

A

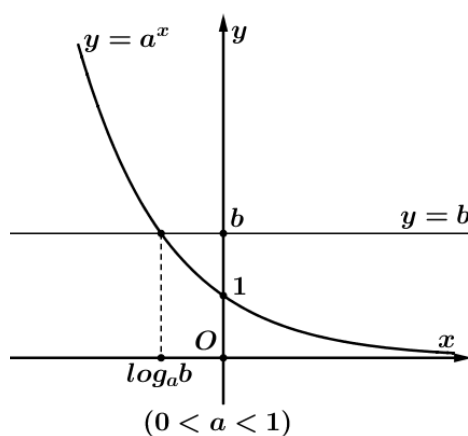
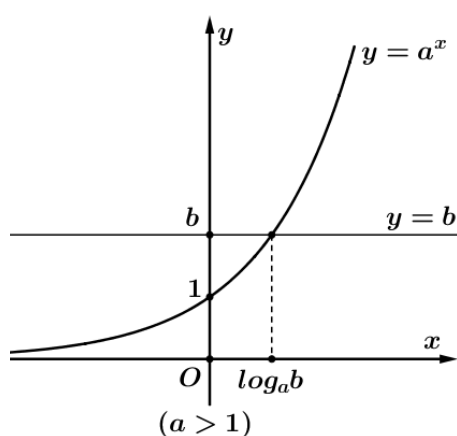
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình mũ

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh họa bằng đồ thị như sau:



Chú ý: Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:

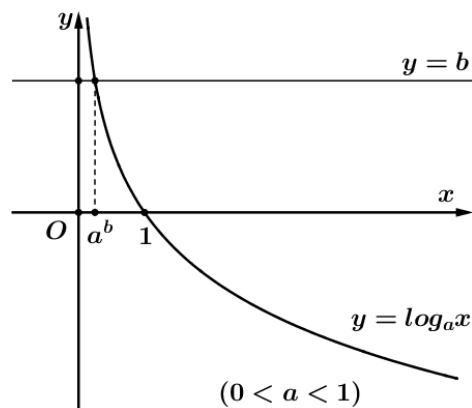
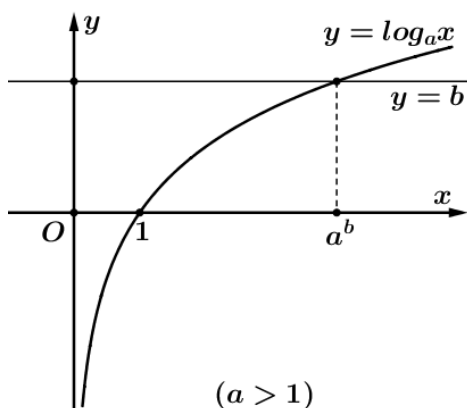
Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$.

2 Phương trình logarit

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$.

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Minh họa bằng đồ thị:



Chú ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $u, v > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$.

3 Bất phương trình mũ

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:

Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Chú ý: Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

4 Bất phương trình logarit

- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.
- Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.

Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $0 < x < a^b$.

Chú ý: Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > a^b$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < a^b$.

Dạng 1: Giải các phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình mũ sau:

a) $3^{x+1} = 2$

b) $3^{2x^2+5x+4} = 9$

c) $2^x = \frac{1}{8}$

d) $3^{2x^2-x} = 3$

e) $2^{x^2+3x-6} = \frac{1}{4}$

f) $2^{x-1} \cdot 3^x = 18$

Lời giải

a) Ta có: $3^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2 - 1$

b) Phương trình $3^{2x^2+5x+4} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x^2+5x+4} = 3^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$ có $\Delta = 9 > 0$ nên theo định lý Viet, tích các nghiệm của phương trình là 1.

c) Ta có $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$.

d) Ta có $3^{2x^2-x} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

e) Ta có: $2^{x^2+3x-6} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-6} = 2^{-2} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = -2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$.

f) Ta có $2^{x-1} \cdot 3^x = 18 \Leftrightarrow \frac{2^x}{2} \cdot 3^x = 18 \Leftrightarrow 6^x = 36 \Leftrightarrow x = 2$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình logarit sau:

h) Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ \log_2 a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1$

Ta có $\log_3(\log_2 a) = 0 \Leftrightarrow \log_2 a = 1 \Leftrightarrow a = 2$

i) Điều kiện: $x > 0$.

$$(x^2 - 2x - 3)\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \log_2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (tm)} \\ x = 1 \text{ (tm)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

k) Điều kiện xác định của phương trình là: $x > 0$.

Ta có: $(x^2 + 2x - 3)(\log_2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = -3 \\ x = 8 \end{cases}.$

Kết hợp với điều kiện $x > 0$ phương trình có 2 nghiệm $x = 1; x = 8$.

Dạng 2: Phương pháp đưa về cùng cơ số giải phương trình mũ và logarit

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \ (0 < a \neq 1)$.

Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \ (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình mũ sau đây:

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$

b) $4^{5x-2} = 64$

c) $2^{x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1}$

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$

e) $\left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x} = \left(\frac{2021}{2020}\right)^{2x-6}$

f) $2^{\sqrt{x+3}} = 2^{3-x}$

g) $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow (7^{-1})^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

b) Ta có $4^{5x-2} = 64 \Leftrightarrow 4^{5x-2} = 4^3 \Leftrightarrow 5x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

c) Ta có: $2^{x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1} \Leftrightarrow 2^{x-6} = 2^{-2(3x+1)} \Leftrightarrow x - 6 = -6x - 2 \Leftrightarrow 7x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7}$

d) Phương trình đã cho $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x} \Leftrightarrow 5^{-2(x+1)} = 5^{6x} \Leftrightarrow -2(x+1) = 6x \Leftrightarrow 8x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

e) Ta có $\left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x} = \left(\frac{2021}{2020}\right)^{2x-6} \Leftrightarrow \left(\frac{2020}{2021}\right)^{4x} = \left(\frac{2020}{2021}\right)^{-2x+6} \Leftrightarrow 4x = -2x + 6 \Leftrightarrow x = 1$.

f) Điều kiện $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

Ta có: $2^{\sqrt{x+3}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+3 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là $x = 1$.

g) $3^{x^2-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow 3^{x^2-4} = 3^{-2(3x-1)} \Leftrightarrow x^2 - 4 = -2(3x-1) \Leftrightarrow x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{15} \\ x_2 = -3 + \sqrt{15} \end{cases}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình logarit sau:

$$a) \log_5(2x-1) = \log_5(2-x)$$

$$b) \log_3(x^2 + 4x - 3) = \log_3(x+1)$$

$$c) 2\log_2(2x+3) = \log_2 x^2$$

$$d) \log_2 x + \log_2(x-3) = 2$$

$$e) \log_2 x + \log_2(x+2) = 3$$

$$f) \log_5 x = \log_5(x+6) - \log_5(x+2)$$

$$g) \log_2(x+1) - 2\log_{\frac{1}{4}}(x-1) = 3$$

$$h) \log_3(6+x) + \log_3(9x) - 5 = 0$$

$$i) \log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x$$

$$k) \log_3(9^x - 5 \cdot 3^x + 7) = x + 1$$

$$l) \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện xác định: } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$$

Phương trình khi đó tương đương với $2x-1 = 2-x \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm.

$$b) \text{ Ta có } \log_3(x^2 + 4x - 3) = \log_3(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 3 = x+1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$c) \text{ Ta có: } 2\log_2(2x+3) = \log_2 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ x^2 > 0 \\ \log_2(2x+3)^2 = \log_2 x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ (2x+3)^2 = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ 2x+3 = x \\ 2x+3 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x = -3 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm của phương trình là } \{-3; -1\}.$$

$$d) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3.$$

$$\text{Ta có: } \log_2 x + \log_2(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x(x-3)) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{loại}) \\ x = 4 & (\text{tm}) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$.

$$e) \text{ Điều kiện: } x > 0.$$

$$\text{Ta có: } \log_2[x(x+2)] = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 2^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4(l) \\ x = 2(n) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = 2$.

$$f) \text{ Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x+6 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -6 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{Ta có: } \log_5 x = \log_5(x+6) - \log_5(x+2) \Leftrightarrow \log_5 x + \log_5(x+2) = \log_5(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 [x(x+2)] = \log_5 (x+6) \Leftrightarrow x(x+2) = x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

So với điều kiện, suy ra $x = 2$. Vậy $S = \{2\}$.

g) Điều kiện: $x > 1$

$$\text{Ta có: } \log_2(x+1) - 2\log_{\frac{1}{4}}(x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}. \text{ Vì } x > 1 \text{ nên pt có 1 nghiệm } x = 3.$$

$$\text{h) Ta có: } \log_3(6+x) + \log_3(9x) - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_3[9x(6+x)] = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 9x(6+x) = 3^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 9x^2 + 54x - 243 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = -9 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x = 3.$$

i) Phương trình đã cho xác định khi: $x > 0$

$$\text{Khi đó: } \log_2 x + \log_3 x = 1 + \log_2 x \log_3 x \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 x \log_3 x + \log_3 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(1 - \log_3 x) - (1 - \log_3 x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \log_3 x)(\log_2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \log_3 x = 0 \\ \log_2 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_3 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định)}$$

$$\text{k) Ta có: } \log_3(9^x - 5 \cdot 3^x + 7) = x + 1 \Leftrightarrow 9^x - 5 \cdot 3^x + 7 = 3^{x+1} \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_3 7 \end{cases}$$

$$\text{l) Điều kiện: } x > 0. \text{ Ta có } \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x \cdot \left(\frac{1}{2} \log_3 x\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \log_3 x\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \log_3 x\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}.$$

Đặt ẩn phụ giải phương trình mũ: $\alpha.a^x + \beta.a^x + \gamma = 0$. Đặt $t = a^x$ ($t > 0$)

Đặt ẩn phụ giải phương trình logarit: $\alpha.\log_a^2 x + \beta.\log_a x + \gamma = 0$. Đặt $t = \log_a x$ ($x > 0$)

Ví dụ 5: Giải các phương trình mũ sau:

a) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$

b) $9^x - 12.3^x + 27 = 0$

c) $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$

d) $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$

e) $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3$

f) $-25^x + 5^{x+1} + 6 = 0$

g) $9^x - 12.3^x + 27 = 0$

h) $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$

i) $9^{x+1} - 12.3^{x+2} + 243 = 0$

k) $7^x + 2.7^{1-x} - 9 = 0$

Lời giải

a) Ta có: $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250 \Leftrightarrow \frac{1}{5}(5^x)^2 + 5.5^x - 250 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 + 25.5^x - 1250 = 0$.

