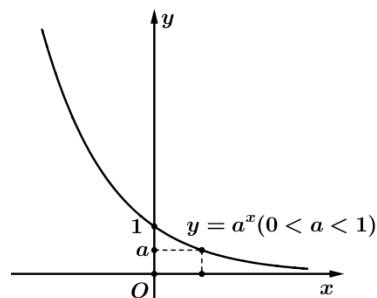
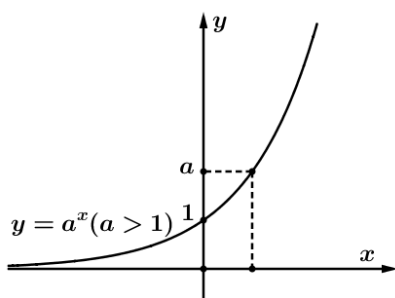


A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số mũ

Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .



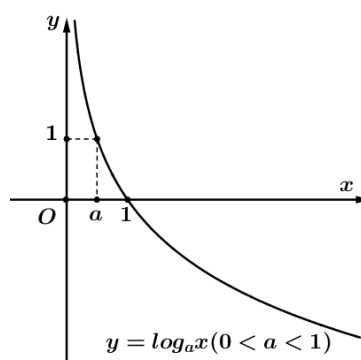
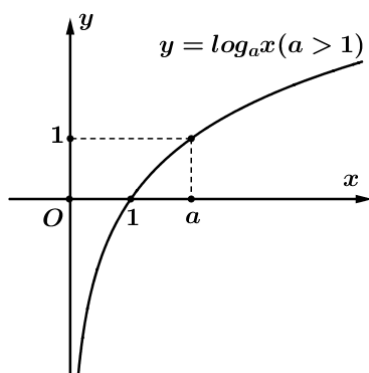
Hàm số mũ $y = a^x$.

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$
- Liên tục trên $\mathbb{R}$
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0; 1), (1; a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.

Lưu ý: Hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ còn được viết dưới dạng $y = 2^{-x}$.

2 Hàm số logarit

Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .



Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

- Có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$
- Liên tục trên $(0; +\infty)$
- Có đồ thị đi qua các điểm $(1; 0), (a; 1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.

B

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số mũ và hàm số logarit

Phương pháp: Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tùy ý. Xét $1 \neq a > 0$:

- Hàm số $y = a^{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
- Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

Đặc biệt: Với hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$ ta lưu ý “mũ n ” của $f(x)$:

- Nếu $n:2 \longrightarrow$ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$:
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$
- Nếu $n \nmid 2 \longrightarrow$ Điều kiện xác định của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$:
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có “mũ n ” ta chú ý xem “ n ” chẵn hay lẻ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định D của các hàm số sau:

a) $y = \log_3(x+2)$

b) $y = \log(x+1)^2$

c) $y = \log_2(2-x) + (x+1)^{-2}$

d) $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$

e) $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$

f) $y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$

Lời giải

a) Điều kiện: $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Suy ra tập xác định của hàm số đã cho là: $D = (-2; +\infty)$.

b) Hàm số xác định khi $(x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. TXĐ của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$. Vậy $D = (-\infty; 2) \setminus \{-1\}$.

d) Hàm số xác định khi: $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$. Vậy $D = (2; 3)$.

e) Điều kiện: $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Vậy hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

f) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \frac{x+3}{2-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$ là: $D = (-3; 2)$.

Bài tập 2: Tìm tập xác định D của các hàm số sau:

$$a) y = \sqrt{\log_{0,2}(x^2 - 2x + 1)}$$

$$b) y = (x^2 - 4)^{-2} + \log_{\sqrt{3}}(2x + 1)$$

$$c) y = \log_2(\log_3 x)$$

$$d) y = (x - 3)^{-2} + \log_4(x - 2)$$

$$e) y = (1 - x)^{\frac{2}{3}} + \log_2(x + 1).$$

$$f) y = \frac{2}{\log_4 x - 3}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ \log_{0,2}(x^2 - 2x + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in [0; 2] \end{cases} \Leftrightarrow D = [0; 2] \setminus \{1\}$$

$$b) \text{ Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Tập xác định: } D = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$$

$$c) \text{ Hàm số xác định khi và chỉ khi } \log_3 x > 0 \Leftrightarrow x > 1. \text{ Vậy TXĐ của hàm số là: } D = (1; +\infty).$$

$$d) \text{ Tập xác định của hàm số: } \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > 2 \end{cases}. \text{ Vậy TXĐ của hàm số là } D = (2; +\infty) \setminus \{3\}$$

$$e) \text{ Điều kiện } \begin{cases} 1 - x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1. \text{ Vậy TXĐ của hàm số là } D = (-1; 1)$$

$$f) \text{ Hàm số } y = \frac{2}{\log_4 x - 3} \text{ xác định khi } \begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } D = (0; 64) \cup (64; +\infty).$$

Bài tập 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$a) y = \log_3(x - 4)$$

$$b) y = (\pi + 1)^x$$

$$c) y = \ln(3x - 6)$$

$$d) y = [\ln(x - 2)]^x$$

$$e) y = \frac{1}{\log_3(2x^2 - x)}.$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện xác định của hàm số là } x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4.$$

$$\text{Vậy TXĐ của hàm số là } D = (4; +\infty).$$

$$b) \text{ Vì } \pi + 1 \text{ là một hằng số nên tập xác định của hàm số đã cho là } D = \mathbb{R}.$$

$$c) \text{ Hàm số } y = \ln(3x - 6) \text{ xác định } \Leftrightarrow 3x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 2. \text{ Vậy tập xác định } D = (2; +\infty).$$

$$d) \text{ Điều kiện: } \ln(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 1 \Leftrightarrow x > 3. \text{ Vậy TXĐ của hàm số là: } D = (3; +\infty).$$

$$\text{e) Hàm số xác định khi } \begin{cases} 2x^2 - x > 0 \\ \log_3(2x^2 - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \vee x > \frac{1}{2} \\ 2x^2 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \vee x > \frac{1}{2} \\ x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } D = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

Bài tập 4: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(-x^2 + 2023x - 2022)$ có bao nhiêu số nguyên?

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2 + 2023x - 2022 > 0 \Leftrightarrow x \in (1; 2022)$.

Vậy có tất cả 2020 số nguyên trong tập xác định của hàm số đã cho.

Bài tập 5: Tìm m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = (-m)^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2 \text{ hay } m \in (-2; 2).$$

Bài tập 6: Tìm m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 9)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

Lời giải

Để hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ thì: $x^2 - 2mx + 9 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$

Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 7: Tìm m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x\sqrt{m+2} + 26)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

Ta có: $y = \log(x^2 - 2x\sqrt{m+2} + 26)$.

Để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ điều kiện là $x^2 - 2x\sqrt{m+2} + 26 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0, m \in \mathbb{R} \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \geq 0, m \in \mathbb{R} \\ m+2-26 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -2 \leq m < 24 \end{cases}.$$

$\Rightarrow m \in \{-2, -1, \dots, 22, 23\}$. Vậy có 26 giá trị m nguyên.

Bài tập 7: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số

$$y = \frac{2023}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3} \text{ xác định trên khoảng } (0; +\infty)$$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3 \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

hay phương trình $mt^2 - 4t + m + 3 = 0, (1)$ vô nghiệm $t \in \mathbb{R}$

Nếu $m = 0$ thì $(1) \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$ không thỏa mãn.

Nếu $m \neq 0$ thì (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 4 - m(m + 3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 1 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $m \in (-2023; 2023) \Rightarrow m \in (-2023; -4) \cup (1; 2023)$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ suy ra có 4039 giá trị m thỏa mãn.

Phương pháp: Sử dụng kiến thức đã được nêu ở phần lý thuyết

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Vẽ đồ thị các hàm số sau đây:

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y = \log x$

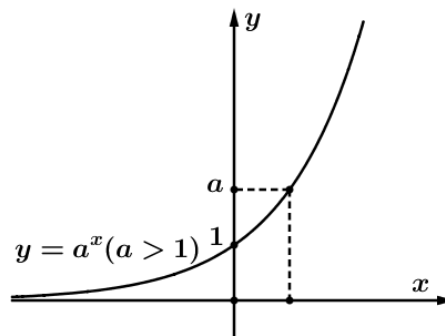
d) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Lời giải

a) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

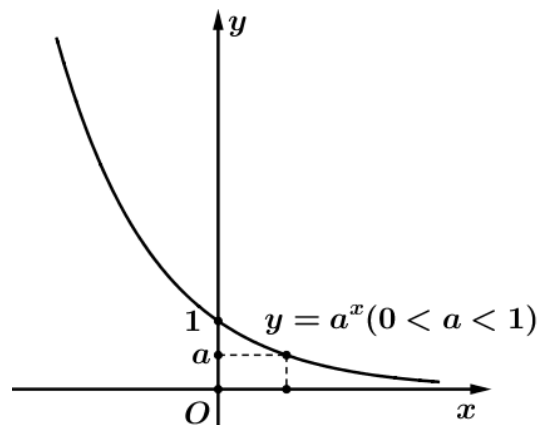
Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



b) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

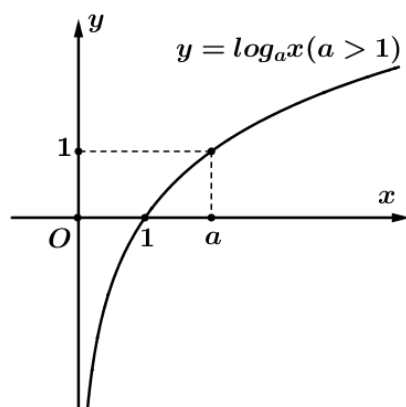
Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



c) Lập bảng giá trị

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log x$	-0,3	0	0,3	0,6	0,9

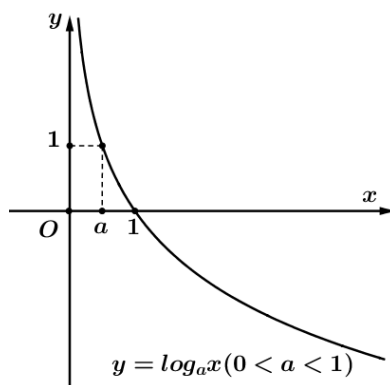
Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



d) Lập bảng giá trị

x	1	3	9	27
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	-3	-1	1	3

Đồ thị hàm số có dạng như hình vẽ sau:



Bài tập 2: Biết đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $a, b > 0; a, b \neq 1$

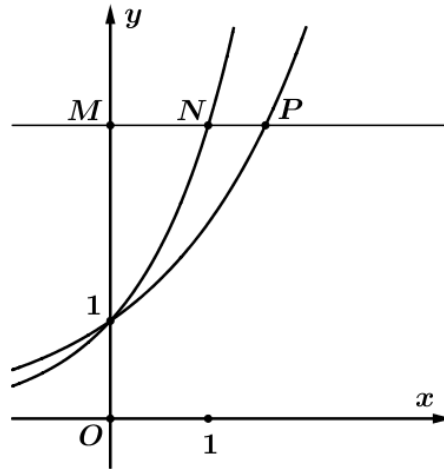
Vì đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ nên điểm

$A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_b x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = a^{\frac{1}{2}} \\ 2 = \log_b \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow T = a^2 + 2b^2 = 4^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 17.$$

Vậy giá trị của biểu thức bằng 17 .

Bài tập 3: Cho hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ (a, b là các số dương khác 1) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$ như hình vẽ. Vẽ đường thẳng $y = c > 1$ cắt trục tung và $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại M, N, P . Biết rằng $S_{OMN} = 3S_{ONP}$. Tìm mối liên hệ giữa a và b .



