.

c) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(t) = 20$

d) Số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Lời giải

a) Đúng: Vào đầu năm 1980 thì ta có $t = 10$; $f(10) = 18$.

Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Sai: Vào đầu năm 1995 ta có $t = 25$; $f(25) = 22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người

c) Sai: Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(t) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{26t + 10}{t + 5} = \frac{26 \cdot 5 + 10}{5 + 5} = 14$

d) Đúng: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{26 + \frac{10}{t}}{1 + \frac{5}{t}} = 26$.

Vậy số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Câu 19: Cho các hàm số $f_1(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$; $f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ x - 1, & x = -2 \end{cases}$; $f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} & \text{khi } x > 4 \\ 2x - m & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$;

$f_4(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{khi } x < 1 \\ k^2 & \text{khi } x = 1 \\ (x - 2)^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f_1(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

b) Hàm số $f_2(x)$ liên tục tại $x_0 = -2$.

c) Hàm số $f_3(x)$ liên tục tại $x = 4$ khi $m = -24$.

d) Với $k \neq \pm 1$ thì $f_4(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ do đó $x_0 = 2 \notin D$ nên hàm số gián đoạn tại $x_0 = 2$.

b) Sai: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ do đó $x_0 = -2 \in D$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$, $f(-2) = -3$

Do đó $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$ nên hàm số gián đoạn tại $x_0 = -2$.

c) Đúng: TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - m) = 8 - m = f(4)$;

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} [(x+4)(\sqrt{x}+2)] = 32.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=4$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 - m = 32 \Leftrightarrow m = -24.$$

d) Đúng: TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có
$$\begin{cases} f(1) = k^2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)^2 = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x^2) = 1 \end{cases}$$

Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow k^2 \neq 1 \Leftrightarrow k \neq \pm 1.$$

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng

định sau:

a) $g(2)=1$.

b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$.

c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

d) Khi $a < 1$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $g(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$

b) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}$.

c) Đúng: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

d) Sai: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ nên $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$ và ta có $f(2) = \frac{2a+1}{6}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = (m-1)x^3 + 2x + 1$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- b) Với $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(-1; 3)$.
- c) Với mọi $m \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 1)$.
- d) Với $m < 1$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm dương.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi m thì $y = f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Khi $m = \frac{1}{2}$ ta có $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x + 1$ đây là hàm liên tục trên $[-1; 0]$ và $[0; 3]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -\frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0$ nên $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 0)$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(3) = -\frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(3) < 0$ nên $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 3)$.

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên $(-1; 3)$.

c) Đúng: $y = f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -m \\ f(1) = m + 2 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) = -m(m+2) < 0, \forall m \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(-1; 1)$ với mọi $m \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

d) Đúng: $y = f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 1 > 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(m-1)x^3 + 2x + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(m-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$ do $m < 1$.

Khi đó, tồn tại số $a > 0$ sao cho $f(a) < 0$.

Suy ra $f(0) \cdot f(a) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; a)$.

Suy ra $m < 1$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm dương.

Câu 22: Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $T(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$T(x) = \begin{cases} 50000, & 0 < x \leq 2 \\ 120000, & 2 < x < 4 \\ 35000x, & x \geq 4 \end{cases}$$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $T(2) = 50000$.

b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} T(x) = 120000$.

c) Hàm số $T(x)$ liên tục tại $x = 4$.

d) Hàm số $T(x)$ liên tục trên $[4; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng: $T(2) = 50000$

b) Sai: $\lim_{x \rightarrow 4^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (35000x) = 35000 \cdot 4 = 140000$

c) Đúng: Vì $\lim_{x \rightarrow 4^-} T(x) = 120000 \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} T(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 4} T(x)$ suy ra hàm số $T(x)$ không liên tục tại $x = 4$.

d) Đúng: Khi $x > 4$, $T(x) = 35000x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(4; +\infty)$.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 4^+} T(x) = T(4)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục trên $[4; +\infty)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m^2x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = m^2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 2: Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = a - \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(ax - \frac{1}{2}\right) = a - \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{4mx - 1}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số trên liên tục tại $x_0 = 2$

Lời giải

Ta có: $f(x_0) = f(2) = \frac{8m-1}{3}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} = 1$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow \frac{8m-1}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 4: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3 = 3 + m \Leftrightarrow m = 0$

Câu 5: Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định của chúng.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq -2$.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$ (1)

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = 2 + 1 = 3$; $f(-2) = m$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3 = m \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 6: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết thì ta có $3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Suy ra $3 + m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ m & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x - 4) = -6$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} (m) = m$; $f(1) = -6$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = -6$

Câu 8: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x - \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có: $f(2) = 2a^2 - \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt[3]{3x+2}-2) \cdot [(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2]}{(x-2) \cdot [(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{(x-2) \cdot [(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{[(\sqrt[3]{3x+2})^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2]} = \frac{1}{4}. \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(a^2x - \frac{1}{4} \right) = 2a^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2a^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 9: Cho phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$. Phương trình có đúng m nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.
Tìm m .