Đặt $t = 5^x$ với điều kiện $t > 0$ ta có phương trình $t^2 + 25t - 1250 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -50 \\ t = 25 \end{cases} (l)$.

Với $t = 25 \Rightarrow x = \log_5 25 = 2$.

b) Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Ta có $9^x - 12.3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 12.t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

c) Ta có $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0 \Leftrightarrow 9(3^x)^2 - 3.3^x - 30 = 0 \Leftrightarrow 3(3^x)^2 - 3^x - 10 = 0$.

Khi đặt $3^x = t$ thì phương trình $3(3^x)^2 - 3^x - 10 = 0$ trở thành phương trình $3t^2 - t - 10 = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{5}{3}(l) \end{cases} \Rightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$.

d) Phương trình tương đương $4^x - 4.2^x + 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

e) Ta có: $4^{x^2-x} + 2^{x^2-x+1} = 3 \Leftrightarrow 4^{x^2-x} + 2.2^{x^2-x} = 3$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ ($t > 0$). Phương trình trở thành $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3(l) \end{cases}$

Với $t = 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

f) Phương trình đã cho trở thành $-(5^2)^x + 5.5^x + 6 = 0 \Leftrightarrow -(5^x)^2 + 5.5^x + 6 = 0$.

$$\text{Đặt } 5^x = t \ (t > 0) \Rightarrow -t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \ (l) \\ t = 6 \end{cases}.$$

Với $t = 6 \Rightarrow 5^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_5 6$. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

$$g) \text{ Ta có: } 9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0 \ (*).$$

$$\text{Đặt } t = 3^x \ (t > 0), \text{ phương trình } (*) \text{ có dạng: } t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 9 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ và với } t = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$h) \text{ Phương trình tương đương } 4^x - 4 \cdot 2^x + 3 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

$$i) 9^{x+1} - 12 \cdot 3^{x+2} + 243 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 9^x - 12 \cdot 3^2 \cdot 3^x + 243 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 9^x - 108 \cdot 3^x + 243 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, t > 0, \text{ phương trình tương đương: } 9t^2 - 108t + 243 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^x = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$k) \text{ Đặt } t = 7^x > 0, \text{ phương trình trở thành: } t + \frac{14}{t} - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = 7, \text{ ta có: } 7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ ta có: } 7^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_7 2.$$

Ví dụ 6: Giải các phương trình logarit sau:

$$a) \log_{\frac{1}{3}} x - 5 \log_3 x + 4 = 0$$

$$b) \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$$

$$c) \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 6 \log_8 (4x) + 1 = 0$$

$$d) \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5 \log_3 x + 6 = 0$$

$$e) \log^2 x - \log(2020x) - 1 = 0$$

$$f) \log_2 (5^x - 1) \cdot \log_4 (2 \cdot 5^x - 2) = 1$$

Lời giải

$$a) \text{ Điều kiện: } x > 0.$$

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5 \log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5 \log_3 x + 4 = 0 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x \text{ thì phương trình } (*) \text{ trở thành } t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3^1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81 \text{ (thỏa mãn)}$$

b) Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x, \text{ phương trình đã cho về dạng: } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t = -1 \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

c) Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Khi đó: } \log_2^2 x - 2(\log_2 4 + \log_2 x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \text{ thì phương trình } (*) \text{ trở thành } t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 \Leftrightarrow x = 8 \text{ (thỏa mãn)}$$

d) Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0 \quad (*).$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x \text{ thì phương trình } (*) \text{ trở thành } t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 3^3 \Leftrightarrow x = 27 \text{ (thỏa mãn)}$$

e) Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\text{Ta có } \log^2 x - \log(2020x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log^2 x - \log x - \log 2020 - 1 = 0$$

Do $ac < 0$ nên phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $\log x_1, \log x_2$.

$$\text{Ta có } \log x_1 + \log x_2 = -\frac{b}{a} = 1 \Rightarrow \log(x_1 x_2) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 10.$$

$$\text{f) Điều kiện: } \begin{cases} 5^x - 1 > 0 \\ 2 \cdot 5^x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Ta có: } \log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = 1 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot \log_{2^2}[2 \cdot (5^x - 1)] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(5^x - 1) \cdot \log_2[2 \cdot (5^x - 1)] = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] = 1 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(5^x - 1) \text{ thì phương trình } (*) \text{ trở thành } \frac{1}{2}t(1+t) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -2 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) = -2 \Leftrightarrow 5^x - 1 = 2^{-2} \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 5^x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \log_5 \frac{5}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) = 1 \Leftrightarrow 5^x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow 5^x = 3 \Rightarrow x = \log_5 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Ví dụ 7: Tìm tham số m để phương trình $\log_2^2(x^2 + 1) - m \log_2(x^2 + 1) + 8 - m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt ?

Lời giải

Đặt $t = \log_2(x^2 + 1), t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - mt + 8 - m = 0 (*)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt một nghiệm bằng 0

$$\text{và một nghiệm dương. Khi đó } \begin{cases} m^2 - 4(8 - m) > 0 \\ 8 - m = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8.$$

Ví dụ 8: Tìm tham số m để phương trình $\log_2^2 x - m \log_2 x + 15 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $2 \leq x_1 < 4 < x_2$.

Lời giải

Đặt $t = \log_2 x$ phương trình đã cho trở thành: $t^2 - mt + 15 - m = 0$ (1)

Ta có $2 \leq x_1 < 4 < x_2 \Leftrightarrow 1 \leq \log_2 x_1 < 2 < \log_2 x_2 \Leftrightarrow 1 \leq t_1 < 2 < t_2$ với t_1, t_2 là nghiệm của (1).

Đặt $f(t) = t^2 - mt + 15 - m$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $1 \leq t_1 < 2 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(1) \geq 0 \\ af(2) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 2m \geq 0 \\ 19 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} < m \leq 8.$$

Ví dụ 9: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - (m + 2) \log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 x_2 = 27$.

Lời giải

Xét phương trình $\log_3^2 x - (m + 2) \log_3 x + 3m - 1 = 0$ (1)

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình (1) trở thành $t^2 - (m + 2)t + 3m - 1 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 27$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3(x_1 x_2) = \log_3 27 = 3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m + 2)^2 - 4(3m - 1) \geq 0 \\ S = t_1 + t_2 = m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1. \text{ Khi đó (2) trở thành } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Với $t_1 = 1 \Rightarrow \log_3 x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 3$ và với $t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 9$.

Ví dụ 10: Tìm tham số m để phương trình $\log^2 x - 2(m+1)\log x + 4 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 10 < x_2$.

Lời giải

Xét phương trình $\log^2 x - 2(m+1)\log x + 4 = 0$ (1)

Đặt $t = \log x$, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 4 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 < x_1 < 10 < x_2$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+3) > 0 \\ -2m+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Dạng 4: Phương pháp mũ hóa và logarit hóa

1. Phương pháp logarit hóa:

- **Dạng 1:** $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0 < a \neq 1$.

- **Dạng 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.

2. Phương pháp mũ hóa: $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$

Ví dụ 11: Giải các phương trình sau:

a) $(7 + 4\sqrt{3})^{2x+1} = 2 - \sqrt{3}$

b) $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15$

c) $2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}$

Lời giải

a) Ta có: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$; $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

$$(7 + 4\sqrt{3})^{2x+1} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \log_{(2+\sqrt{3})^2} (2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow 2x+1 = \log_{(2+\sqrt{3})^2} \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}. \text{ Vậy phương trình có nghiệm } x = -\frac{3}{4}.$$

b) Điều kiện: $x \neq 0$

Ta có: $3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = 15 \Leftrightarrow \log_3 3^x \cdot 5^{\frac{2x-1}{x}} = \log_3 15 \Leftrightarrow x + \frac{2x-1}{x} \log_3 5 = 1 + \log_3 5$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x-1}{x} \log_3 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (x-1) \log_3 5 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x(\log_3 5 - 1) - \log_3 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\log_3 5 \end{cases}$$

c) Ta có: $2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8} \Leftrightarrow \log_2 2^{x-2} = \log_2 3^{x^2+2x-8} \Leftrightarrow x-2 = (x^2 + 2x - 8) \log_2 3$

$$\Leftrightarrow x-2 = (x-2)(x+4) \log_2 3 \Leftrightarrow (x-2)[(x+4) \log_2 3 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x+4) \log_2 3 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x+4 = \frac{1}{\log_2 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_3 2 - 4 \end{cases}.$$

Ví dụ 12: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\frac{4}{3}} x = \log_3 y = \log_2 (2x - 3y)$. Tính tỷ số $\frac{x}{y}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \log_{\frac{4}{3}} x = \log_3 y = \log_2 (2x - 3y) \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ x = \left(\frac{4}{3}\right)^t \\ 2x - 3y = 2^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t - 3 \cdot 3^t = 2^t$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{9}\right)^t - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^t \Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - \left(\frac{2}{3}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = -1(l) \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{4}.$$

Ví dụ 13: Cho phương trình $x^{\log_{2020}(x^3)-a} = 2021$ với a là số thực dương. Biết tích các nghiệm của phương trình là 32. Tìm giá trị của a .