Lời giải

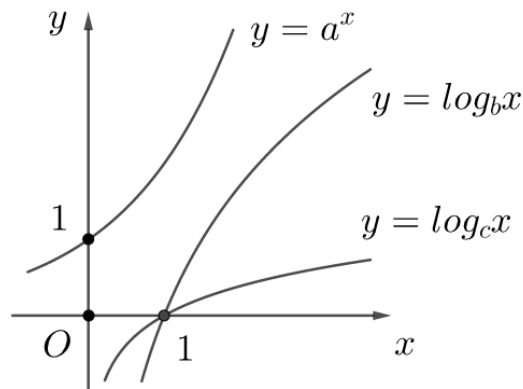
Ta có: $a^x = c \Rightarrow x = \log_a c \Rightarrow x_N = \log_a c$ và $b^x = c \Rightarrow x = \log_b c \Rightarrow x_P = \log_b c$

Theo đề bài: $S_{OMN} = 3S_{ONP} \Rightarrow MN = 3NP \Rightarrow 3MP = 4MN$

Suy ra $3x_P = 4x_N \Rightarrow 3\log_b c = 4\log_a c \Rightarrow \sqrt[3]{b} = \sqrt[4]{a} \Rightarrow a^3 = b^4$.

Vậy $a^3 = b^4$.

Bài tập 4: Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho trong hình bên. Hãy so sánh các số thực a, b, c

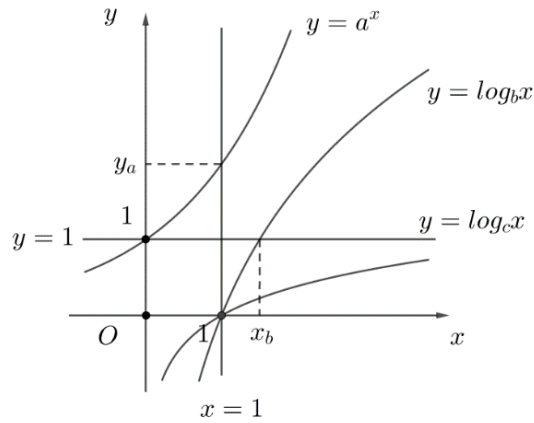


Lời giải

Xét $y = 1$ thì ta có $\begin{cases} 1 = \log_b x \\ 1 = \log_c x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = x_b \\ c = x_c \end{cases} \Leftrightarrow x_c > x_b$.

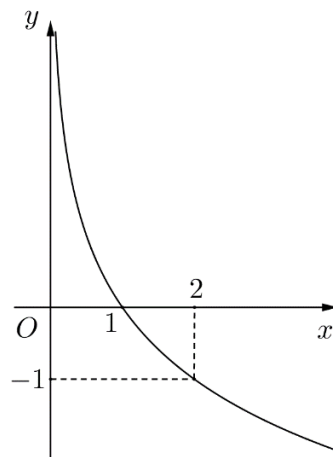
Xét $x = 1$ ta lại có $y = a^1 = a \Leftrightarrow a = y_a$.

Theo hình vẽ: $x_c > y_a$ và $y_a > x_b$.



Vậy $b < a < c$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có đồ thị như hình vẽ.



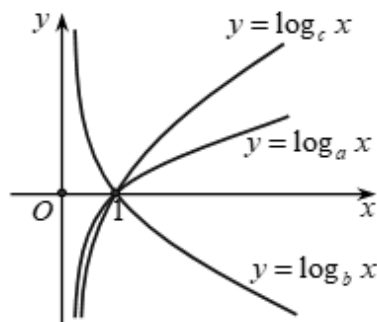
Tìm giá trị của a .

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đi qua điểm $(2; -1)$ nên $\log_a 2 = -1$.

$$\text{Khi đó } a^{-1} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 6: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. So sánh các số a, b, c .



Lời giải

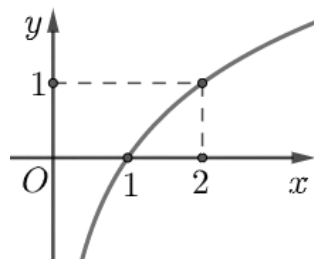
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow 0 < b < 1$.

Và đồ thị ta thấy hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_c x$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow a, c > 1$

$$\text{Xét } x > 1: \log_c x > \log_a x \Rightarrow \log_c x > \frac{1}{\log_x a} \Rightarrow \log_c x \cdot \log_x a > 1 \Leftrightarrow \log_c a > 1 \Leftrightarrow a > c.$$

Suy ra $b < c < a$.

Bài tập 7: Cho các hàm số $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $y = 2^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



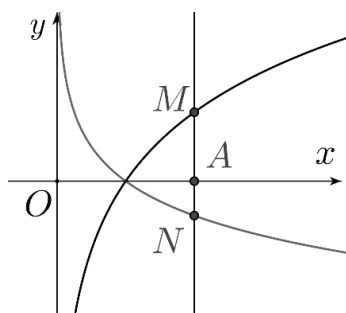
Lời giải

Đây là dạng đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nên loại $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $y = 2^x$.

Hàm số đồng biến loại $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Đồ thị đi qua điểm $(2; 1)$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$.

Bài tập 8: Cho số thực dương a khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào vuông góc với trục hoành mà cắt các đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$, $y = \log_a x$ và trục hoành lần lượt tại M, N và A thì $AM = 2AN$ (hình vẽ bên). Tính giá trị của a .



Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy $0 < a < 1$.

Đường thẳng $x = m (m > 0)$ cắt đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$, $y = \log_a x$ và trục hoành lần lượt tại $M(m; \log_2 m)$, $N(m; \log_a m)$ và $A(m; 0)$.

$$\text{Theo đề } AM = 2AN \Leftrightarrow |\log_2 m| = 2|\log_a m|, \forall m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 m = \log_a m, \forall m > 0 \\ \log_2 m = -\log_a m, \forall m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 m = \log_a m, \forall m > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} m = \log_a m, \forall m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vì $0 < a < 1$ nên $a = \frac{1}{2}$.

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản để áp dụng vào các bài toán thực tế

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,015t}$.

- Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.
- Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Lời giải

- Khi $t = 0, m(0) = 13e^{-0,015 \times 0} = 13e^0 = 13$. Vậy khối lượng của chất phóng xạ ban đầu là 13kg.
- Để tìm khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 45 ngày, ta sử dụng công thức $m(t) = 13e^{-0,015t}$ và thay $t = 45$ vào: $m(45) = 13e^{-0,015 \cdot 45} \approx 6,19$ kg.

Bài tập 2: Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1), 0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Lời giải

Áp dụng công thức: $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$ ta được:

$$M(6) = 75 - 20\ln(6+1) = 75 - 20\ln 7 \approx 60,39$$

Vậy khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là khoảng 60,39%.

Bài tập 3: Cường độ một trận động đất M (Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

Lời giải

Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter khi đó áp dụng công thức

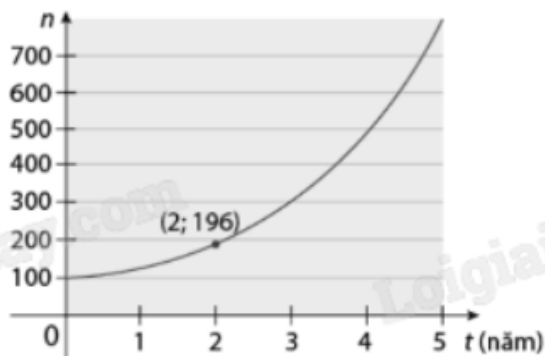
$$M_1 = \log A - \log A_0 \Leftrightarrow 8 = \log A - \log A_0$$

Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$$M_2 = \log(4A) - \log A_0 \Leftrightarrow M_2 = \log 4 + \log A - \log A_0 = \log 4 + 8 \approx 8,6.$$

Vậy cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là 8,6 độ Richter.

Bài tập 4: Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như hình vẽ. Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t) = C \cdot a^t$



- Tính số lượng ếch lúc ban đầu.
- Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.
- Dự đoán số lượng ếch sau 20 năm.

Lời giải

- Số lượng ếch ban đầu là 100 con tại $t = 0$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 100)$ và $(2; 196)$ nên ta có:

$$\begin{cases} C \cdot a^0 = 100 \\ C \cdot a^2 = 196 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 100 \\ a^2 = 1,96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 100 \\ a = 1,4 \end{cases} \Rightarrow n(t) = 100 \cdot 1,4^t$$

Vậy hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao là:

$$H(t) = 100 + 100 \cdot 1,4^t$$

- Lượng ếch sau 20 năm: $H(20) = 100 + 100 \cdot 1,4^{20} \approx 83768$ con.

Bài tập 5: Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$ trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

- Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Vì sao?
- Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm a
- Tại độ sâu 20m thì cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 .

Lời giải

- Do cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu nên hàm số $I = I_0 \cdot a^d$ nghịch biến nên $0 < a < 1$.
- Ta có: $0,95I_0 = I_0 \cdot a^1 \Rightarrow a = 0,95$.
- Ta có: $I = I_0 \cdot a^d = I_0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,36I_0$ nên tại độ sâu 20m thì cường độ ánh sáng bằng 36% so với I_0 .

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{3}{2}}$ là
A. $(0; +\infty)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{3}{2}}$ là $(0; +\infty)$.

- Câu 2:** Tập xác định của hàm số $y = \log x$ là
A. $[1; +\infty)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = \log x$ xác định $\Leftrightarrow x > 0$. Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (0; +\infty)$.

- Câu 3:** Tập xác định D của hàm số $y = \ln(1-x)$ là
A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $D = \mathbb{R}$. **C.** $D = (-\infty; 1)$. **D.** $D = (1; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

- Câu 4:** Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là
A. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Điều kiện $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Tập xác định của hàm số đã cho là $D = (1; +\infty)$.

- Câu 5:** Hàm số $y = (x-1)^{2022}$ có tập xác định là
A. $D = \mathbb{R}$. **B.** $D = [1; +\infty)$. **C.** $D = (1; +\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải

Ta có $y = x-1$ xác định trên $\mathbb{R}$ và 2022 là số nguyên dương nên hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

- Câu 6:** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2-\ln x}$ là
A. $(0; e^2]$. **B.** $(-\infty; e^2)$. **C.** $(-\infty; e^2]$. **D.** $[e^2; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq e^2 \\ x > 0 \end{cases}$. Vậy tập xác định $D = (0; e^2]$.

- Câu 7:** Tập xác định của hàm số $y = 5^{x+1} + 12$ là
A. $[0; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $D = \mathbb{R}$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 7x) + 3}$ là:

- A.** $(-8; -7) \cup (0; 1)$. **B.** $[-8; -7] \cup (0; 1]$. **C.** $[-8; -7) \cup (0; 1)$. **D.** $[-8; -7] \cup (0; 1]$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 + 7x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 7x) + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x > 0 \\ x^2 + 7x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x > 0 \\ x^2 + 7x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -7 \\ -8 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq x < -7 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases}. \text{ Vậy tập xác định của hàm số là } D = [-8; -7) \cup (0; 1].$$

Câu 9: Tập xác định D của hàm số $y = (x - 3)^{-5} + \log_3(4 - x)$ là

- A.** $D = (3; 4)$. **B.** $D = (-\infty; 4) \setminus \{3\}$. **C.** $D = (4; +\infty)$. **D.** $D = (-\infty; 4)$.

Lời giải

$$\text{Hàm số đã cho xác định khi: } \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\text{Tập xác định của hàm số đã cho là } D = (-\infty; 4) \setminus \{3\}.$$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x - m + 1)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A.** $m < -3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m > -3$. **D.** $m < 3$.

Lời giải

$$\text{Hàm số } y = \log_3(x^2 - 4x - m + 1) \text{ xác định với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 4x - m + 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4 + m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3$$

Câu 11: Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln(3 - x) + x^\pi$

- A.** $(-\infty; 3]$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 3)$. **D.** $(0; 3)$.