Lời giải

Xét $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$ trên khoảng $[-1;1]$. Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

$$f(-1) = 4, f(0) = -3, f(1) = 2 \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0, f(1) \cdot f(0) < 0.$$

Như vậy phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

Mặt khác $f'(x) = 6x^3 + 4x - 1$. Ta có $f'(-1) = -11, f'(1) = 9 \Rightarrow f'(-1) \cdot f'(1) < 0$.

Do đó phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

$f''(x) = 18x^2 + 4 > 0$ với $\forall x \in (-1;1)$ nên $f'(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1) \Rightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Do đó $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Vậy phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t) = \begin{cases} 10 + a & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ t^2 - 5t + 10 & \text{khi } t > 5 \end{cases}$, trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Tìm a để hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t = 5$.

Lời giải

Ta có: $v(5) = 10 + a$ và $\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} (10 + a) = 10 + a$; $\lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (t^2 - 5t + 10) = 10$.

Để hàm số $v(t)$ liên tục tại điểm $t = 5$ khi và chỉ khi $10 + a = 10 \Leftrightarrow a = 0$.

Câu 11: Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như

sau: $T(x) = \begin{cases} 10000 + a & \text{khi } 0 < x \leq 0,7 \\ 11000 + 15100 \cdot (x - 0,7) & \text{khi } 0,7 < x \leq 30 \\ 453430 + 12000 \cdot (x - 30) & \text{khi } x > 30 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $T(x)$ liên tục tại $x = 0,7$.

Lời giải

Tại $x = 0,7$ ta có: $T(0,7) = 10000 + a$; $\lim_{x \rightarrow 0,7^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^-} 10000 + a = 10000 + a$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0,7^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^+} (11000 + 15100(x - 0,7)) = 11000$.

Hàm số liên tục tại $x = 0,7$ thì $\lim_{x \rightarrow 0,7^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^+} T(x) = T(0,7) \Leftrightarrow a = 1000$.

Câu 12: Giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x - 3} - x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - m^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$ viết dưới

dạng $m = -\frac{a}{\sqrt{b}}$, ($m > 0, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}^*$). Hiệu của $a - b$ bằng?

Lời giải

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$.

Ta có $\begin{cases} f(3) = 1 - 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x - 3} - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 2)(\sqrt{4x - 3} + x)}{1 - x} = -3. \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1 - a^2x) = 1 - 3a^2. \end{cases}$

$\Rightarrow 1 - 3a^2 = -3 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Hiệu số $a - b = -1$.

Câu 13: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$$

$$\text{Hàm số liên tục} \Leftrightarrow 3 = 3 + m \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 14: Xác định giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2 + (2a+1)x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$. (Kết quả chính xác đến hàng phần chục)

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2 + (2a+1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(ax + 2a + 1)(\sqrt{4x+1} + 1)} = \frac{2}{2a+1}; f(0) = 3.$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6} = 0,2.$$

Câu 15: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a - b + c - 1 > 0 \\ 4a + 2b + c + 8 < 0 \end{cases}$. Tìm số nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ và $f(-1) = a - b + c - 1 > 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-\infty; -1)$.

$f(-1) \cdot f(2) = (a - b + c - 1)(4a + 2b + c + 8) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

$f(2) = 4a + 2b + c + 8 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2; +\infty)$.

Mà phương trình là phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm. Vậy phương trình có 3 nghiệm.

Câu 16: Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi tham số $m = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $2a + b$ bằng

Lời giải

Xét $x \in (4; +\infty)$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ là hàm phân thức nên hàm số liên tục.

Xét $x \in (-\infty; 4)$ thì $f(x) = mx + 1$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục.

Xét $x = 4$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8$ và

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (mx + 1) = 4m + 1; f(4) = 4m + 1.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 4$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m + 1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$

Vậy $2a + b = 2.7 + 4 = 18$.

Câu 17: Nhiệt độ sấy mứt dẻo bằng máy sấy nhiệt được điều khiển tăng từ 30°C mỗi phút tăng 3°C trong 12 phút, sau đó giảm mỗi phút 1°C trong 6 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ\text{C}$) trong máy sấy nhiệt theo thời gian t (tính theo phút) có dạng $T(t) = \begin{cases} 30 + 3t & \text{khi } 0 \leq t \leq 12 \\ m - t & \text{khi } 12 < t \leq 18 \end{cases}$ (m là hằng số). Biết rằng $T(t)$ là hàm số liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của m .

Lời giải

Với $0 \leq t < 12$ thì $T(t) = 30 + 3t$ nên hàm số liên tục trên $[0; 12)$.

Với $12 < t \leq 18$ ta có: $y = m - t$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $(12; 18]$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $t = 12$.

$$T(12) = 30 + 3.12 = 66.$$

Ta có $\lim_{t \rightarrow 12^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 12^-} (30 + 3t) = 30 + 3.12 = 66$ và $\lim_{t \rightarrow 12^+} T(t) = \lim_{t \rightarrow 12^+} (m - t) = m - 12$.