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^{\log_{2020}(x^3)-a} = 2021 \Leftrightarrow \log_{2020} \left[x^{\log_{2020}(x^3)-a} \right] = \log_{2020} 2021$$

$$\Leftrightarrow (3\log_{2020} x - a)\log_{2020} x - \log_{2020} 2021 = 0 \Leftrightarrow 3(\log_{2020} x)^2 - a\log_{2020} x - \log_{2020} 2021 = 0 \quad (*)$$

$$x_1.x_2 = 32 \Rightarrow \log_{2020}(x_1.x_2) = \log_{2020} x_1 + \log_{2020} x_2 = \log_{2020} 32$$

$$\text{Mặt khác: } \log_{2020} x_1 + \log_{2020} x_2 = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3.\log_{2020} 32.$$

Dạng 5: Giải các bất phương trình mũ và logarit cơ bản

Phương trình mũ cơ bản $a^x = b$, ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Ví dụ 14: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} > \frac{1}{49}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 128$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > 8$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$

f) $2^{2x^2-11x+5} \leq 1$

g) $7^{4-2x-x^2} \leq \frac{1}{49^x}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16}$

i) $3^{x^2-4x+5} \leq 9$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4$

Lời giải

a) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow x < -3$

b) Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} > \left(\frac{1}{7}\right)^2$.

Vì $0 < \frac{1}{7} < 1$, suy ra $3x+4 < 2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

c) Ta có : $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 128 \Leftrightarrow 2^{1-x} \geq 2^7 \Leftrightarrow 1-x \geq 7 \Leftrightarrow x \leq -6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; -6]$.

d) Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2-4x < -3 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 3)$.

e) Ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2x-4 < -x^2-3x+2 \Leftrightarrow x^2+5x-6 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < 1$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S = (-6; 1)$.

f) Ta có: $2^{2x^2-11x+5} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{2x^2-11x+5} \leq 2^0 \Leftrightarrow 2x^2-11x+5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5$

g) Ta có: $7^{4-2x-x^2} \leq \frac{1}{49^x} \Leftrightarrow 7^{4-2x-x^2} \leq 7^{-2x} \Leftrightarrow 4-2x-x^2 \leq -2x \Leftrightarrow 4-x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$.

h) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x^2-5 < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-3; 3)$.

i) Ta có: $3^{x^2-4x+5} \leq 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-4x+5} \leq 3^2 \Leftrightarrow x^2-4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình là $[1; 3]$

k) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{5-4x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{5}{4}$. Vậy $S = \left(1; \frac{5}{4}\right)$.

Ví dụ 15: Giải các bất phương trình logarit sau:

a) $\log_2(2x+4) < 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -1$

c) $\log_2 x < 3$

d) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x) \geq -1$

e) $\log_2(3 \cdot 2^x - 2) < 2x$

f) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{3}}(x+10)$

g) $\log_3(x^2-2x) \leq 1$

h) $\log_5(4x-9) \leq \log_5(3x+7)$

i) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x) \geq -1$

k) $\log_3(5x-2x^2+7) < 2$

Lời giải

a) Điều kiện: $2x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Ta có: $\log_2(2x+4) < 3 \Leftrightarrow 0 < 2x+4 < 2^3 \Leftrightarrow 0 < 2x+4 < 8 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

b) Điều kiện: $x < 3$. Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -1 \Leftrightarrow 3-x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow 3-x < 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp điều kiện ta được: $1 < x < 3$.

c) Ta có: $\log_2 x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 2^3 \Leftrightarrow 0 < x < 8$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0; 8)$.

d) Ta có: $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x) \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x > 0 \\ x^2+4x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x > 0 \\ x^2+4x-5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x < -4 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-5; -4) \cup (0; 1]$

e) Điều kiện: $3 \cdot 2^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \log_2 \frac{2}{3}$ (*)

Ta có $\log_2(3 \cdot 2^x - 2) < 2x \Leftrightarrow \log_2(3 \cdot 2^x - 2) < \log_2 2^{2x} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 2 < 2^{2x} \Leftrightarrow 4^x > 3 \cdot 2^x - 2$

$$\Leftrightarrow 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < 1 \\ 2^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}.$$

Kết hợp với (*) ta được $x \in \left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right) \cup (1; +\infty)$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \left(\log_2 \frac{2}{3}; 0\right) \cup (1; +\infty)$.

f) Điều kiện: $x > \frac{9}{4}$. Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(4x-9) > \log_{\frac{1}{3}}(x+10) \Leftrightarrow 4x-9 < x+10 \Leftrightarrow x < \frac{19}{3}$.

$$\text{g) Ta có: } \log_3(x^2 - 2x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 2x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = [-1; 0) \cup (2; 3]$.

h) Điều kiện: $x > \frac{9}{4}$.

Bất phương trình $\log_5(4x-9) \leq \log_5(3x+7) \Leftrightarrow 4x-9 \leq 3x+7 \Leftrightarrow x \leq 16$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(\frac{9}{4}; 16\right]$ nên có 14 nghiệm nguyên dương.

i) Điều kiện xác định: $x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) \geq -1 \Leftrightarrow x^2 - x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện, ta được: $S = [-1; 0) \cup (1; 2]$.

k) Ta có: $\log_3(5x - 2x^2 + 7) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 5x + 7 > 0 \\ 5x - 2x^2 + 7 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 5x + 7 > 0 \\ -2x^2 + 5x - 2 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{7}{2} \\ x < \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup \left(2; \frac{7}{2}\right).$$

Dạng 6: Đưa về cùng cơ số giải bất phương trình mũ và logarit

Nếu gặp bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ thì xét hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Nếu $a > 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

▪ **Trường hợp 2:** Nếu $0 < a < 1$ thì bất phương trình $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Ví dụ 16: Giải các bất phương trình mũ sau :

a) $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$

c) $2^{x^2-4x+5} = 8$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16}$

e) $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

g) $4^{x-1} \geq 2^{x^2-3x+2}$

h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7} \geq 8$

k) $2^{x^2-3x+2} \geq 4$

Lời giải

a) Ta có : $3^{x+2} \geq \frac{1}{9} = 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-4; +\infty)$.

b) Ta có: $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 2x-4 < x+1 \Leftrightarrow x < 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty; 5)$.

c) Ta có $2^{x^2-4x+5} = 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 4.

d) Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Leftrightarrow x^2 - 5 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

e) Ta có: $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \leq 2^{-2x+10} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 \leq -2x + 10$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên dương là $x = 1, x = 2, x = 3$.

f) Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow \frac{-1}{3} < x < 1$. Vậy $S = \left(\frac{-1}{3}; 1\right)$.

g) Ta có: $4^{x-1} \geq 2^{x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2^{2x-2} \geq 2^{x^2-3x+2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

h) Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{3x^2} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3x^2 < 2x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$

$$\text{i) Ta có } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-7} \geq 8 \Leftrightarrow x^2 - 7 \leq -3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

$$\text{k) Ta có } 2^{x^2-3x+2} \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

Ví dụ 17: Giải các bất phương trình logarit sau :

$$\text{a) } \log_2(x-1) > \log_2 3$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

$$\text{c) } \log_4(x^2 - 3x) > \log_2(9 - x)$$

$$\text{d) } \log_{\frac{1}{2}} x \neq \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1)$$

$$\text{e) } \log_{2-\sqrt{3}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \geq 0$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \log_2(x-1) > \log_2 3 \Leftrightarrow x-1 > 3 \Leftrightarrow x > 4.$$

$$\text{b) Ta có: } \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow (x+1) > (2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$$

$$\text{c) Điều kiện: } \begin{cases} x < 0 \\ 3 < x < 9 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \log_4(x^2 - 3x) > \log_2(9 - x) \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3x) > \log_2(9 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x > (9 - x)^2 \Leftrightarrow 15x > 81 \Leftrightarrow x > \frac{27}{5}. \text{ Kết hợp điều kiện suy ra } \frac{27}{5} < x < 9.$$

$$\text{d) Ta có: } \log_{\frac{1}{2}} x \neq \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1) \hat{=} \begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{x} \neq \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x-1) \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \hat{=} \begin{cases} \sqrt{x} - 2x + 1 \neq 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\hat{=} \begin{cases} -\frac{1}{2} \neq \sqrt{x} \neq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \hat{=} \begin{cases} 0 \neq x \neq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \hat{=} \frac{1}{2} < x \neq 1.$$

$$\text{e) Điều kiện xác định } -1 < x < \frac{11}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \log_{2-\sqrt{3}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{(2+\sqrt{3})^{-1}}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \geq 0 \text{ vì } 2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -\log_{(2+\sqrt{3})}(x+1) + \log_{2+\sqrt{3}}(11-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_{2+\sqrt{3}} \frac{11-2x}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11-2x}{x+1} \geq (2+\sqrt{3})^0 = 1 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{10-3x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; \frac{10}{3}\right]$$

Ví dụ 18: Tìm tham số m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $mx^2 + 4x + m > 0$.