Lời giải

$$\text{Hàm số có nghĩa khi } \begin{cases} 3 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y = x^{\frac{1}{3}} + \log_3(1 - x)$.

- A.** $D = (0; 1]$. **B.** $D = (0; +\infty)$. **C.** $D = (0; 1)$. **D.** $D = (1; +\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy tập xác định $D = (0; 1)$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\log_2 x - 1}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. B. $(0; +\infty)$. C. $(0; +\infty) \setminus \{2\}$. D. $(0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định $D = (0; +\infty) \setminus \{2\}$.

Câu 14: Tập xác định của hàm số $y = (x - 2021)^{\frac{2019}{2021}}$ là

- A. $(-2021; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{2021\}$. C. $(2021; +\infty)$. D. $(-\infty; 2021)$.

Lời giải

Điều kiện: $x - 2021 > 0 \Leftrightarrow x > 2021 \Leftrightarrow x \in (2021; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (2021; +\infty)$.

Câu 15: Tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3 \frac{2x}{x+1} - 1}}$ là:

- A. $D = (-\infty; -3)$. B. $D = (-1; +\infty)$. C. $D = (-3; -1)$. D. $D = (0; 3)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{2x}{x+1} > 1 \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x+1} > 3^1 \\ \frac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 3$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{x+1} > 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-3; -1)$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $m > 2$. C. $-2 < m < 2$. D. $m < 2$.

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 + mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Câu 17: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

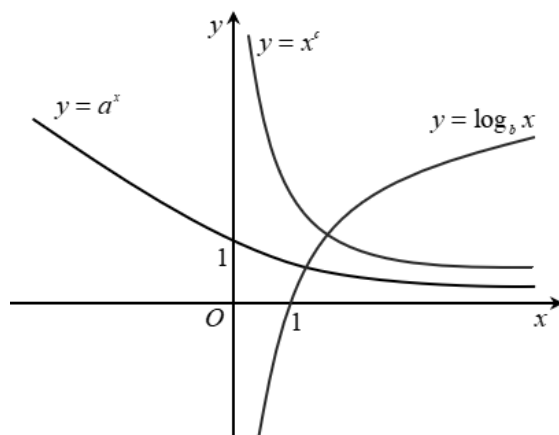
- A. $m \geq 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq 2$. D. $m > 2$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 2x - m + 1 > 0$. Để hàm số có tập xác định là $\mathbf{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0 \forall x \in \mathbf{R}$

$$\Leftrightarrow (-1)^2 - (-m + 1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$$

Câu 18: Cho các đồ thị hàm số $y = a^x, y = \log_b x, y = x^c$ ở hình vẽ sau đây.



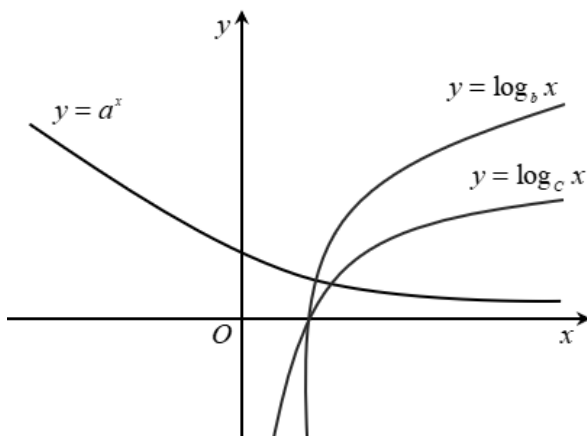
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $0 < c < 1 < a < b$. **B.** $c < 0 < a < 1 < b$. **C.** $c < 0 < a < b < 1$. **D.** $0 < c < a < b < 1$.

Lời giải

Ta thấy đồ thị $y = x^c$ đi xuống nên $c < 0$, đồ thị $y = a^x$ đi xuống nên $0 < a < 1$, đồ thị $y = \log_b x$ đi lên nên $b > 1$.

Câu 19: Cho các hàm số $y = a^x, y = \log_b x, y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định **đúng**?



- A.** $b > c > a$. **B.** $b > a > c$. **C.** $a > b > c$ **D.** $c > b > a$.

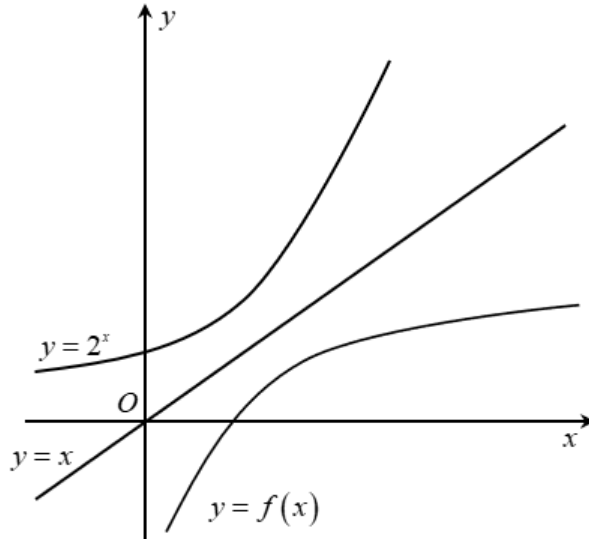
Lời giải

Hàm $y = a^x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Hàm $y = \log_b x, y = \log_c x$ đồng biến nên $b, c > 1$

Đường thẳng $y = 1$ cắt ĐTHS $y = \log_c x, y = \log_b x$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là c và b . Ta thấy $b < c$.

Câu 20: Cho ba hàm số $y = 2^x, y = x, y = f(x)$ có đồ thị như hình bên, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

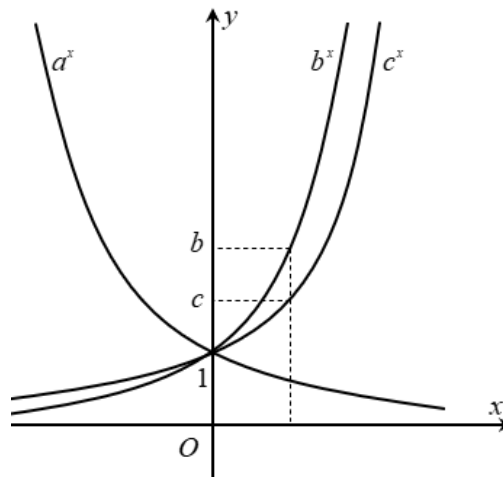


- A.** $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. **B.** $y = f(x) = \ln x$. **C.** $y = f(x) = \log_2 x$. **D.** $y = f(x) = \log x$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = 2^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 21: Cho a, b, c là ba số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho ở hình vẽ dưới đây. Mệnh nào sau đây đúng?



- A.** $a < b < c$. **B.** $b < c < a$. **C.** $c < a < b$. **D.** $a < c < b$.

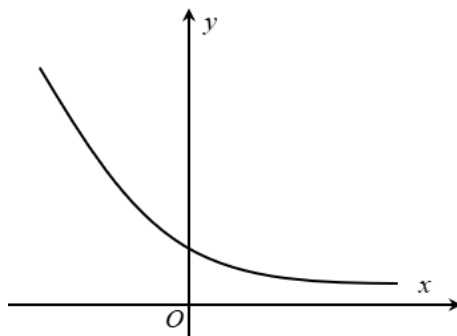
Lời giải

Dựa vào đồ thị, dễ thấy $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ b, c > 1 \end{cases}$.

Đường thẳng $x = 1$ cắt hai đồ thị $y = b^x$, $y = c^x$ lần lượt tại b , c và ta thấy $b > c$.

Vậy $a < c < b$.

Câu 22: Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào sau đây?



A. $y = \log_2 x$.

B. $y = (0,8)^x$.

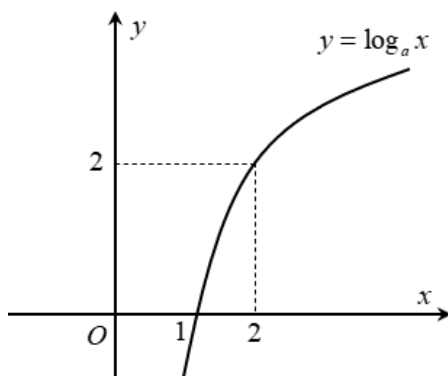
C. $y = \log_{0,4} x$.

D. $y = (\sqrt{2})^x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ và hàm số nghịch biến suy ra $y = (0,8)^x$.

Câu 23: Tìm a để đồ thị hàm số $y = \log_a x (0 < a \neq 1)$ có đồ thị là hình bên.



A. $a = \sqrt{2}$.

B. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

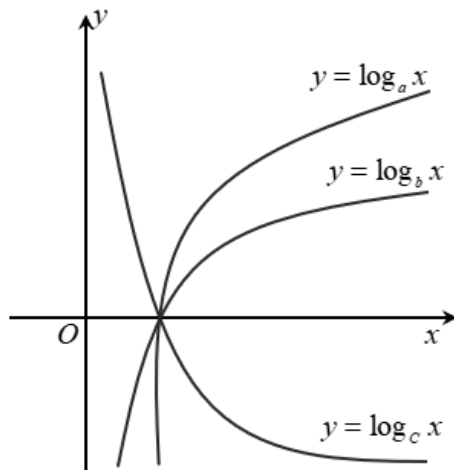
C. $a = \frac{1}{2}$.

D. $a = 2$

Lời giải

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;2)$ nên $2 = \log_a 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$.

Câu 24: Cho a, b, c là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **đúng**?



A. $a < b < c$.

B. $b < c < a$.

C. $c < a < b$.

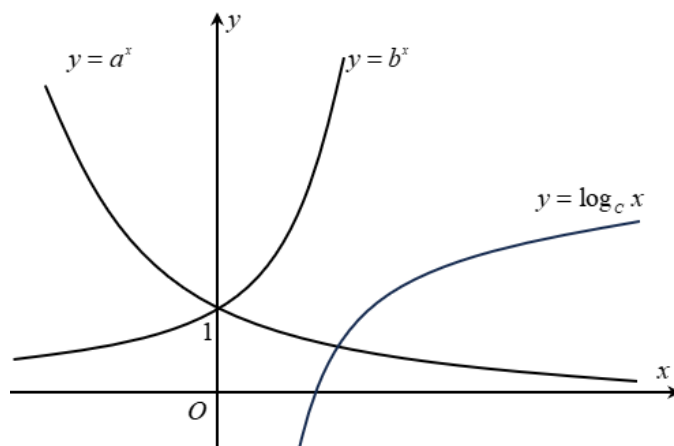
D. $c < b < a$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có $0 < c < 1; a > 1; b > 1$ và $\forall x > 1; \log_a x > \log_b x$ nên $1 < a < b$.

Vậy $c < a < b$.

Câu 25: Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < b < c$.

B. $a < b = c$.

C. $b < c < a$.

D. $a < c < b$.

Lời giải

Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $0 < a < 1$.

Các hàm số $y = b^x, y = \log_c x$ đồng biến trên tập xác định của nó nên $b, c > 1$.

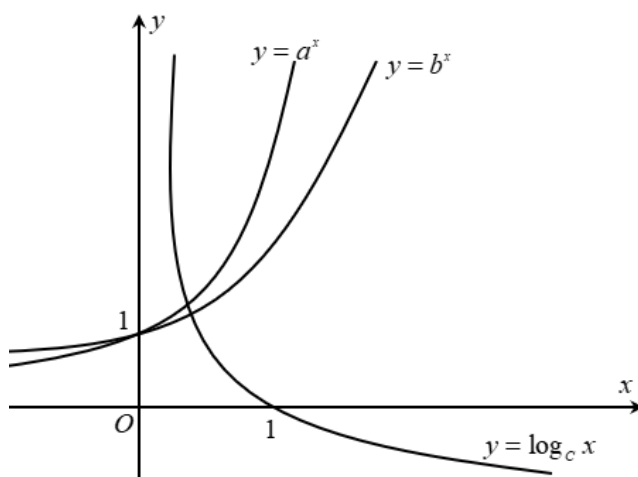
Suy ra $0 < a < b, c < 1$

Xét đồ thị hàm số $y = \log_c x$, ta có $\log_c 2 > 1 \Leftrightarrow c < 2$.