Hàm số liên tục tại $t = 12$ nên $T(12) = \lim_{t \rightarrow 12^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 12^+} T(t) \Leftrightarrow 66 = m - 12 \Leftrightarrow m = 78$.

Vậy $m = 78$ thì $T(t)$ là hàm số liên tục trên tập xác định.

Câu 18: Tính tổng các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (m^2x + 1) = m^2 + 1$.

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy $S = 0$.

Câu 19: Số dân của một thị trấn sau x năm kể từ năm 1980 được tính bởi công thức $f(x) = \frac{6000x}{50 + 12x}$ ($f(x)$ được tính bằng nghìn người). Số dân của thị trấn đó không vượt quá bao nhiêu người.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6000x}{50 + 12x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6000}{\frac{50}{x} + 12} = \frac{6000}{12} = 500.$

Câu 20: Tính tổng các giá trị tìm được của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ (2-m)x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Xét $x < 1$ thì $f(x) = m^2 x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên $(-\infty; 1)$.

Xét $x > 1$ thì $f(x) = (2-m)x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên cũng liên tục trên $(1; +\infty)$.

Xét tính liên tục tại $x = 1$

Ta có $f(1) = m^2 1^2 = m^2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} m^2 x^2 = m^2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-m)x = 2-m$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 1$.

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\Leftrightarrow m^2 = 2 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy tổng các giá trị tìm được của tham số m là -1

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x-1}, & \text{khi } x \neq 1 \\ a^2 + ax - \frac{8}{3}, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1) \left(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x-1)}{(x-1)(2 + \sqrt{3x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{2 + \sqrt{3x+1}} = \frac{1}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{3}; \quad f(1) = a^2 + a - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow a^2 + a - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}.$$

Câu 22: Gọi S là tập các giá trị của tham số a để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x \neq 1 \\ a^2 + a - 8 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính tích các phần tử của S .

Lời giải

Khi $x \neq 1$, $f(x) = x^2 - 3x$ là hàm số đa thức nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x) = a^2 + a - 8 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

Vậy tích các phân tử của S là -6 .

Câu 23: Một chuyển động thẳng biến đổi đều trong 5 giây đầu có phương trình đường đi là $s(t) = 2t^2 + 10t$ và sau đó tiếp tục chuyển động theo phương trình $S(t) = at^2 + 3t$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tìm giá trị của a .

Lời giải

Ta có phương trình của chuyển động là $S(t) = \begin{cases} 2t^2 + 10t & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ at^2 + 3t & \text{khi } t > 5 \end{cases}$.

Vì đây là phương trình của một chuyển động nên $S(t)$ là hàm số liên tục.

Hàm số $S(t)$ liên tục trên các khoảng $(0; 5)$ và $(5; +\infty)$ để hàm số $S(t)$ liên tục thì nó phải liên tục tại $t = 5$.

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} (2t^2 + 10t) = 100, \lim_{t \rightarrow 5^+} S(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (at^2 + 3t) = 25a + 15, S(5) = 100.$$

Hàm số liên tục tại $t = 5$ khi $\lim_{t \rightarrow 5^-} S(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} S(t) = 100 \Leftrightarrow 25a + 15 = 100 \Leftrightarrow a = \frac{17}{5} = 3,4$.

Vậy $a = 3,4$.

Câu 24: Hàm số $v(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t + 12 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ at - 3 & \text{khi } 5 < t \leq 10 \end{cases}$ mô tả vận tốc (m/s) của một vật tại thời điểm t (giây)

trong khoảng thời gian 10 giây đầu tiên kể từ khi vật bắt đầu chuyển động. Biết rằng $v(t)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; 10]$ và trong 10 giây đầu tiên đó, có hai lần vật đạt vận tốc 10(m/s) là vào các thời điểm t_1 giây và t_2 giây. Tính $t_1 + t_2$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)

Lời giải

Hàm số $v(t)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ nên hàm số liên tục tại $t = 5$.

$$\text{Suy ra } \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = v(5) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 5^+} (at - 3) = \lim_{t \rightarrow 5^-} (-t^2 + 4t + 12) = 7$$

$$\Leftrightarrow 5a - 3 = -5^2 + 4 \cdot 5 + 12 \Leftrightarrow a = 2.$$

$$\text{Khi đó } v(t) = \begin{cases} -t^2 + 4t + 12 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ 2t - 3 & \text{khi } 5 < t \leq 10 \end{cases}.$$

$$\text{Vật đạt vận tốc 10 (m/s) nên ta có } v(t) = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2 + 4t + 12 = 10 & (0 \leq t \leq 5) \\ 2t - 3 = 10 & (5 < t < 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{6} \\ t = \frac{13}{2} \end{cases}.$$

Như vậy ta có $t_1 = 2 + \sqrt{6}$ và $t_2 = \frac{13}{2}$ $t_1 + t_2 = 2 + \sqrt{6} + \frac{13}{2} \approx 10,9$.

-----HẾT-----