Ta có: $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \log_5 5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m \Leftrightarrow (5-m)x^2 - 4x + 5-m \geq 0$$

Ta thấy $m = 0$ hoặc $m = 5$ không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ (5-m)x^2 - 4x + 5-m \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 5-m > 0 \\ 4-m^2 < 0 \\ -m^2 + 10m - 21 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 5 \\ m < -2; m > 2 \\ m \leq 3; m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3$$

Ví dụ 19: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\ln(9x^2 + 9) \geq \ln(mx^2 + 6x + m)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$?

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 6x + m > 0 \\ 9x^2 + 9 \geq mx^2 + 6x + m \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Mặt khác: } mx^2 + 6x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta'_m = 9 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -3 \Leftrightarrow m > 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 9x^2 + 9 \geq mx^2 + 6x + m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (9-m)x^2 - 6x + 9-m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-m > 0 \\ 9-(9-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ (12-m)(m-6) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m \leq 6 \Leftrightarrow m \leq 6 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3 < m \leq 6$

Dạng 7: Đặt ẩn phụ giải bất phương trình mũ và logarit

Ta thường gặp các dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p > 0 \quad (1)$.

- Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$ đưa pt (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p > 0$.
- Giải bất phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$ sau đó tìm nghiệm x .

- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p > 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} > 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

Ví dụ 20: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $4^x - 3.2^x - 4 \geq 0$

b) $4^x - 17.2^x + 16 \leq 0$

c) $25^x - 5^x - 2 < 0$

d) $4^x - 17.2^x + 16 \leq 0$

e) $4^x - 3.2^x - 4 \geq 0$

f) $(3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x < 3.2^x$

Lời giải

a) Đặt $2^x = t (t > 0)$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 3.2^x - 4 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1 \\ t \geq 4 \end{cases}$.

Kết hợp với $t > 0$ ta được $t \geq 4 \Rightarrow 2^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $[2; +\infty)$.

b) Đặt $t = 2^x (t > 0)$

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 17t + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 16 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$

c) Ta có $25^x - 5^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5^x - 2 < 0$.

Đặt $t = 5^x, t > 0$. Ta được bất phương trình ẩn t là: $t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 2$.

Đổi chiều điều kiện ta được $0 < t < 2 \Rightarrow 0 < 5^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_5 2$.

d) $4^x - 17.2^x + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 17.2^x + 16 \leq 0$

Đặt $t = 2^x (t > 0)$ ta có bất phương trình $t^2 - 17t + 16 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 16$

Với $1 \leq t \leq 16$ ta có $1 \leq 2^x \leq 16 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$

e) Đặt $t = 2^x (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - 3t - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq -1 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện: $t > 0 \Rightarrow t \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty)$.

f) Ta có $(3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x < 3.2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}}\right)^x < 3$.

Đặt $t = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x$ với $t > 0 \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} < 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) < x < \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Ví dụ 21: Giải các bất phương trình logarit sau:

- a) $\log_{\sqrt{2}}^2(x-4) - 43\log_2(4x-16) + 75 \leq 0$ b) $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0$
c) $\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x + 3 > 0$ d) $(2^x + 2^{4-x} - 17)\sqrt{10 - \log_2 x} \geq 0$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x > 4$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_{\sqrt{2}}^2(x-4) - 43\log_2(4x-16) + 75 &\leq 0 \Leftrightarrow \left[\log_{\frac{1}{2^2}}(x-4)\right]^2 - 43\log_2[4(x-4)] + 75 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 4[\log_2(x-4)]^2 - 43\log_2(x-4) - 11 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \log_2(x-4) \leq 11 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + 4 \leq x \leq 2^{11} + 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + 4 \leq x \leq 2^{11} + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + 4 \leq x \leq 2052 \end{aligned}$$

b) Điều kiện: $x > 0$. Khi đó: $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \log_2 x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$.

c) Điều kiện $x > 0$. Ta có $\log_3^2 x - 2\log_{\sqrt{3}} x + 3 > 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 3 \\ \log_3 x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 27 \\ x < 3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 3) \cup (27; +\infty)$.

d) Điều kiện: $10 - \log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2^{10}$.

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương } \begin{cases} \sqrt{10 - \log_2 x} = 0 \\ \sqrt{10 - \log_2 x} > 0 \\ 2^x + 2^{4-x} - 17 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có: $\sqrt{10 - \log_2 x} = 0 \Leftrightarrow x = 2^{10}$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \sqrt{10 - \log_2 x} > 0 \\ 2^x + 2^{4-x} - 17 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2^{10} \\ 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2^{10} \\ \begin{cases} 2^x \leq 1 \\ 2^x \geq 16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2^{10} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x < 2^{10}.$$

Ví dụ 22: Xét bất phương trình $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$. Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 2x - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$ (1).

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x > \sqrt{2}$ nên $\log_2 x > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Do đó $t \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Khi đó: (1) trở thành $(1+t)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt - 1 < 0$ (2).

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do $f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0$ có $ac = -1 < 0$ nên phương trình $f(t) = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1 < 0 < t_2$. Tập nghiệm của bất phương trình (2) là $S = (t_1; t_2)$.

Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bất phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Khi đó ta cần có $\frac{1}{2} < t_2 \Leftrightarrow m + \sqrt{m^2 + 1} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + 1} > 1 - 2m$ (3)

Nếu $1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, do $m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (3) luôn đúng với $\forall m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Nếu $1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$, (3) $\Leftrightarrow 4(m^2 + 1) > (1 - 2m)^2 \Leftrightarrow 4m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}$.

Kết hợp điều kiện $m \leq \frac{1}{2}$ ta có $m \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

Tóm lại kết hợp cả 2 trường hợp ta có $m \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Ví dụ 23: Tìm tham số m để bất phương trình $\frac{\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2}{\sqrt{m - 2^x}} < 0$ có không quá 3 nghiệm nguyên dương?

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} m - 2^x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 m \\ x > 0 \end{cases}$

Ta có: $\frac{\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2}{\sqrt{m - 2^x}} < 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < \log_3 x < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 9$.

Xét: $\log_2 m \leq 3 \Leftrightarrow 0 < m \leq 8$ thì bất phương trình vô nghiệm.

Suy ra có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Xét: $\log_2 m > 3 \Leftrightarrow m > 8$ (1) thì bất phương trình có nghiệm thỏa: $3 < x < \min\{\log_2 m; 9\}$.

Theo yêu cầu đề bài ta có: $\log_2 m \leq 7 \Leftrightarrow m \leq 128$.

Kết hợp với điều kiện (1) ta được: $8 < m \leq 128$.

Ví dụ 24: Tìm tham số m để bất phương trình $\left| \frac{3\ln^2 x + 2\ln x + 12}{\ln^2 x - (m+1)\ln x + 4} \right| \geq 2$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

Lời giải

Đặt $t = \ln x$. Vì $x > 0$ nên $t \in \mathbb{R}$

Bất phương trình trở thành: $\left| \frac{3t^2 + 2t + 12}{t^2 - (m+1)t + 4} \right| \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow |3t^2 + 2t + 12| \geq 2|t^2 - (m+1)t + 4|, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2|t^2 - (m+1)t + 4| \leq 3t^2 + 2t + 12, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 2(m+1)t + 4 \leq 3t^2 + 2t + 12 \\ 2t^2 - 2(m+1)t + 4 \geq -3t^2 - 2t - 12 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -t^2 - 2(m+2)t - 8 \leq 0 \\ 5t^2 - 2mt + 16 \geq 0 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - 8 \leq 0 \\ m^2 - 5 \cdot 16 \leq 0 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 4 \leq 0 \\ m^2 - 80 \leq 0 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -2 + 2\sqrt{2} \\ -4\sqrt{5} \leq m \leq 4\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -2 + 2\sqrt{2}$$

Dạng 8: Mũ hóa, logarit hóa giải bất phương trình mũ và logarit

Ví dụ 25: Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$

b) $5 \cdot 6^{x+1} \leq 2 \cdot 3^{x+1}$

c) $5^{x^2-4} \leq 625$

d) $(0,1)^{\ln(x-4)} \geq 1$

e) $\log_2(3^x - 2) < 0$

Lời giải

a) Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5} \Leftrightarrow -x^2-2x-1 \leq x-5 \Leftrightarrow x^2+3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$

b) Ta có $5 \cdot 6^{x+1} \leq 2 \cdot 3^{x+1} \Leftrightarrow \frac{6^{x+1}}{2 \cdot 3^{x+1}} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2^x \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow x \leq \log_2 \left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow x \leq -\log_2 5$.

c) Ta có: $5^{x^2-4} \leq 625 \Leftrightarrow x^2-4 \leq \log_5 625 \Leftrightarrow x^2 \leq 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

d) Điều kiện: $x > 4$.

Ta có $(0,1)^{\ln(x-4)} \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow x-4 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Đổi chiều với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (4; 5]$.

e) Ta có $\log_2(3^x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < 3^x - 2 < 1 \Leftrightarrow 2 < 3^x < 3 \Leftrightarrow \log_3 2 < x < 1$.