Xét đồ thị hàm số $y = b^x$, ta có $b^1 > 2 \Leftrightarrow b > 2$.

Do đó: $0 < a < c < b$.

Câu 26: Cho đồ thị hàm số $y = a^x; y = b^x; y = \log_c x$ như hình vẽ. Tìm mối liên hệ của a, b, c .



A. $c < b < a$.

B. $b < a < c$.

C. $a < b < c$.

D. $c < a < b$.

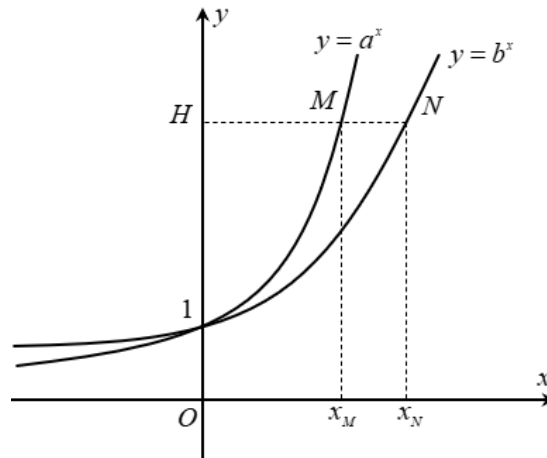
Lời giải

Nhìn đồ thị ta thấy hàm số $y = a^x$ là hàm số đồng biến nên $a > 1$; $y = b^x$ là hàm số đồng biến

nên $b > 1$; $y = \log_c x$ là hàm số nghịch biến nên $0 < c < 1$ do vậy ta có $\begin{cases} 0 < c < a \\ 0 < c < b \end{cases}$

Khi thay $x=1$ vào hai hàm số $y=a^x; y=b^x$ ta thu được $a > b$ vậy $c < b < a$.

Câu 27: Cho a, b là các số thực dương khác 1, đường thẳng d song song trục hoành cắt trục tung, đồ thị hàm số $y=a^x$, đồ thị hàm số $y=b^x$ lần lượt tại H, M, N (như hình bên). Biết $HM = 3MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $4a = 3b$.

B. $b^4 = a^3$.

C. $b^3 = a^4$.

D. $3a = 4b$.

Lời giải

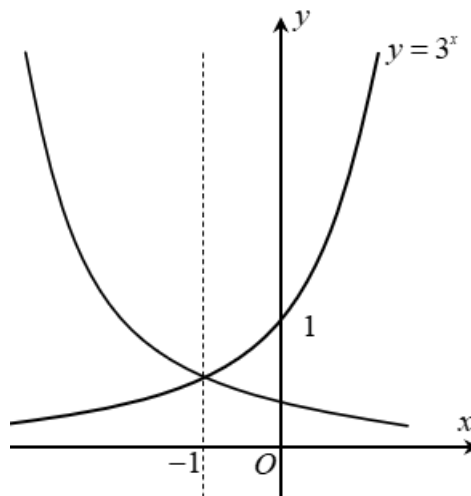
Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y=a^x$ tại điểm $M(x_M; y_M) \Rightarrow y_M = a^{x_M}$.

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y=b^x$ tại điểm $N(x_N; y_N) \Rightarrow y_N = b^{x_N}$.

Mà $y_M = y_N \Rightarrow a^{x_M} = b^{x_N}$.

Ta có: $HM = 3MN \Rightarrow HM = \frac{3}{4}HN \Rightarrow x_M = \frac{3}{4}x_N \Rightarrow a^{\frac{3}{4}x_N} = b^{x_N} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}} = b \Leftrightarrow a^3 = b^4$.

Câu 28: Biết hàm số $f(x) = \frac{a}{b^2 \cdot 3^x}$ có đồ thị đối xứng với đồ thị hàm số $y=3^x$ qua đường thẳng $x=-1$. Biết a, b là các số nguyên. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:



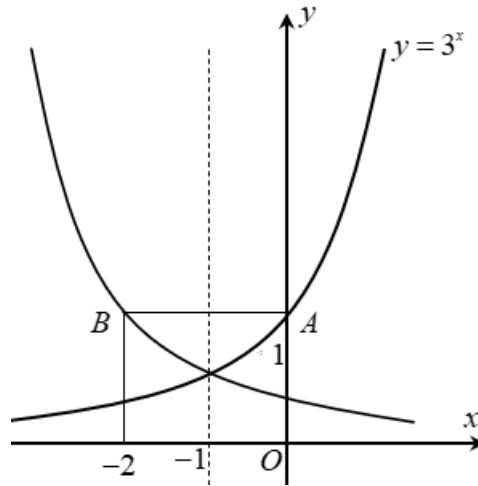
A. $b^2 = 9a$.

B. $b^2 = 4a$.

C. $b^2 = 6a$.

D. $b^2 = a$.

Lời giải



Trên đồ thị hàm số $y = 3^x$ lấy $M(x_0; y_0)$ và gọi $N(x, f(x))$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ và đối xứng với M qua đường thẳng $x = -1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \frac{x + x_0}{2} = -1 \\ f(x) = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -x - 2 \\ y_0 = f(x) \end{cases}.$$

Thay vào hàm số $y = 3^x$ ta được: $f(x) = 3^{-x-2} = \frac{1}{3^2 \cdot 3^x}$.

Vậy $a = 1; b = 3 \Rightarrow b^2 = 9a$.

Câu 29: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = 2022^x$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_{2022} \frac{1}{2023}\right)$ bằng

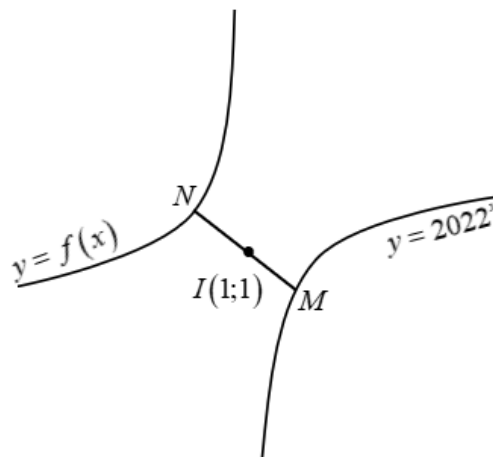
A. -2021.

B. -2023.

C. -2020.

D. 2020.

Lời giải



Gọi $N \in (C): y = f(x) \Rightarrow N(x; f(x))$, M là điểm đối xứng với N qua I

$\Rightarrow M \in (S): y = 2022^x$ và $I(1;1)$ là trung điểm $MN \Rightarrow M(2-x; 2-f(x))$

Mà $M \in (S) \Rightarrow 2-f(x) = 2022^{2-x} \Rightarrow f(x) = 2-2022^{2-x}$

Khi đó ta có:

$$f\left(2 + \log_{2022} \frac{1}{2023}\right) = 2 - 2022^{2 - \left(2 + \log_{2022} \frac{1}{2023}\right)} = 2 - 2022^{\log_{2022} 2023} = 2 - 2023 = -2021$$

Câu 30: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2023}\right)$ bằng

A. 2022.

B. 2024.

C. -2023.

D. -2021.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = a^x$; (C_1) là đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$$M\left(2 + \log_a \frac{1}{2023}; y_M\right) \in (C_1) \Leftrightarrow y_M = f\left(2 + \log_a \frac{1}{2023}\right).$$

$$\text{Gọi } N \text{ đối xứng với } M \text{ qua } I(1;1) \Rightarrow N\left(-\log_a \frac{1}{2023}; 2 - y_M\right).$$

$$\text{Do đồ thị } (C_1) \text{ đối xứng } (C) \text{ qua } I(1;1) \text{ nên } N\left(-\log_a \frac{1}{2023}; 2 - y_M\right) \in (C).$$

$$N \in (C) \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{-\log_a \frac{1}{2023}} \Leftrightarrow 2 - y_M = a^{\log_a 2023} \Leftrightarrow 2 - y_M = 2023 \Leftrightarrow y_M = -2021.$$

$$\text{Vậy } f\left(2 + \log_a \frac{1}{2023}\right) = -2021.$$

Câu 31: Ông An gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép trong một thời gian khá lâu với lãi suất ổn định trong suốt thời gian tiết kiệm là 10% 1 năm. Tết năm nay do dịch bệnh nên ông rút hết tiền trong ngân hàng ra để gia đình chi tiêu. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra 20 triệu để sắm sửa đồ Tết thì ông còn 860 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu năm?

A. 9 năm.

B. 20 năm.

C. 12 năm.

D. 6 năm.

Lời giải

Giả sử ông An đã gửi tiết kiệm trong n năm.

Số tiền ông đã nhận được là 880 triệu.

Theo công thức lãi suất kép, ta có

$$880.10^6 = 500.10^6 (1 + 0,1)^n \Leftrightarrow n = \log_{1,1} \frac{880}{500} \Leftrightarrow n \approx 5,93.$$

Vậy, ông A đã gửi tiết kiệm trong 6 năm.

Câu 32: Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6,3% / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó

sử dụng công thức $y = \log_{1,063} \left(\frac{x}{20} \right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

A. 7 năm. B. 6,6 năm. C. 6 năm. D. 5 năm.

Lời giải

Người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng sau $y = \log_{1,063} \left(\frac{30}{20} \right) = 6.6 \approx 7$ năm.

Câu 33: Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2023 với mức lương khởi điểm là a đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 60% lương, phần còn lại tiết kiệm hết để mua nhà. Giá trị hiện tại của căn nhà là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị tăng thêm 5%. Với mức lương khởi điểm a là bao nhiêu thì sau 12 năm anh ta mua được nhà (kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 19028000 đồng. B. 16092000 đồng. C. 20092000 đồng. D. 18092000 đồng.

Lời giải

Đầu tiên ta tính giá trị của ngôi nhà sau 12 năm:

Giá trị ngôi nhà sau 2 năm: $10^9 + 10^9 \cdot 0,05 = 10^9 \cdot (1 + 0,05)$

Giá trị ngôi nhà sau 4 năm: $10^9 + 10^9 \cdot 0,05 + (10^9 + 10^9 \cdot 0,05) \cdot 0,05 = 10^9 \cdot (1 + 0,05)^2$

Lần lượt ta có giá trị ngôi nhà sau 12 năm: $10^9 + 10^9 \cdot 0,05 + (10^9 + 10^9 \cdot 0,05) \cdot 0,05 = 10^9 \cdot (1 + 0,05)^6$

Sau khi chi tiêu hàng tháng thì số tiền tiết kiệm là 40% lương.

Có nghĩa là trong hai năm 2023 – 2024, số tiền tiết kiệm là: $24.0,4a$

Trong hai năm tiếp theo 2025 – 2026, số tiền tiết kiệm là: $24.0,4a(1 + 0,01)$

Tương tự vậy số tiền tiết kiệm được trong 12 năm là:

$$24.0,4a \left[1 + (1 + 0,01) + (1 + 0,01)^2 + (1 + 0,01)^3 + (1 + 0,01)^4 + (1 + 0,01)^5 \right] = 74,069856a$$

Để mua được nhà thì số tiền trên phải bằng số tiền sau 12 năm:

$$74,069856a = 10^9 \cdot 1,05^6 \Rightarrow a = 18092321$$

Vậy số a gần bằng 18092000.

Câu 34: Ông A có số tiền 120 triệu đồng gửi tiết kiệm theo thẻ thức lãi suất kép, có hai loại để lựa chọn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12,5% trên một năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1% trên một tháng. Ông A muốn gửi 12 năm. Theo anh chị ông A gửi loại nào sau 12 năm sẽ nhận được tổng số tiền nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. Gửi theo kì hạn năm lãi hơn kì hạn tháng 9879000 đồng.
B. Gửi theo kì hạn tháng lãi hơn kì hạn năm 9687000 đồng.
 C. Gửi theo hai loại bằng nhau.
 D. Gửi theo kì hạn năm lãi hơn kì hạn tháng 9678000 đồng.

Lời giải

Loại kì hạn 12 tháng:

Số tiền có được sau 1 năm: $120.10^6 + 120.10^6 \cdot 0,125 = 120.10^6 \cdot (1 + 0,125)$

Số tiền có được sau 2 năm: $120.10^6 \cdot (1 + 0,125) + 120.10^6 \cdot (1 + 0,125) \cdot 0,125 = 120.10^6 \cdot (1 + 0,125)^2$

Tương tự vậy số tiền có được sau 12 năm: $120.10^6 \cdot (1 + 0,125)^{12} \approx 493186000$ đồng

Loại kì hạn 1 tháng (12 năm là 144 tháng): Số tiền có được sau 12 năm: $120.10^6 \cdot (1 + 0,01)^{144} \approx 502873000$

Vậy số tiền gửi theo kì hạn 1 tháng nhiều hơn kì hạn năm: $502873000 - 493186000 = 9687000$ đồng

Câu 35: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết năm 2023 dân số thành phố Cần Thơ năm 2023 ước tính là 1282000 người và tỉ lệ gia tăng dân số là 1,03%. Hỏi đến năm bao nhiêu thì dân số thành phố Cần Thơ đạt hơn 1,5 triệu người?

A. 2038.

B. 2039.

C. 2040.

D. 2041.

Lời giải

Lấy năm 2023 làm mốc, khi đó $A = 1282000$. Giả sử sau n năm thì dân số thành phố Cần Thơ đạt hơn, tức là $1500000 = 1282000 \cdot e^{0,0103n} \Rightarrow e^{0,0103n} = \frac{750}{641} \Rightarrow 0,0103n = \ln \frac{750}{641} \Rightarrow n \approx 15,25$

Có nghĩa là theo tốc độ tăng dân số này thì sau 16 năm dân số thành phố sẽ đạt 1500000 người vào năm 2039.

Câu 36: Ông B vay ngân hàng 600 triệu đồng và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất 0,8% trên tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sao bao lâu ông B sẽ trả hết số nợ ngân hàng

A. 50.

B. 55.

C. 60.

D. 65.

Lời giải

Số tiền còn lại sau 1 tháng: $600.10^6 + 600.10^6 \cdot 0,8\% - 10.10^6$

Khi đó ta có thể gọi số tiền vay là A , lãi suất là r , số tiền trả mỗi cuối tháng là m và n là số tháng để trả hết tiền.

Vậy số tiền còn nợ cuối tháng 1: $A + Ar - m = A(1 + r) - m$

Số tiền còn nợ cuối tháng 2: $A(1 + r) - m + [A(1 + r) - m]r - m = A(1 + r)^2 - \frac{m}{r}[(1 + r)^2 - 1]$

Số tiền còn nợ cuối tháng n : $A(1 + r)^n - \frac{m}{r}[(1 + r)^n - 1]$

Có nghĩa là khi trả hết tiền thì:

$$A(1 + r)^n - \frac{m}{r}[(1 + r)^n - 1] = 0 \Leftrightarrow 600.10^6(1 + 0,8\%) - \frac{10.10^6}{0,8}[(1 + 0,8\%)^n - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + 0,8\%)^n = 1,48384 \Rightarrow n = \log_{1+0,8\%} 1,48384 \approx 49,5$$

Vậy sau 50 tháng thì ông B trả hết nợ.

- Câu 37:** Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P = P_0 e^{ni}$ trong đó $P_0 = 760\text{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000m thì áp suất của không khí là 672,7mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000m gần với số nào sau đây nhất?
A. 530,23mmHg. **B.** 540,23mmHg. **C.** 520,23mmHg. **D.** 510,23mmHg.

Lời giải

Áp dụng công thức $P = P_0 e^{ni}$

Ở độ cao 1000m ta có: $P_0 = 760\text{mmHg}$, $n = 1000\text{m}$, $P = 672,71\text{mmHg}$, từ giả thiết này ta tìm được hệ số suy giảm.

$$\text{Ta có } 672,71 = 760e^{1000 \times i} \Leftrightarrow 1000i = \ln \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i \approx -0,00012$$

Khi đó ở độ cao 3000m, áp suất của không khí là: $P = 760e^{-0,00012 \times 3000} \approx 530,2340078$

- Câu 38:** Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau 3,5 ngày đêm? (Kết quả làm tròn đến 3 chữ số thập phân sau dấu phẩy)
A. 22,097 (gam). **B.** 23,097 (gam). **C.** 20,097 (gam). **D.** 24,097 (gam)

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức } m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}.$$

Với $m_0 = 250$, $T = 24\text{ giờ} = 1\text{ ngày đêm}$, $t = 3,5\text{ ngày đêm}$.

$$\text{Ta có: } m(3,5) = 250 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3,5}{1}} \approx 22,097\text{ gam}$$

- Câu 39:** Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đêxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$). Tiếng ồn phát ra từ tiếng gõ phím liên tục ở một bàn phím của máy vi tính, có cường độ âm đo được là 10^{-5} W/m^2 . Giả sử trong phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy vi tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng đo cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là bao nhiêu?
A. 73dB. **B.** 140dB. **C.** 100dB. **D.** 72dB.

Lời giải

Nếu chỉ có một bàn phím có $L(db) = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70 \text{ dB}$

Cả hai bàn phím cùng gõ: $L_2 = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10 \log 2 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log 2 + 70 \approx 73 \text{ dB}$

Vậy có thêm một bàn phím gõ thì mức cường độ âm tăng thêm 3 dB.

Câu 40: Cho biết chu kì bán hủy của chất phóng xạ plutonium Pu^{239} là 24.360 năm (tức là lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính bởi công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t . Hỏi 10 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

A. 48720.

B. 10000.

C. 82333.

D. 82235.

Lời giải

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ phân hủy hàng năm của Pu^{239} .

Pu^{239} có chu kì bán hủy của chất phóng xạ plutonium Pu^{239} là 24.360 năm, do đó:

$$5 = 10e^{r \cdot 24360} \Leftrightarrow r = \frac{\ln \frac{5}{10}}{24360} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} \approx -2,84543 \cdot 10^{-5} \approx -0,000028$$

Vậy sự phân hủy của Pu^{239} được tính bởi công thức $S = Ae^{-0,000028t}$ trong đó S, A tính bằng gam, t tính bằng năm.

Theo đề bài cho ta có: $1 = 10e^{-0,000028t} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln 10}{-0,000028} \approx 82235$ năm.

Vậy sau khoảng 82235 năm thì 10 gam Pu^{239} sẽ phân hủy còn lại 1 gam.

Câu 41: Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

A. 8.4.

B. 32.

C. 12.

D. 8.6.

Lời giải

Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richte khi đó áp dụng công thức

$$M_1 = \log A - \log A_0 \Rightarrow 8 = \log A - \log A_0$$

Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là: $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$$M_2 = \log(4A) - \log A_0 = \log 4 + \log A - \log A_0 = \log 4 + 8 \approx 8.6 \text{ độ Richte.}$$

Câu 42: Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản

có cường độ đo được 6 độ Richt. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản.

A. $\frac{1}{100}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 2.

D. 100.

Lời giải

Trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richt khi đó áp dụng công thức

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0 \Rightarrow 8 = \log A_1 - \log A_0 \quad (1).$$

Trận động đất ở Nhật có cường độ 6 độ Richt khi đó áp dụng công thức là:
 $M_2 = \log A_1 - \log A_0 \Rightarrow 6 = \log A_2 - \log A_0 \quad (2).$

Lấy (1) – (2) về với về ta được: $2 = \log A_1 - \log A_2 \Leftrightarrow 2 = \log \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = 100 \Leftrightarrow A_1 = 100A_2$.

Vậy trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp 100 lần biên độ trận động đất ở Nhật bản.

Câu 43: Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đêxinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(dB) = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ w/m}^2$). Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68 dB. Hãy tính cường độ âm tương ứng ra đơn vị w/m^2

A. $6,3 \cdot 10^{-6} \text{ w/m}^2$.

B. $6,3 \cdot 10^{-72} \text{ w/m}^2$.

C. $6,3 \cdot 10^6 \text{ w/m}^2$.

D. $6,3 \text{ w/m}^2$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $L(dB) = 68 \text{ dB}, I_0 = 10^{-12} \text{ w/m}^2$. Tính I.

Áp dụng công thức ta có $L(dB) = 10 \log \frac{I}{I_0} \Leftrightarrow 68 = 10 \log \frac{I}{I_0} \Leftrightarrow \log \frac{I}{I_0} = 6,8 \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{6,8}$

$$\frac{I}{I_0} = 10^{0,8} \cdot 10^6 \Leftrightarrow I = 10^{0,8} \cdot 10^6 \cdot I_0 \approx 6,3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12} \approx 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ w/m}^2.$$

Câu 44: Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số 1,05%/năm. Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì đến năm bao nhiêu năm dân số đạt 10 tỉ người.

A. 2040.

B. 2044.

C. 2048.

D. 2052.

Lời giải

Dân số thế giới sau 1 năm tính từ năm 2020 là $7,795 \cdot (1 + 1,05\%)^1 = 7,795 \cdot 1,0105^1$ tỉ người.

Dân số thế giới sau 2 năm tính từ năm 2020 là $7,795 \cdot 1,0105 \cdot (1 + 1,05\%)^1 = 7,795 \cdot 1,0105^2$ tỉ người.

....

Dân số thế giới sau t năm tính từ năm 2020 là $P(t) = 7,795.1,0105^t$ tỉ người.

Giả sử sau ít nhất t năm tính từ năm 2020 thì dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

Khi đó $7,795.1,0105^t = 10 \Leftrightarrow t \approx 23,85$.

Do đó sau ít nhất 24 năm thì dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

Vậy đến năm $2020 + 24 = 2044$ dân số đạt 10 tỉ người.

- Câu 45:** Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là deciben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$). Hai cây đàn ghita giống nhau, cùng hoà tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc đàn phát ra âm có mức cường độ âm trung bình là 60 dB. Hỏi mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là bao nhiêu?
- A. 120. B. 80. C. 180. **D. 63.**

Lời giải

Mức cường độ âm do một chiếc đàn ghita phát ra $L_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 60 \text{ dB}$.

Mức cường độ âm do hai chiếc đàn ghita cùng phát ra là:

$$L_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10 \log 2 + 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log 2 + 60 \approx 63 \text{ dB}.$$

Vậy mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là 63 dB.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ và $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- c) Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ nằm bên phải trục tung.
- d) Đồ thị hàm số $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ cắt trục tung.

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.

- b) Sai: Vì cơ số $\frac{2023}{2024} \in (0;1)$ nên hàm số $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- c) Đúng: Hàm số $y = \log_{\frac{2024}{2023}} x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$ nên có đồ thị nằm bên phải trục tung.
- d) Sai: Vì $\left(\frac{2023}{2024}\right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = \left(\frac{2023}{2024}\right)^x$ không cắt trục tung.