Ví dụ 26: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2} \cdot m^{x+1} - 3^{-x} < 0$ chứa đúng một số nguyên

Lời giải

Điều kiện: $m > 0$. Ta có: $3^{x^2} \cdot m^{x+1} - 3^{-x} < 0 \Leftrightarrow 3^{x^2} \cdot m^{x+1} < 3^{-x} \Leftrightarrow 3^{x^2+x} \cdot m^{x+1} < 1$

$\Leftrightarrow (x^2+x) + (x+1)\log_3 m < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+\log_3 m) < 0$

Nếu $m > 3 \Leftrightarrow \log_3 m > 1 \Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình là: $-\log_3 m < x < -1$

Khi đó, bất phương trình có đúng một nghiệm nguyên khi:

$$-3 \leq -\log_3 m < -2 \Leftrightarrow 2 < \log_3 m \leq 3 \Leftrightarrow 9 < m \leq 27$$

Nếu $0 < m < 3 \Leftrightarrow \log_3 m < 1 \Rightarrow$ tập nghiệm của bất phương trình là $-1 < x < -\log_3 m$

Khi đó, bất phương trình có đúng một nghiệm nguyên khi:

$$0 < -\log_3 m \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \log_3 m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < 1$$

Vậy với $9 < m \leq 27$ và $\frac{1}{3} \leq m < 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2} \cdot m^{x+1} - 3^{-x} < 0$ chứa đúng một số nguyên.

Dạng 9: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Ví dụ 27: Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là: $A = 500 \cdot (1 + 0,075)^n$ (triệu đồng). Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải

Ta có: $500(1 + 0,075)^n \geq 800$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 500: $(1 + 0,075)^n \geq \frac{800}{500} = 1,6$

Lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của bất phương trình: $n \ln(1 + 0,075)^n \geq \ln(1,6)$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $\ln(1 + 0,075)$: $n \geq \frac{\ln(1,6)}{\ln(1 + 0,075)} \approx 9,25$

Vậy thời gian tối thiểu cần gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng là 10 năm.

Ví dụ 28: Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

Lời giải

Giải phương trình: $80000 = 500e^{0,4t}$

Chia cả hai vế của phương trình cho 500: $160 = e^{0,4t}$

Logarit tự nhiên của cả hai vế: $\ln 160 = 0,4t \Rightarrow t = \frac{\ln 160}{0,4} \approx 5,43$

Vậy sau khoảng 5.43 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ vượt mức 80000 con.

Ví dụ 29: Giả sử nhiệt độ $T(^{\circ}\text{C})$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0,5t}$ trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C ?

Lời giải

a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T = 25 + 70e^{0,5 \times 0} = 25 + 70 = 95$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại 30°C .

$$30 = 25 + 70e^{0,5t} \Rightarrow \ln \frac{30 - 25}{70} = 0,5t$$

Giải phương trình trên ta tìm được giá trị của t : $t = 2 \ln \frac{1}{7} \approx 6,04$

Vậy sau khoảng 6,04 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn 30°C .

Ví dụ 30: Tính nồng độ Ion Hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Lời giải

Độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log_{10} [H^+]$.

$\Rightarrow [H^+] = 10^{-pH}$. Do đó, nồng độ ion hydrogen của dung dịch có độ pH là 8 là:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-8} (\text{mol} / \text{lít}).$$

Vậy, nồng độ ion hydrogen của dung dịch là $10^{-8} \text{ mol} / \text{lít}$.

C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\ln(x^2 - 3x + 1) = -9$

Lời giải

Ta có $\ln(x^2 - 3x + 1) = -9 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = e^{-9} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 - e^{-9} = 0$.

Phương trình $x^2 - 3x + 1 - e^{-9} = 0$ có $\Delta = 5 + 4e^{-9} > 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt và có tổng bằng 3.

Câu 2: Giải phương trình $(4,5)^{4x-5} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1}$ là

Lời giải

Ta có: $(4,5)^{4x-5} = \left(\frac{2}{9}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^{4x-5} = \left(\frac{9}{2}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 4x-5 = x+1 \Leftrightarrow x=2$

Câu 3: Tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{11}{7}\right)^{-3x-2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow -3x-2 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -2 \end{cases}$.

Câu 4: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0$.

Lời giải

Ta có: $4.9^x - 13.6^x + 9.4^x = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Suy ra: $T = 0 + 2 = 2$.

Câu 5: Tìm tham số m để phương trình: $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 27 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $t = 2^x > 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + 2m^2 - 27 = 0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m^2 - 27 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 27 > 0 \\ 2m^2 - 27 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{6}}{2} < m < 3\sqrt{3} \Rightarrow S = \{4; 5\}..$$

Câu 6: Cho phương trình $4^x - 2m.2^x + 3m - 2 = 0$ (*) (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

Lời giải

Đặt $t = 2^x$, với $t > 0$, ta được phương trình: $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0$ (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m > 0 \\ m > \frac{2}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} < m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Khi đó: $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 1 < 2^{x_2} \Rightarrow t_1 < 1 < t_2 \Rightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow 3m - 2 - 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1. \text{ Từ đó suy ra } m \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$$

Câu 7: Tìm tham số m để phương trình $4^x - (m+3)2^{x+1} + m+9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải

Ta có: $4^x - (m+3)2^{x+1} + m+9 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2(m+3)2^x + m+9 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = 2^x (t > 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0 \quad (2)$

Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm

$$t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } 1 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - m - 9 > 0 \\ m+9 - 2(m+3) + 1 > 0 \\ 2(m+3) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ -m + 4 > 0 \\ m+3 > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \vee m > 0 \\ m < 4 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1; 2; 3$. Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho phương trình $m4^x - m2^{x+1} + 2m - 12 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

Xét phương trình $m4^x - m2^{x+1} + 2m - 12 = 0 \quad (1)$

Đặt $t = 2^x (t > 0)$ ta được phương trình $mt^2 - 2mt + 2m - 12 = 0 \quad (2)$.

Để (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m^2 + 12m > 0 \\ 2 > 0 \\ \frac{2m-12}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < m < 12 \\ 2 > 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 6 < m < 12.$$

Câu 9: Tìm tham số m để phương trình $4^x - (2m+1).2^x + (m-11).0,5^x + m+11 = 0$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

$$4^x - (2m+1).2^x + (m-11).0,5^x + m+11 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - (2m+1).2^x + (m-11).\frac{1}{2^x} + m+11 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^x (t > 0)$. Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 - (2m+1)t + (m-11).\frac{1}{t} + m+11 = 0 \Leftrightarrow t^3 - (2m+1)t^2 + (m+11)t + m-11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 2mt + 11 - m) = 0 \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 - 2mt + 11 - m = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có ba nghiệm dương phân biệt hay phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1.

Phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ -3m + 12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-1+3\sqrt{5}}{2} \\ m < \frac{-1-3\sqrt{5}}{2} \\ m > 0 \\ m < 11 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1+3\sqrt{5}}{2} < m < 11 \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Câu 10: Tìm tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 1 \\ mx > 8 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(mx-8)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow (x-1)^2 = mx-8 \Leftrightarrow x^2 - (2+m)x + 9 = 0 \quad (2)$$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2+m)^2 - 36 = (m-4)(m+8) > 0 \\ x_1 + x_2 = m+2 > 2 \\ (x_1-1)(x_2-1) = x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1 = 8-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8.$$

Câu 11: Cho phương trình $\log_3^2(3x) - (m+2)\log_3 x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[9; 27]$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \log_3 x, \text{ do } x \in [9; 27] \Rightarrow t \in [2; 3].$$

$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } (t+1)^2 - (m+2)t + 2m - 5 = 0, t \in [2; 3].$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4 = m(t-2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = m-2 \end{cases}$$

$$\text{Để thỏa yêu cầu bài toán thì } 2 < t_2 \leq 3 \Leftrightarrow 4 < m \leq 5.$$

Vậy với $m \in (4; 5]$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[9; 27]$.

Câu 12: Tìm tham số m để bất phương trình $9(\log_3 \sqrt[3]{x})^2 + \log_3 x + 2m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x \in (3; 81)$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

Ta có $9\left(\log_3 \sqrt[3]{x}\right)^2 + \log_3 x + 2m \geq 0 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + \log_3 x + 2m \geq 0 \quad (1)$.

Đặt $t = \log_3 x$, khi $x \in (3; 81) \Rightarrow t \in (1; 4)$

Bất phương trình (1) có dạng: $t^2 + t + 2m \geq 0 \Leftrightarrow 2m \geq -t^2 - t$

Vì hàm số $f(t) = -t^2 - t$ luôn nghịch biến trên $(1; 4)$ nên $2m \geq f(t)$, đúng với mọi $t \in (1; 4)$

$$\Leftrightarrow 2m \geq f(1) = -2 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-20; 10] \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 10\}$.

Vậy có 12 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Biết phương trình $\log_2^2(x^2 + 1) - m \log_2(x^2 + 1) + 8 - m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Tìm m

Lời giải

Đặt $t = \log_2(x^2 + 1), t \geq 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - mt + 8 - m = 0 (*)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m^2 - 4(8 - m) > 0 \\ 8 - m = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 8.$$

Câu 14: Cho phương trình $\log_3^2 x - (2m + 1) \log_3 x + m^2 + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $(x_1 + 1)(x_2 + 3) = 48$.

Lời giải

Đặt $t = \log_3 x$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 - (2m + 1)t + m^2 + m = 0 (*)$.

Nhận xét: Ứng với mỗi nghiệm t của phương trình (*) có một nghiệm $x > 0$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m) = 1 > 0$.

Vậy phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

$$\text{Khi đó } t_1 = \frac{2m + 1 + 1}{2} = m + 1 \Rightarrow x_1 = 3^{m+1}; t_2 = \frac{2m + 1 - 1}{2} = m \Rightarrow x_2 = 3^m \text{ với } x_1 < x_2.$$

Theo đề bài

$$(x_1 + 1)(x_2 + 3) = 48 \Leftrightarrow (3^m + 1)(3^{m+1} + 3) = 48 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2m} + 6 \cdot 3^m - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^m = 3 \\ 3^m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Kết luận: Số phần tử của tập S là 1.

Câu 15: Tìm tham số m để bất phương trình $(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - m) < 0$ có tập nghiệm chứa không quá 6 số nguyên

Lời giải

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} (3^{x+2} - \sqrt{3}) > 0 \\ (3^x - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2} > 3^{\frac{1}{2}} \\ 3^x < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \log_3 m.$$

Do yêu cầu bài toán bất phương trình có 6 nghiệm nguyên nên $\begin{cases} \log_3 m \leq 5 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq 243.$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} (3^{x+2} - \sqrt{3}) < 0 \\ (3^x - m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+2} < 3^{\frac{1}{2}} \\ 3^x > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x > \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 m < x < -\frac{3}{2}.$$

Câu 16: Tìm tham số m để bất phương trình $1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) \geq \log_7(mx^2 + 4x + m)$ có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện: $mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Nếu $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 4x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn.

$$\text{Nếu } m \neq 0 \text{ thì (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \Rightarrow m > 2 \quad (*) \\ m > 2 \end{cases}$$

Khi đó $1 - \log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 1) \geq \log_7(mx^2 + 4x + m), \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \log_7(7x^2 + 7) \geq \log_7(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (7 - m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Nếu $m = 7$ thì (2) $\Leftrightarrow -4x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn.

$$\text{Nếu } m \neq 7 \text{ thì (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - m > 0 \\ 4 - (7 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ -m^2 + 14m - 45 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \Rightarrow m \leq 5. \\ m \geq 9 \end{cases}$$

Kết hợp với (*) ta có $2 < m \leq 5$.

Câu 17: Tìm số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$

Lời giải

Ta biến đổi bất phương trình:

$$3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x - 2 \cdot 4^x - 12^{\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3^x}{4^x} - 2 - \frac{12^{\frac{x}{2}}}{4^x} < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x - 2 - \left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^x < 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x - 2 < 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $3t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < t < 1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0 < t < 1$. Suy ra $0 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Do đó nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là tập $\{1; 2; 3; \dots; 8; 9\}$.

Vậy số nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 của bất phương trình là 9.

Câu 18: Tìm tham số m để bất phương trình: $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện: $mx^2 + 4x + m > 0$ (*) với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ thì (*) trở thành $4x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (không đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$) nên $m = 0$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 0$ thì (*) đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta' = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Ta có: $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \log_5[5(x^2 + 1)] \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m \Leftrightarrow (5 - m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0$ (**) với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 5$ thì (**) trở thành $-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ (không đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$) nên $m = 5$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 5$ thì (**) đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - m > 0 \\ \Delta' = 4 - (5 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ (5 - m)^2 \geq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ 5 - m \geq 2 \\ 5 - m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \leq 3 \\ m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3$.

Kết hợp với điều kiện ta được: $2 < m \leq 3$.

Câu 19: Năm 2020, một doanh nghiệp X có tổng doanh thu là 150 tỉ đồng. Dự kiến trong 10 năm tiếp theo, tổng doanh thu mỗi năm sẽ tăng thêm 12% so với năm liền trước. Theo dự kiến đó thì kể từ năm nào, tổng doanh thu của doanh nghiệp X vượt quá 360 tỉ đồng?

Gọi n là số năm doanh nghiệp X có mức doanh thu vượt quá 360 tỉ đồng kể từ năm 2020.

Lời giải

Ta có $n > \log_{1+12\%} \left(\frac{360}{150} \right) \Leftrightarrow n > 7,72 \Rightarrow n = 8$.

Câu 20: Bạn An gửi tiết kiệm một số tiền ban đầu là 1000000 đồng với lãi suất 0,58% tháng (không kỳ hạn). Hỏi bạn An phải gửi ít nhất bao nhiêu tháng thì được cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1300000 đồng?

Lời giải

Ta có : $1000000(1+0,58\%)^n \geq 1300000 \Leftrightarrow n \geq \log_{(1+0,58\%)} \frac{13}{10} \approx 45,37$.

Vậy bạn An phải gửi ít nhất 46 tháng.

Câu 21: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tích lãi cho năm tiếp theo. Hỏi người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm để nhận được tổng số tiền cả vốn ban đầu và lãi nhiều hơn 140 triệu đồng nếu trong khoảng thời gian gửi người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

Lời giải

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0(1+r\%)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $140 < 100(1+7\%)^n \Leftrightarrow n > \log_{1,07} 0,14 \Leftrightarrow n > 4,97$

Vậy người đó phải gửi ít nhất là 5 năm.

Câu 22: Năm 2020, độ che phủ rừng của nước ta đạt 41,89%. Giả sử độ che phủ rừng mỗi năm tiếp theo đều tăng 1,6% so với độ che phủ rừng của năm liền trước. Kể từ sau năm 2020, năm nào là năm đầu tiên nước ta có độ che phủ rừng trong năm đó đạt trên 58%?

Lời giải

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+1$ là $41,89\%(1+1,6\%)^1$.

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+2$ là $41,89\%(1+1,6\%)^2$.

....

Diện tích trồng rừng mới của năm $2020+n$ là $41,89\%(1+1,6\%)^n$.

Khi đó $41,89\%(1+1,6\%)^n > 58\% \Leftrightarrow 1,016^n > \frac{5800}{4189} \Leftrightarrow n > \log_{1,016} \left(\frac{5800}{4189} \right) \Leftrightarrow n > 20,49950974$

Vậy vào năm $2020+21=2041$ là năm đầu tiên nước ta có độ che phủ rừng trong năm đó đạt trên 58%.

Câu 23: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6%/năm. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả sử trong suốt thời gian gửi lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép $C = A(1+r)^n$ với $A = 50$, $C > 100$, $r = 6\% = 0,06$ ta được:

$$50(1+0,06)^n > 100 \Leftrightarrow 1,06^n > 2 \Leftrightarrow n > \log_{1,06} 2 \approx 11,90.$$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

D // BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Phương trình mũ

Câu 1: Nghiệm của phương trình $3^{3x+5} = 3^{1-x}$ là :

A. $x = -1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 3^{3x+5} = 3^{1-x} \Leftrightarrow 3x+5 = 1-x \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1.$$

Câu 2: Nghiệm của phương trình $10^x = 5$ là

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 2$.

C. $x = \log 5$.

D. $x = \log_5 10$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 10^x = 5 \Leftrightarrow x = \log 5.$$

Câu 3: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x} = 8$ là

A. 3

B. 2.

C. -3

D. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2-2x} = 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} = 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -3$

Câu 4: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x} = 5$.

A. $S = \{0; 2\}$. B. $S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. C. $S = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{2x^2-x} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 5: Tập nghiệm của phương trình $2^{x+1} = 5$ có bao nhiêu phần tử?

A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{x+1} = 5 \Leftrightarrow x = -1 + \log_2 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1 + \log_2 5$.

Câu 6: Số nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-2} = 81$ là

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x^2-2} = 81 \Leftrightarrow 3^{x^2-2} = 3^4 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1}$ là

A. $x = -1; x = 2$. B. Vô nghiệm. C. $x = 1; x = 2$. D. $x = 1; x = -2$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương $5^{-x^2+2x+3} = 5^{x+1} \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1; x = 2$.

Câu 8: Nghiệm của phương trình $5^{x-4} = 125$ là

A. $x = 4$. B. $x = 5$. C. $x = 7$. D. $x = 6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{x-4} = 125 \Leftrightarrow 5^{x-4} = 5^3 \Leftrightarrow x-4=3 \Leftrightarrow x=7$.

Câu 9: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-4} = 3^{x-2}$ là

- A. $\log_2 3$. B. $2\log_2 3 - 4$. C. $\log_3 2$. D. 3.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $2^{x^2-4} = 3^{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = (x-2)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2 - x\log_2 3 + 2\log_2 3 - 4 = 0$

Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và tích các nghiệm bằng $2\log_2 3 - 4$.

Câu 10: Cho phương trình $2^{x^2} \cdot 3^{x+1} = 2$. Tổng các nghiệm của phương trình bằng

- A. $\log_3 2$. B. $\log_2 \frac{3}{2}$. C. $-\log_2 3$. D. $\log_2 3$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $2^{x^2} \cdot 3^{x+1} = 2 \Leftrightarrow \log_2 (2^{x^2} \cdot 3^{x+1}) = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+1)\log_2 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x\log_2 3 + \log_2 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\log_2 3 + 1 \end{cases}.$$

Tổng các nghiệm của phương trình bằng $-1 - \log_2 3 + 1 = -\log_2 3$.

Câu 11: Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+2} = 4$ là

- A. $S = \{-1; 0\}$. B. $S = \{-1\}$. C. $S = \{0\}$. D. $S = \{0; 1\}$.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có } 2^{x^2-x+2} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x+2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x+2} = 4$ là $S = \{0; 1\}$.

Câu 12: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x-\frac{1}{3}} = 9^{x+\frac{4}{3}}$

- A. 31. B. 19. C. 35. D. 22.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có: } 3^{x^2-3x-\frac{1}{3}} = 9^{x+\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x^2 - 3x - \frac{1}{3} = 2x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 + x_2 = 5; x_1 x_2 = -3$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Câu 18: Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$ bằng

A. 3

B. 4

C. 2

D. -2

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 3^{x^2-3x} = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm là 3.

Câu 19: Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2 + 2t - 3 = 0$.