Câu 2: Cho hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) có đồ thị (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $D = (0; +\infty)$ và tập giá trị của hàm số là $T = \mathbb{R}$
- b) Đồ thị (C) đi qua điểm $(1;0)$, nằm bên phải trục tung
- c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$.
- d) Đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y = 2 - \log_a(4-x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;1)$.

Lời giải

- a) Đúng: Tập xác định của hàm số là $D = (0; \infty)$ và tập giá trị của hàm số là $T = \mathbb{R}$
Hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) xác định khi: $x > 0 \Rightarrow D = (0; \infty)$.
Hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) nhận mọi giá trị nên tập giá trị của hàm số là $T = \mathbb{R}$
- b) Đúng: Đồ thị (C) đi qua điểm $(1;0)$, nằm bên phải trục tung và nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
Thay tọa độ điểm $(1;0)$ vào $y = \log_a x$ ta thấy thỏa mãn suy ra đồ thị (C) đi qua điểm $(1;0)$.
Vì $x > 0$ nên đồ thị (C) nằm bên phải trục tung.
- c) Sai: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$.
Ta có: $y' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0, a > 1 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $a > 1$.
- d) Đúng: Đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y = 2 - \log_a(4-x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;1)$.
Lấy $M(x; y) \in (C)$. Gọi $I(2;1)$ là trung điểm $MN \Rightarrow N(4-x; 2-y)$
Để thấy $N(4-x; 2-y)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2 - \log_a(4-x)$
Vậy đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y = 2 - \log_a(4-x)$ đối xứng nhau qua điểm $I(2;1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \log_5 x$ có đồ thị (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành.
- d) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

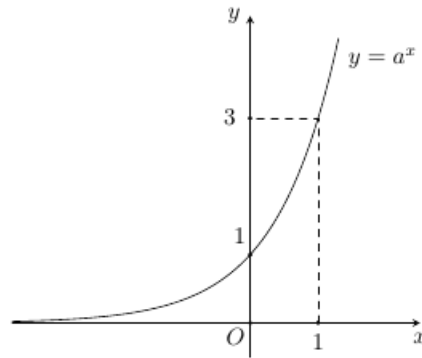
Lời giải

- a) Sai: Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là $D = (0; +\infty)$.
- b) Đúng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

c) Sai: Đồ thị (C) nằm bên phải trục tung.

d) Đúng: Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số cho bởi công thức $y = 3^x$.

c) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ tại điểm có hoành độ không âm.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -x + 1$ tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

a) Sai: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Đồ thị hàm số $y = a^x$ đi qua điểm $(1;3)$ suy ra $a = 3$.

c) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 3^x$ và đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ là:

$$3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1.$$

d) Sai: Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 3^x$ và đường thẳng $y = -x + 1$ là:

$$3^x = -x + 1 \quad (1)$$

Ta có hàm số $y = 3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đường thẳng $y = -x + 1$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta lại có $3^0 = -0 + 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 5: Cho các hàm số $y = \log_a x$, $y = a^x$ với a là số thực dương khác 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

b) Hàm số $y = \log_a x$ và hàm số $y = a^x$ có cùng tập giá trị.

c) Hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

d) Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ luôn đi qua điểm $A(a;1)$.

Lời giải

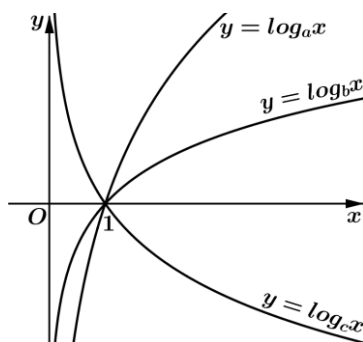
a) Đúng: Đồ thị hàm số $y = a^x$ và đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

b) Sai: Hàm số $y = \log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và hàm số $y = a^x$ có tập giá trị là $(0; +\infty)$.

c) Đúng: Hàm số $y = a^x$ với $0 < a < 1$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

d) Sai: Đồ thị hàm số $y = a^x$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ luôn đi qua điểm $A(a; a^a)$ hoặc $A(0;1)$.

Câu 6: Cho các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ với a, b, c là ba số thực dương khác 1. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Đồ thị các hàm số trên đều đi qua điểm $A(1;0)$.

b) Hàm số $y = \log_c x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

c) Từ đồ thị ta có: $0 < c < 1 < a < b$.

d) Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là

$x_1; x_2$ sao cho $x_2 = 2x_1$. Khi đó $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Xét $\log_a x = 1 \Leftrightarrow x = a$; $\log_b x = 1 \Leftrightarrow x = b$; $\log_c x = 1 \Leftrightarrow x = c \Rightarrow c < 1 < a < b$.

a) Đúng.

b) Sai: Hàm số $y = \log_c x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

c) Đúng: Từ đồ thị suy ra $0 < c < 1 < a < b$

d) Sai: Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

Do $x_2 = 2x_1$ nên $b^3 = 2a^3$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = a^x$ với $0 < a \neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = a^x$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y = a^x$ đi qua điểm $(0;1)$.

c) Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

d) Hàm số $y = a^x$ có tập giá trị là $(a; +\infty)$ nếu $x > 1$ và $a > 1$.

Lời giải

a) Sai: Hàm số $y = a^x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Do $x = 0 \Rightarrow y = 1$, đồ thị hàm số $y = a^x$ là hàm số đi qua điểm $(0; 1)$.

c) Sai: Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

d) Đúng: Nếu $x > 1$ và $a > 1$ thì $a^x > a^1 = a$ do đó hàm số $y = a^x$ có tập giá trị là $(a; +\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = 2^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 4)$

d) Đồ thị hàm số $y = 2^x$ đối xứng với đồ thị $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ qua trục tung.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y = 2^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ do đó hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$

b) Sai: Hàm số $y = 2^x$ có cơ số $2 > 1$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

c) Đúng: Thay $A(2; 4)$ vào $y = 2^x$: $2^2 = 4 = y_A$ do đó Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 4)$

d) Đúng: Đồ thị hàm số $y = a^x$ đối xứng với đồ thị $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ qua trục tung với $a > 0$

Câu 9: Cho hàm số $y = \log_4 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$

b) Hàm số có tập giá trị $T = \mathbb{R}$

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3

Lời giải

a) Sai: Hàm số $y = \log_4 x$ xác định trên $(0; +\infty)$ do đó hàm số có tập xác định $D = (0; +\infty)$

b) Đúng: Hàm số $y = \log_4 x$ có tập giá trị $T = \mathbb{R}$

c) Sai: Hàm số $y = \log_4 x$ xác định trên $(0; +\infty)$ và có cơ số $4 > 1$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

d) Sai: Phương trình hoành độ giao điểm: $\log_4 x = 1 \Leftrightarrow x = 4^1 = 4$

Câu 10: Cho các hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ và $y = 2^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có hai hàm số mũ.

b) Đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ đi qua điểm $M(2; -1)$.

c) Đồ thị hàm số $y = 2^x$ đi qua điểm $N(1; -1)$.

d) Hai đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ cắt nhau tại 1 điểm.

Lời giải

a) Sai: Có một hàm số mũ là $y = 2^x$.

- b) Đúng: Khi $x = 2$ thì $y = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ nên đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ đi qua điểm $M(2; -1)$.
- c) Sai: Khi $x = 1$ thì $y = 2^1 = 2$ nên đồ thị hàm số $y = 2^x$ không đi qua điểm $N(1; -1)$.
- d) Đúng: Căn cứ đồ thị, ta thấy hai đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ cắt nhau tại 1 điểm.

Câu 11: Cho các hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = 2^x$; $y = \log_{\sqrt{3}} x$; $y = \log_{0,5} x$ và $y = (0,5)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = 2^x$ có tập giá trị là $(0; +\infty)$.
- b) Hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- c) Có hai hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- d) Có hai hàm số có tập giá trị là $(0; +\infty)$.

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số $y = 2^x$ có tập giá trị là $(0; +\infty)$.
- b) Đúng: Hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- c) Sai: Có ba hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$ là $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = \log_{\sqrt{3}} x$; $y = \log_{0,5} x$.
- d) Đúng: Có hai hàm số có tập giá trị là $(0; +\infty)$ là $y = 2^x$; $y = (0,5)^x$.

Câu 12: Cho các hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = \pi^x$; $y = \ln x$; $y = \log_{0,2} x$ và $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số $y = \log_{\pi} x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- c) Có ba hàm số nghịch biến trên tập xác định.
- d) Có hai hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ có $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$.
- b) Sai: Hàm số $y = \log_{\pi} x$ có $\pi > 1$ nên đồng biến trên tập xác định $(0; +\infty)$.
- c) Đúng: Có ba hàm số nghịch biến trên tập xác định là $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = \log_{0,2} x$ và $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$.
- d) Sai: Có một hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là $y = \ln x$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \log_3(5x - 3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $D = (0; +\infty)$.
- b) Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2; 7)$.

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right]$ là 2

Lời giải

a) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow 5x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{5}$, do đó hàm số có TXĐ: $D = \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

b) Đúng: Với $\forall x_1, x_2 \in \left(\frac{3}{5}; +\infty\right); x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 - 3 < 5x_2 - 3 \Rightarrow \log_3(5x_1 - 3) < \log_3(5x_2 - 3)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

c) Sai: Với $x = 2$ thì $y = \log_3 7$.

Vậy đồ thị hàm số qua điểm $(2; \log_3 7)$ và không đi qua điểm M .

d) Đúng: Do hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$

Suy ra $\underset{\left[\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right]}{\text{Max}} f(x) = f\left(\frac{12}{5}\right) = \log_3\left(5 \cdot \frac{12}{5} - 3\right) = 2$ và $\underset{\left[\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right]}{\text{Min}} f(x) = f\left(\frac{4}{5}\right) = \log_3\left(5 \cdot \frac{4}{5} - 3\right) = 0$.

Vậy $\underset{\left[\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right]}{\text{Max}} f(x) + \underset{\left[\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right]}{\text{Min}} f(x) = 2$.

Câu 14: Cho ba điểm $A(b; \log_a b)$, $B(c; 2\log_a c)$ và $C(b; 3\log_a b)$ với a, b, c dương và đều khác 1.

a) B là trung điểm của AC khi và chỉ khi $b = c > 0$.

b) Ba điểm A, B, C tạo thành tam giác vuông tại A khi và chỉ khi $b = 2c$.

c) Khi ba điểm A, B, C tạo thành tam giác thì có diện tích là $S = \left|(c - b) \cdot \log_a b^2\right|$.

d) Khi B là trọng tâm của tam giác OAC (với O là gốc tọa độ) thì giá trị của biểu thức $S = 2b + c$ là bằng 9.

Lời giải

a) Đúng: B là trung điểm của $AC \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 2x_B \\ y_A + y_C = 2y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + b = 2c \\ \log_a b + 3\log_a b = 2(2\log_a c) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2c \\ 4\log_a b = 4\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ \log_a b = \log_a c \end{cases} \Leftrightarrow b = c > 0$.

b) Sai: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (c - b; 2\log_a c - \log_a b) \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} = (0; 2\log_a b) \neq \vec{0} \forall b > 0 \text{ và } b \neq 1 \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông ở $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 2\log_a b(2\log_a c - \log_a b) = 0$

$\Leftrightarrow 2\log_a c - \log_a b = 0$ (do $b > 0$ & $b \neq 1$) $\Leftrightarrow \log_a c^2 = \log_a b \Leftrightarrow b = c^2$.

c) Sai: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (c - b; 2\log_a c - \log_a b) \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} = (0; 2\log_a b) \neq \vec{0} \forall b > 0 \text{ và } b \neq 1 \end{cases}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} |(c-b) \cdot 2\log_a b - 0 \cdot (2\log_a c - \log_a b)| = |(c-b) \cdot \log_a b|$

d) Đúng: Vì B là trọng tâm của tam giác OAC nên $\begin{cases} \frac{0+b+b}{3} = c \\ \frac{0+\log_a b+3\log_a b}{3} = 2\log_a c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+b=3c \\ 4\log_a b=6\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ 2\log_a b=3\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ \log_a b^2 = \log_a c^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ b^2=c^3 \end{cases} \xrightarrow{c>0} b=\frac{27}{8}, c=\frac{9}{4} \longrightarrow S=2b+c=9.$$

Câu 15: Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax-4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$

a) Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

b) $a^x = \frac{1}{16}$ khi $x = -4$.

c) Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ đi qua điểm $(2;1)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a^{x-1} + a^{1-2x}$ bằng $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ nên ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x-1} = a \cdot 1 - 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (-x-1) = a-4 \Leftrightarrow -2 = a-4 \Leftrightarrow a=2$$

a) Sai: Hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

b) Đúng: $2^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-4} \Leftrightarrow x = -4$.

c) Đúng: $\log_2 2 = 1$ suy ra đồ thị đi qua điểm $(2;1)$

d) Đúng: $2^{x-1} + 2^{1-2x} = \frac{2^x}{2} + \frac{2}{2^{2x}} = \frac{2^x}{4} + \frac{2^x}{4} + \frac{2}{2^{2x}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2^x}{4} \cdot \frac{2^x}{4} \cdot \frac{2}{2^{2x}}} = \frac{3}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2^x}{4} = \frac{2}{2^{2x}} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $y_{\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Câu 16: Một người gửi số tiền 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5% một năm theo hình thức lãi kép. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Lãi suất của ngân hàng là 0,65 trong một năm

b) Sau khi gửi 1 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng là 532 500 000 đồng

c) Sau khi gửi 3 năm, số tiền mà người đó có trong ngân hàng nhiều hơn 600 000 000 đồng.

d) Do thiếu tiền nên ở cuối năm thứ 3, người đó đã rút 100 triệu đồng từ ngân hàng và tiếp tục gửi thêm 2 năm nữa thì rút toàn bộ số tiền. Lúc này người này có số tiền ít hơn 670 000 000 đồng.

Lời giải

a) Sai: Lãi suất ngân hàng là 0,065 trong một năm.

b) Đúng: Sau một năm số tiền gửi là $500(1 + 6,5\%)^1 = 532,5$ (triệu đồng).

c) Đúng: Đến hết năm thứ ba, số tiền người đó có được là $500(1 + 6,5\%)^3 > 600$ triệu đồng.

d) Sai: Sau khi rút về 100 triệu đồng và tiếp tục gửi trong vòng 2 năm tiếp theo, người đó có số tiền là $[500(1 + 6,5\%)^3 - 100] \cdot (1 + 6,5\%)^2 \approx 571,621$ triệu đồng. Tổng số tiền người đó có được sau 5 năm (sau khi làm tròn) là $571,621 + 100 = 671,621$ triệu đồng, gần nhất với 671,620 triệu đồng.

Câu 17: Cô Nga gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Nga không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (triệu đồng), cô Nga sử dụng công thức $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{100} \right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tổng số tiền x thu được tăng lên khi số năm gửi y tăng lên do đó hàm số $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{100} \right)$ đồng biến trên tập xác định.

b) Sau ít nhất 12 năm thì cô Nga có thể rút ra được số tiền gấp đôi số tiền đã gửi từ tài khoản tiết kiệm đó.

c) Có một dự án đầu tư đòi hỏi chi phí hiện tại là 100 triệu đồng và sau 5 năm sẽ đem lại 150 triệu đồng. Xét khẳng định: “Cô Nga nếu đầu tư vào dự án này sẽ thu về khoản lợi nhuận nhiều hơn là gửi tiền vào ngân hàng đã nêu”.

d) Do tham gia bảo hiểm nhân thọ nên hàng năm cô Nga phải đóng phí là 20 triệu đồng. Cô dự kiến sau khi gửi tiền được một năm thì hàng năm sẽ rút 20 triệu đồng từ tiền gốc và lãi thu được để đóng bảo hiểm, số tiền còn lại thì cô tiếp tục gửi ngân hàng (giả sử quy định về lãi suất tiền gửi không thay đổi). Xét khẳng định: “Cô Nga sử dụng số tiền theo cách đó sẽ đóng bảo hiểm được tối đa 6 năm từ số tiền 100 triệu vốn ban đầu”.

Lời giải

a) Đúng.

b) Đúng: Với $x = 200$ ta có $\log_{1,06} \left(\frac{200}{100} \right) = \log_{1,06} 2 \approx 11,9 \Rightarrow y \geq 12$ (năm).

c) Đúng: Với $x = 150$ ta có $\log_{1,06} \left(\frac{150}{100} \right) = \log_{1,06} 1,5 \approx 6,96 \Rightarrow y \geq 7$ (năm). Nên nếu gửi ngân hàng thì cần ít nhất 7 năm thì mới thu về được số tiền 150 triệu, mà để đầu tư dự án thì chỉ mất 5 năm.

d) Đúng: Sau một năm gửi ngân hàng, số tiền thu được là $x = 100 \cdot 1,06$ (triệu đồng).

Rút 20 triệu để đóng bảo hiểm nên số tiền còn lại để gửi ngân hàng là $x_1 = 100.1,06 - 20$.

Sau năm thứ hai, tiền thu được trừ đi 20 triệu đóng bảo hiểm thì còn lại tiền gửi ngân hàng là $x_2 = x_1.1,06 - 20 = (100.1,06 - 20).1,06 - 20 = 100.1,06^2 - 20.1,06 - 20$.

Tiếp tục như vậy ta có : $x_n = 100.1,06^n - 20.(1,06^{n-1} + 1,06^{n-2} + \dots + 1,06 + 1)$

$$= 100.1,06^n - 20 \cdot \frac{1-1,06^n}{1-1,06}.$$

$$\text{Khi } x_n = 0 \text{ ta có } 100.1,06^n = 20 \cdot \frac{1-1,06^n}{1-1,06} \Leftrightarrow 1,06^n = \frac{20}{20-100.0,06}$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,06} \left(\frac{20}{20-100.0,06} \right) (\approx 6,12).$$

Với $n = 6$, có $x_6 = 100.1,06^6 - 20 \cdot \frac{1-1,06^6}{1-1,06} \approx 2,3$. Tức là sau 6 năm thực hiện kế hoạch thì số tiền còn lại là 2,3 triệu đồng.

Vậy số tiền vốn đã có đủ để thực hiện kế hoạch trong 6 năm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: E.coli là vi khuẩn đường ruột gây bệnh tiêu chảy, đau bụng dữ dội. Cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn E.coli tăng gấp đôi. Ban đầu có 20 vi khuẩn E.coli trong đường ruột. Hỏi sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn E.coli lớn hơn 81920 con?

Lời giải

Vì cứ sau 20 phút (bằng $\frac{1}{3}$ giờ) số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi nên số lượng vi khuẩn tăng theo

$$\text{quy luật } N_n = N_0 \cdot 2^n = 20 \cdot 2^n > 81920 \Rightarrow n > 12$$

Vậy sau $12 \cdot \frac{1}{3} = 4$ giờ thì số vi khuẩn đạt mức lớn hơn 81920 con.

Câu 2: Anh Trung gửi vào ngân hàng 180 triệu đồng với lãi suất 0,6%/tháng. Sau mỗi tháng, anh Trung đến ngân hàng rút mỗi tháng 5 triệu đồng để chi tiêu đến khi hết tiền thì thôi. Biết trong suốt thời gian đó, ngoài số tiền rút mỗi tháng anh Trung không rút thêm một đồng nào kể cả gốc lẫn lãi và lãi suất không đổi. Vậy tháng cuối cùng anh Trung sẽ rút được số tiền là bao nhiêu triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Gọi $A=180$ triệu đồng, $r=0,6\%$ và $X=5$ triệu đồng, S_n là số tiền còn lại sau n tháng, n là thời gian anh Trung rút tiền

Sau 1 tháng số tiền còn lại là: $180(1+0,006) - 5$.

Sau 2 tháng số tiền còn lại là: $180(1+0,006)^2 - 5(1+0,006) - 5$.

Sau 3 tháng số tiền còn lại là: $180(1+0,006)^3 - 5(1+0,006)^2 - 5(1+0,006) - 5$.

...

$$\begin{aligned} \text{Sau } n \text{ tháng số tiền còn lại là: } & 180(1+0,006)^n - 5 \left[(1+0,006)^{n-1} + \dots + (1+0,006) + 1 \right] \\ & = 180(1+0,006)^n - 5 \left[\frac{(1+0,006)^n - 1}{0,006} \right] \end{aligned}$$

Để rút hết số tiền thì ta tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho

$$S_n \leq 0 \Leftrightarrow 180.1,006^n - 5. \frac{1,006^n - 1}{0,006} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2500}{3} - \frac{1960}{3}.1,006^n \leq 0 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,006} \frac{2500}{1960} \Rightarrow n = 41$$

Khi đó số tiền tháng cuối cùng mà anh Trung lấy về là:

$$S_{40} = \left[180.1,006^{40} - 5. \frac{1,006^{40} - 1}{0,006} \right] \approx 3,38 \text{ triệu đồng}$$

Câu 3: Chị Lan chuẩn bị mua nhà trị giá 1 tỷ đồng. Chị Lan thực hiện việc tiết kiệm bằng cách mỗi tháng gửi đều đặn vào ngân hàng 20 triệu đồng/tháng. Biết rằng trong thời gian chị Lan gửi tiền thì ngân hàng áp dụng mức lãi suất 0,6% tháng và chị Lan không rút lãi lần nào. Hỏi chị Lan phải gửi tối thiểu bao nhiêu tháng để có được số tiền 1 tỷ đồng bao gồm cả tiền gốc và tiền lãi?

Lời giải

Chị Lan hàng tháng gửi vào ngân hàng một số tiền như nhau là A đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất $r\%$ một tháng.

Cuối tháng thứ 1, chị Lan có số tiền là: $P_1 = A + Ar = A(1+r)$

Đầu tháng thứ 2, chị Lan có số tiền là:

$$P_1 + A = A(1+r) + A = A + A(1+r) = A[1 + (1+r)]$$

Cuối tháng thứ 2, chị Lan có số tiền là:

$$P_2 = P_1 + P_1.r = A + A(1+r) + [A + A(1+r)].r = A[(1+r)^2 + (1+r)]$$

Đầu tháng thứ 3, chị Lan có số tiền là:

$$P_2 + A = A[(1+r) + (1+r)^2] + A = A[1 + (1+r) + (1+r)^2]$$

Cuối tháng thứ 3, chị Lan có số tiền là:

$$P_3 = P_2 + P_2.r = A[1 + (1+r) + (1+r)^2] + A[1 + (1+r) + (1+r)^2].r = A[(1+r)^3 + (1+r)^2 + (1+r)]$$

.....

Cuối tháng thứ n , chị Lan có số tiền là:

$$P_n = A \left[\underbrace{(1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r)^2 + (1+r)}_{S_n} \right]$$

$$\Leftrightarrow P_n = A(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

trong đó $A = 20$ (triệu đồng), $r = 0,6\%$ và n là số tháng gửi.

$$\text{Theo giả thiết } P_n = 10^9 \Leftrightarrow A(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 10^9 \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{10^9 r}{A(1+r)} + 1$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1+r} \left(\frac{10^9 r}{A(1+r)} + 1 \right) = \log_{1+0.006} \left(\frac{10^9 \cdot 0,006}{20 \cdot 10^6 \cdot (1+0,006)} + 1 \right) \approx 43,63.$$

Vì n nguyên dương nên $n = 44$.

Vậy phải gửi tối thiểu 44 tháng thì chị Lan mới có được số tiền 1 tỷ đồng.