B. $2t^2 - 3t = 0$.

C. $t^2 + t - 3 = 0$.

D. $4t - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow 4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0$. Đặt $t = 2^x$ ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Câu 20: Số nghiệm thực của phương trình: $1 + \ln(x+3) - \ln(x-1)^2 = 0$ là

A. 2.

B. 1

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 1 + \ln(x+3) - \ln(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1)^2 = \ln(x+3) + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1)^2 = \ln e(x+3) \Leftrightarrow (x-1)^2 = ex + 3e \Leftrightarrow x^2 - (2+e)x + 1 - 3e = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{e+2-\sqrt{e^2+16e}}{2} (t/m) \\ x = \frac{e+2+\sqrt{e^2+16e}}{2} (t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $3^{2x^2-6x+2} - 4 \cdot 3^{x^2-3x+2} + 27 = 0$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3^{2x^2-6x+2} - 4 \cdot 3^{x^2-3x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{2(x^2-3x)} - 36 \cdot 3^{x^2-3x} + 27 = 0$$

$$\text{Đặt } 3^{x^2-3x} = t, t > 0, \text{ phương trình (1) trở thành: } 9t^2 - 36t + 27 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = 3$$

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^{3-2x^2} = 5^{x+1} \Leftrightarrow 3-2x^2 = (x+1)\log_4 5 \Leftrightarrow 2x^2 + \log_4 5 \cdot x + \log_4 5 - 3 = 0$.

Nên tích các nghiệm bằng $\frac{\log_4 5 - 3}{2} \approx -0,92$.

Câu 26: Biết phương trình $9^x - 3 \cdot 3^x - 4 = 0$ có nghiệm $x = \log_a b$ (a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 10), giá trị của $a - b$ bằng

- A. 1. B. -2. C. 2. D. -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $9^x - 3 \cdot 3^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -1(\text{loại}) \\ 3^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_3 4$. Suy ra $a = 3; b = 4$. Vậy $a - b = -1$

Câu 27: Biết phương trình $\log_5^2 x - m \log_5 x - 7 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính tích $x_1 \cdot x_2$

- A. $x_1 \cdot x_2 = 5^{-m}$. B. $x_1 \cdot x_2 = -7$. C. $x_1 \cdot x_2 = 5^{-7}$. D. $x_1 \cdot x_2 = 5^m$.

Lời giải

Chọn D

Với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Ta có $\log_5(x_1 \cdot x_2) = \log_5 x_1 + \log_5 x_2 = m \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 5^m$.

Câu 28: Phương trình $9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Giá trị $2x_1 + 3x_2$ bằng

- A. $4\log_2 3$. B. 2. C. 0. D. $3\log_3 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_3 2 \end{cases}$.

Vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0, x_2 = \log_3 2$.

Khi đó: $2x_1 + 3x_2 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot \log_3 2 = 3\log_3 2$.

Câu 29: Tổng tất các các nghiệm của phương trình $9^x - 5 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ bằng

- A. $\log_{\frac{3}{2}} 2$. B. $\log_{\frac{3}{2}} 6$. C. $\log_{\frac{3}{2}} 3$. D. $\log_{\frac{2}{3}} 6$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $9^x - 5 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Phương trình } \log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 4.$$

Câu 34: Giả sử phương trình $25^x + 15^x = 6.9^x$ có một nghiệm duy nhất được viết dưới dạng

$\frac{a}{\log_b c - \log_b d}$ với a là số nguyên dương và b, c, d là các số nguyên tố. Tính $S = a^2 + b + c + d$

A. $S = 14$.

B. $S = 11$.

C. $S = 19$.

D. $S = 12$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 25^x + 15^x = 6.9^x \Leftrightarrow 5^{2x} + (3.5)^x - 6.3^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{3}\right)^x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2 \\ \left(\frac{5}{3}\right)^x = -3 \quad (\text{ptvn}) \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{3}} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{5}{3}} = \frac{1}{\log_2 5 - \log_2 3}.$$

Từ đây suy ra $a = 1, b = 2, c = 5, d = 3$. Vậy $S = 1^2 + 2 + 5 + 3 = 11$.

Câu 35: Tập nghiệm của bất phương trình $(9^x - 244.3^x + 243) \cdot \sqrt{8 - \log_2(x+2)} \geq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. 252.

B. 250.

C. 249.

D. 254.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 > 0 \\ 8 - \log_2(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \log_2(x+2) \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x+2 \leq 256 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 254.$$

Trường hợp 1: $\log_2(x+2) = 8 \Leftrightarrow x+2 = 256 \Leftrightarrow x = 254$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $8 - \log_2(x+2) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 254$.

$$\text{Ta có } (9^x - 244.3^x + 243) \cdot \sqrt{8 - \log_2(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow 9^x - 244.3^x + 243 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \geq 243 \\ 3^x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $-2 < x < 254$ suy ra nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} 5 \leq x < 254 \\ -2 < x \leq 0 \end{cases}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-2; 0] \cup [5; 254]$.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình có 252 số nguyên.

Câu 36: Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(3; 5)$. C. $(-5; 0)$. D. $(-7; -5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6.2^x + m = 0$.

Đặt $t = 2^x (t > 0) \Rightarrow t^2 - 6t + m = 0$ (*)

$$(*) \text{ có hai nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - m \geq 0 \\ 6 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 9$$

Ta có: $t_1.t_2 = 2^{x_1+x_2} = 2^2 = 4 = m$

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - (m+1).2^x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 + x_1 + x_2 \leq 2$?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Phương trình có dạng $t^2 - (m+1)t + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m-1 \end{cases}$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m-1 > 0 \\ m-1 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

Khi đó $x_1 = 1; x_2 = \log_2(m-1)$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1 + x_2 \leq 2 \Leftrightarrow 1.\log_2(m-2) + 1 + \log_2(m-2) \leq 2 \Leftrightarrow \log_2(m-2) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq 2 + \sqrt{2}.$$

Kết hợp ta được $1 < m \leq 2 + \sqrt{2}; m \neq 3; m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 2$.

Câu 38: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m.3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 9.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 1.

D. 8.

Lời giải**Chọn D**

Phương trình $9^x - 2m \cdot 3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 2$ khi

$$\begin{cases} m^2 - 1 \cdot (m^2 - 8m) > 0 \\ 2m > 0 \\ m^2 - 8m > 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 9 \end{cases} \Rightarrow S = \{-1; 9\}$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 8.

Câu 39: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - 2m \cdot 3^x + m^2 - 8m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2$. Tổng các giá trị của S bằng.

A. 9.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 1.

D. 8.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $9^x - 2m \cdot 3^x + m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2m \cdot 3^x + m^2 - 8m = 0 (*)$

Đặt $3^x = t$ $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - 8m = 0$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

$$\Leftrightarrow m^2 - m^2 + 8m > 0 \Leftrightarrow 8m > 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Theo vi-ét ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 \cdot t_2 = m^2 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = m^2 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ 3^{x_1 + x_2} = m^2 - 8m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x_1} + 3^{x_2} = 2m \\ x_1 + x_2 = \log_3(m^2 - 8m) \end{cases}$$

Mà $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow \log_3(m^2 - 8m) = 2$.

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m = 9 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow S = 9. \text{ Vì } m > 0$$

Câu 40: Cho phương trình $4^x - (m+3)2^x + 8 = 0$ (m là tham số). Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 8$ thì giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (29;30).

B. (27;28).

C. (30;31).

D. (28;29).

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t = 2^x$.

Phương trình có dạng: $t^2 - (m+3)t + 8 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 + 6m - 23 > 0 \\ m + 3 > 0 \\ 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > 4\sqrt{2} - 3 \\ m < -4\sqrt{2} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4\sqrt{2} - 3.$$

Ta có: $2^{x_1} = t_1 \Rightarrow x_1 = \log_2 t_1$; $2^{x_2} = t_2 \Rightarrow x_2 = \log_2 t_2$.

Suy ra $x_1 + x_2 = \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2 (t_1 t_2) = \log_2 8 = 3$.

Ta có: $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 8 \Leftrightarrow x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = 8 \Leftrightarrow x_1 x_2 = -10$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{4} \\ t_2 = 32 \end{cases}.$$

$$t_1 + t_2 = m + 3 \Rightarrow m + 3 = 32,25 \Leftrightarrow m = 29,25.$$

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-21; 21]$ để hai phương trình

$$4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16 \text{ và } |m-9| \cdot 3^{x-2} + m \cdot 9^{x-1} = 1 \text{ là hai phương trình tương đương?}$$

A. 32.

B. 11.

C. 10.

D. 31.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 3^x > 0$, phương trình hai trở thành: $mt^2 + |m-9|t - 9 = 0 \quad (3)$.

$$\text{Ta có: } 4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16 \Leftrightarrow 2^{2(x+1)} + 6 \cdot 2^{x+1} - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+1} = 2 \Rightarrow x = 0 \\ 2^{x+1} = -8 \text{ (ptvn)} \end{cases}.$$

Trường hợp 1: Để hai phương trình tương đương thì thỏa đồng thời 2 điều kiện sau:

$$\text{Với } x = 0 \text{ cũng là nghiệm phương trình thứ hai} \Rightarrow |m-9| \cdot 3^{0-2} + m \cdot 9^{0-1} = 1 \Leftrightarrow |m-9| = 9-m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-m \geq 0 \\ m-9 = 9-m \Rightarrow m \leq 9 \\ m-9 = m-9 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai có duy nhất 1 nghiệm $x = 0$ thì $pt(3)$ có thêm 1 nghiệm $t \leq 0$

$$\Leftrightarrow -9 \cdot m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Trường hợp 2: Để hai phương trình tương đương thì phương trình (3) có nghiệm kép $t = 1$

$$\Rightarrow -\frac{|m-9|}{2m} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = -9 \Rightarrow m = -9. \\ m = 6 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m \in [-21; 21]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-9; 0; 1; 2; \dots; 9\}$.