Câu 4: Vợ chồng anh Bình dự định lương của vợ dùng chi trả sinh hoạt phí, lương của anh Bình được gửi tiết kiệm hàng tháng. Biết đầu tháng này anh mới được tăng lương nhận mức lương 8 triệu đồng/tháng và cứ sau 2 năm lương của anh được tăng lên 10% so với 2 năm trước đó. Giả sử rằng dự định của vợ chồng anh được thực hiện từ đầu tháng này và lãi suất ngân hàng ổn định ở 0,6% một tháng. Tính số tiền vợ chồng anh A tiết kiệm được sau 50 tháng (Kết quả làm tròn đến triệu đồng)

Lời giải

Số tiền vợ chồng anh A Bình tiết kiệm được sau 2 năm (24 tháng) là:

$$T_1 = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0,6\%) \cdot [(1 + 0,6\%)^{24} - 1]}{0,6\%} = 207084821,3 \text{ (đồng)}$$

Số tiền trên được hưởng lãi suất 26 tháng tiếp theo nên thành $T_1 \cdot (1 + 0,6\%)^{26} = 241933365,1$

Số tiền có được nhờ tiết kiệm tiền lương của anh Bình trong 24 tháng tiếp theo là

$$T_2 = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot (1 + 10\%) \cdot (1 + 0,6\%) \cdot [(1 + 0,6\%)^{24} - 1]}{0,6\%} = 227793303,1$$

(hoặc dùng $T_2 = T_1 \cdot (1 + 10\%) = 227793303,1$)

Số tiền trên được hưởng lãi suất 2 tháng tiếp theo nên thành $T_2 \cdot (1 + 0,6\%)^2 = 230535023,6$

Số tiền có được nhờ tiết kiệm tiền lương của anh Bình trong 2 tháng (thứ 49+50) là

$$T_3 = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot (1 + 10\%)^2 \cdot (1 + 0,6\%) \cdot [(1 + 0,6\%)^2 - 1]}{0,6\%} = 19534588,5$$

Vậy tổng số tiền vợ chồng anh Bình tiết kiệm được sau 50 tháng là

$$T_1 \cdot (1 + 0,6\%)^{26} + T_2 \cdot (1 + 0,6\%)^2 + T_3 = 492 \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 5: Chị Lan muốn mua một chiếc điện thoại Iphone 14 Pro Max trị giá 27 triệu đồng, nhưng vì chưa đủ tiền nên chị chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12% một năm và trả trước 10 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng chị phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 1 năm kể từ ngày mua điện thoại, chị sẽ trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua điện thoại đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó

Lời giải

Số tiền chị Lan còn nợ lại sau khi trả 10 triệu là 17 triệu đồng lãi suất 1% một tháng. Gọi A triệu là số tiền hàng tháng chị Lan trả cửa hàng điện thoại. Như vậy

Sau 1 tháng số tiền còn nợ lại là: $17(1 + 0,01) - A$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ lại là: $17(1 + 0,01)^2 - A(1 + 0,01) - A$.

Sau 3 tháng số tiền còn nợ lại là: $17(1+0,01)^3 - A(1+0,01)^2 - A(1+0,01) - A$.

...

Sau 12 tháng số tiền còn nợ lại là: $17(1+0,01)^{12} - A[(1+0,01)^{11} + \dots + (1+0,01) + 1] = 0$

$$\Leftrightarrow 17(1+0,01)^{12} - A \left[\frac{(1+0,01)^{12} - 1}{0,01} \right] = 0 \Leftrightarrow A = \frac{17 \cdot 0,01 \cdot (1+0,01)^{12}}{(1+0,01)^{12} - 1} \Leftrightarrow A \approx 1,510429408.$$

Câu 6: Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1500 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày. Công thức $P(t) = P_0 \cdot a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Sau 6 ngày thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu con.

Lời giải

Ban đầu có 1500 vi khuẩn nên $P_0 = 1500$.

Sau 2 ngày, số lượng vi khuẩn là: $P = 125\% \cdot P_0 = 125\% \cdot 1500 = 1875$

$$\text{Ta có: } P(2) = P_0 \cdot a^2 \Leftrightarrow 1875 = 1500 \cdot a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Số lượng vi khuẩn sau 6 ngày là: } P(6) = P_0 \cdot a^6 = 1500 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^6 \approx 2929 \text{ (vi khuẩn).}$$

Câu 7: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,5% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Lời giải

Giả sử số tiền gửi ban đầu là V (vnd) và sau ít nhất n năm thu được gấp đôi số tiền ban đầu ($n \in \mathbb{N}^*$).

Số tiền người đó thu được sau n năm gửi là $V(1+0,075)^n$.

Sau n năm số tiền người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu nên ta có

$$V(1+0,075)^n = 2V \Leftrightarrow 1,075^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,075} 2 \Leftrightarrow n \approx 9,58.$$

Vậy sau ít nhất 10 năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu.

Câu 8: Anh Minh muốn sau 3 năm nữa có một khoản tiền 500 triệu đồng để mua ô tô. Để thực hiện việc đó, anh Minh xây dựng kế hoạch ngay từ bây giờ, hàng tháng phải gửi một khoản tiền không đổi vào ngân hàng theo thể thức lãi kép và không rút tiền ra trong 3 năm đó. Giả sử rằng lãi suất không đổi là 0,65%/tháng. Hỏi số tiền anh Minh phải gửi hàng tháng là bao nhiêu để sau 3 năm anh có được 500 triệu? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

Lời giải

Gọi x đồng là số tiền anh Minh gửi mỗi tháng.

Sau tháng thứ nhất, số tiền trong ngân hàng của anh Minh là: $x(1+0,65\%)$.

Sau tháng thứ hai, số tiền trong ngân hàng của anh Minh là: $x(1+0,65\%)^2 + x(1+0,65\%)$.

...

...

...

Sau tháng thứ ba mươi sáu, số tiền trong ngân hàng của anh Minh là $x(1+0,65\%)^{36} + x(1+0,65\%)^{35} + \dots + x(1+0,65\%) = x(1+0,65\%) \frac{(1+0,65\%)^{36} - 1}{0,65\%}$.

Để số tiền có được là 500 triệu đồng thì $500.000.000 = x \frac{(1+0,65\%)^{36} - 1}{0,65\%} (1+0,65\%)$

$\Leftrightarrow x \approx 12.292.000$ đồng.

Câu 9: Anh Bình mua xe ô tô trị giá 600 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất là 9% / 1 năm và lãi chỉ tính trên số tiền chưa trả. Cứ cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất, anh Bình trả 10 triệu đồng. Anh Bình trả hết số tiền trên sau số tháng là

Lời giải

Do lãi suất một năm là 9% / 1 năm nên lãi suất một tháng là $r = 0,75\% / 1$ tháng

Đặt $q = 1 + r = 1,0075$

Số tiền anh Bình còn nợ sau khi trả lần thứ 1 là:

$$A_1 = 600(1+r) - 10 = 600q - 10$$

Số tiền anh Bình còn nợ sau khi trả lần thứ 2 là:

$$A_2 = A_1q - 10 = (600q - 10)q - 10 = 600q^2 - 10q - 10$$

.....

Số tiền anh Bình còn nợ sau khi trả lần thứ n là:

$$A_n = 600q^n - 10q^{n-1} - 10q^{n-2} - \dots - 10 = 600q^n - 10(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) = 600q^n - 10\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

Khi anh Bình trả hết số tiền thì $A_n = 0$

$$\Leftrightarrow 600q^n - 10\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 0 \Leftrightarrow 600.1,0075^n - 10\left(\frac{1,0075^n - 1}{1,0075 - 1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2200}{3}.1,0075^n = \frac{4000}{3} \Leftrightarrow 1,0075^n = \frac{20}{11} \Leftrightarrow n \approx 80,0101$$

Vậy anh Bình trả hết số tiền trên sau số tháng là 81 tháng.

Câu 10: Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên 1 tháng (chuyển vào tài khoản ngân hàng của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2019 mẹ không đi rút

tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi 1% trên 1 tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2019 mẹ đi rút toàn số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

Lời giải

Gọi số tiền mẹ gửi vào ngân hàng vào đầu tháng hàng tháng là A đồng.

Số tiền mẹ lĩnh vào đầu tháng 12 là T đồng.

Lãi suất hàng tháng mẹ gửi tại ngân hàng là $r\%$.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 nên thời gian được tính lãi suất là 11 tháng.

Ta có:

Đầu tháng 1 mẹ gửi vào A đồng $\Rightarrow$ cuối tháng 1 số tiền của mẹ là: $A + Ar = A(1+r)$ đồng.

Đầu tháng 2 số tiền của mẹ gửi vào là: $A + A(1+r)$ đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 2 số tiền của mẹ là: $[A + A(1+r)](1+r) = A(1+r) + A(1+r)^2$ đồng.

Đầu tháng 3 số tiền mẹ gửi vào là: $A + A(1+r) + A(1+r)^2$.

$\Rightarrow$ cuối tháng 3 số tiền của mẹ là:

$$[A + A(1+r) + A(1+r)^2](1+r) = A(1+r) + A(1+r)^2 + A(1+r)^3.$$

Cứ như vậy đến cuối tháng thứ 11 số tiền của mẹ là:

$$A(1+r) + A(1+r)^2 + \dots + A(1+r)^{11} = A[(1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{11}] = T_1.$$

Ta thấy $[(1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{11}]$ là tổng của 1 cấp số nhân với $u_1 = 1+r, n = 11, q = 1+r$.

$$\Rightarrow T_1 = A \frac{u_1(1-q^{11})}{1-q}.$$

Ta có: $A = 4000000, r = 1\% = 0.01 \Rightarrow T_1 \approx 46730000$ đồng.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 $\Rightarrow T = T_1 + 4000000 = 50730000$ đồng.

Câu 11: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% / tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng?

Lời giải

Đặt $N = 500$ triệu là số tiền đã vay, $A = 10$ triệu là số tiền trả trong mỗi tháng và $r = 0,85\%$ là lãi suất ngân hàng, n là số tháng anh An phải trả hết nợ.

Theo đề bài

Cuối tháng thứ nhất anh An còn nợ số tiền là $N(1+r) - A$.

Cuối tháng thứ hai anh An còn nợ số tiền là $[N(1+r) - A](1+r) - A = N(1+r)^2 - A[(1+r) + 1]$

Cuối tháng thứ ba anh An còn nợ số tiền là

$$[N(1+r)^2 - A[(1+r) + 1]](1+r) - A = N(1+r)^3 - A[(1+r)^2 + (1+r) + 1].$$

....

Cuối tháng thứ n anh An còn nợ số tiền là $N(1+r)^n - A[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1]$.

Để sau n tháng anh An trả hết nợ thì $N(1+r)^n - A[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1] = 0$

$$\Leftrightarrow N(1+r)^n = A[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1] \Leftrightarrow N(1+r)^n = A \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{A}{A - Nr} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)} \left(\frac{A}{A - Nr} \right).$$

$$\text{Áp dụng ta có } n = \log_{(1+0,0085)} \left(\frac{10}{10 - 500 \cdot 0,0085} \right) \Leftrightarrow n \approx 65,38.$$

Vậy anh An phải trả trong vòng 66 tháng.

Câu 12: Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí (chẳng hạn sương mù, nước,...) sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thụ của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thụ tính theo công thức $I = I_0 e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có $\mu = 1,4$. Biết cường độ ánh sáng giảm đi e^m khi từ độ sâu 2m xuống đến 20m. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cường độ ánh sáng thay đổi khi từ độ sâu x_1 đến độ sâu x_2 là: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_0 e^{-\mu x_1}}{I_0 e^{-\mu x_2}} = e^{\mu(x_2 - x_1)} = e^{25,2}.$

Khi đó $m = 25,2$.

-----HẾT-----