Câu 42: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 2.

B. 1.

C. 7.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $5^x = t (t > 0)$ thì phương trình trở thành: $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0 (*)$

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm thì $t_1 > t_2 > 0$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4(7m^2 - 7) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 28 > 0 \\ m > 0 \\ m > 1 \vee m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2\sqrt{21}}{3} < m < \frac{2\sqrt{21}}{3} \\ m > 0 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Vậy tập hợp S có hai phần tử là: 2 và 3..

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 9.

B. 4.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\sqrt{x^2 - 3x + m} = a (a \geq 0)$.

$$\text{Khi đó: } 3^{2a} + 2 \cdot 3^{a-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2a-2x} + \frac{2}{9} \cdot 3^{a-x} - \frac{1}{27} < 0 \Leftrightarrow \left(3^{a-x} + \frac{1}{9}\right)^2 < \left(\frac{2}{9}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3^{a-x} + \frac{1}{9} < \frac{2}{9} \Leftrightarrow 3^{a-x} < 3^{-2}$$

$$\text{Nên: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a < x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x + m} < x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x < 4-m \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 4-m > 2 \Leftrightarrow m < 2$$

Do m nguyên dương nên $m = 1$.

Câu 44: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử là số chẵn?

- A. 2. B. 3. C. 6. D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 4m \cdot 4^x + 5m^2 - 45 = 0$$

$$\text{Đặt } 4^x = t \ (t > 0) \text{ khi đó phương trình (*) trở thành: } t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$$

Khi đó phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - (5m^2 - 45) > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45 - m^2 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{4; 5; 6\}$ nên có 2 giá trị m chẵn thỏa mãn.

2. Phương trình logarit

Câu 45: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{2023}(x^2 + 2022x) = 1$ bằng

- A. -2022. B. -2023. C. 2023. D. 2022.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } x^2 + 2022x = 2023 \Leftrightarrow x^2 + 2022x - 2023 = 0 \ (1).$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt nên theo Vi-et suy ra tổng các nghiệm là $x_1 + x_2 = -2022$.

Câu 46: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x - 6) = 3$ là

- A. $x = 6$ B. $x = 9$ C. $x = 8$ D. $x = 7$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_2(2x - 6) = 3 \Leftrightarrow 2x - 6 = 2^3 \Leftrightarrow x = 7$$

Câu 47: Nghiệm của phương trình $\log_2(x - 1) = 1$ là

A. $x = 3$.

B. $x = -1$

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 48: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

A. $x = 10$.

B. $x = 9$.

C. $x = 7$.

D. $x = 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow x-1 = 2^3 \Leftrightarrow x = 9$.

Câu 49: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 + 1) = 2$ là

A. $S = \{\sqrt{3}\}$.

B. $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

C. $S = \{-1; 1\}$.

D. $S = \{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.

Câu 50: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ bằng

A. 8

B. 6

C. 16

D. 2

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

Suy ra $x_1 \cdot x_2 = 8$

Câu 51: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(1-x) = 2$ là

A. $x = -4$.

B. $x = 3$.

C. $x = -3$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(1-x) = 2 \Leftrightarrow 1-x = 2^2 \Leftrightarrow x = -3$.

Câu 52: Tập nghiệm của phương trình $\ln(x+4) - \ln(2x-3) = 0$ là

A. $\left\{7; \frac{3}{2}\right\}$.

B. $\{7\}$.

C. $\left\{-4; \frac{3}{2}\right\}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > \frac{3}{2}$.

Ta có: $\ln(x+4) - \ln(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x+4 = 2x-3 \Leftrightarrow x = 7(tm)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{7\}$.

Câu 53: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x^2 + 3x) = 2$ là

A. $S = \{1; -4\}$.

B. $S = \{-1; 4\}$.

C. $S = \{1\}$.

D. $S = \{4\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \end{cases}$.

Ta có: $x^2 + 3x = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(TM) \\ x = -4(TM) \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; -4\}$.

Câu 54: Phương trình $\log(4x+1) = \log(2x+5)$ có nghiệm là

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log(4x+1) = \log(2x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 > 0 \\ 4x+1 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Câu 55: Tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-3) = \log_2(2x-1)$ là

A. $S = \{0\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{-2\}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x > 3$

Ta có: $\log_2(x-3) = \log_2(2x-1) \Leftrightarrow x-3 = 2x-1 \Leftrightarrow x = -2(KTMĐK)$. Vậy $S = \emptyset$.

Câu 56: Nghiệm của phương trình $\log_2(2x) = 3$ là?

A. $x = 3$.

B. $x = 4$.

C. $x = \frac{9}{2}$.

D. $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Ta có: $\log_2(2x) = 3 \Leftrightarrow 2x = 2^3 \Leftrightarrow x = 4(tm)$.

Câu 57: Nghiệm của phương trình $\log_4(x-1)=3$ là

A. $x=66$.

B. $x=68$.

C. $x=65$.

D. $x=63$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_4(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=4^3 \Leftrightarrow x=65$.

Câu 58: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2x=2$ là

A. $x=\frac{1}{2}$.

B. $x=\frac{3}{2}$.

C. $x=\frac{2}{3}$.

D. $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x+2>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

Ta có $\log_2(x+2)-\log_2x=2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_24+\log_2x$

$\Leftrightarrow \log_2(x+2)=\log_24x \Leftrightarrow x+2=4x \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)-\log_2x=2$ là $x=\frac{2}{3}$.

Câu 59: Biết phương trình $2\log_3x+2\log_x3=5$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=6x_1^2-x_2+1$.

A. $T=16$.

B. $T=10$.

C. $T=8$.

D. $T=12$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Phương trình $2\log_3x+2\log_x3=5 \Leftrightarrow 2\log_3x+2\frac{1}{\log_3x}=5$

$\Leftrightarrow 2\log_3^2x-5\log_3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3x=\frac{1}{2} \\ \log_3x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{3} \\ x_2=9 \end{cases} \Rightarrow T=6x_1^2-x_2+1=10$.

Câu 60: Tổng các nghiệm của phương trình $\log^2x-\log x-2=0$ bằng

A. $\frac{1001}{100}$.

B. 101.

C. $\frac{1001}{10}$.

D. 1

Lời giải

Chọn C

Lời giải**Chọn C**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $\log_3(9^x - 5 \cdot 3^x + 7) = x + 1 \Leftrightarrow 9^x - 5 \cdot 3^x + 7 = 3^{x+1}$

$$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 7 - 3 \cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x + 7 = 0$$

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$) phương trình trở thành $t_1 \cdot t_2 = 3^{x_1 + x_2} \Leftrightarrow 7 = 3^{x_1 + x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_3 7$

Câu 65: Phương trình $(x^2 - 4x + 3)\log_{2023}(x^2 - 4) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải**Chọn C**

Điều kiện: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$.

Phương trình tương đương $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \log_{2023}(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện, ta nhận $x = 3, x = \pm\sqrt{5}$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm.

Vậy $S = \emptyset$.

Câu 66: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(3x + 6) = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải**Chọn B**

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ 3x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -4 \\ x > 0 \end{cases} \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x > 0$.

Ta có $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(3x + 6) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2 + 4x) = \log_3(3x + 6) \Leftrightarrow x^2 + 4x = 3x + 6$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm $x = 2$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất.

Câu 67: Biết rằng phương trình $\log_3(x^2 - 2021x) = 2022$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $x_1 + x_2$.

A. $x_1 + x_2 = -3^{2022}$.

B. $x_1 + x_2 = -2022^3$.

C. $x_1 + x_2 = 2021$.

D. $x_1 + x_2 = -2021$.

Lời giải

Phương trình: $\log_3(x^2 - 2021x) = 2022 \Leftrightarrow x^2 - 2021x = 3^{2022} \Leftrightarrow x^2 - 2021x - 3^{2022} = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 nên theo định lí Viét ta có: $x_1 + x_2 = 2021$.

Câu 68: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$?

A. 0.

B. 3

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$

Ta có: $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2 \Leftrightarrow \log_2[x(x - 3)] = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(l) \\ x = 4(tm) \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 69: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x + 2) + \log_3(x - 2) = \log_3 5$ là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(x + 2) + \log_3(x - 2) = \log_3 5$ (*)

Điều kiện $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

$(*) \Rightarrow \log_3[(x + 2)(x - 2)] = \log_3 5 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4) = \log_3 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện suy ra $x = 3$.

Câu 70: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x - 1) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)^3 = 3$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5(*)$.

Với điều kiện (*) phương trình $3\log_3(x - 1) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)^3 = 3 \Leftrightarrow \log_3(x - 1) + \log_3(x - 5) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x - 1)(x - 5) = 1 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$.

Vậy số nghiệm thực của phương trình đã cho là 2.

Câu 71: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) - \log_2 x = 2$ là

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{3}{2}$.

C. $x = \frac{2}{3}$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Ta có $\log_2(x+2) - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2(x+2) = \log_2 4 + \log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2(x+2) = \log_2 4x \Leftrightarrow x+2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình $\log_2(x+2) - \log_2 x = 2$ là $x = \frac{2}{3}$.

Câu 72: Cho phương trình $\log_2(2x-1)^2 = 2\log_2(x-2)$. Số nghiệm thực của phương trình là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} (2x-1)^2 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases}$.

$\log_2(2x-1)^2 = 2\log_2(x-2) \Leftrightarrow 2\log_2(2x-1) = 2\log_2(x-2) \Leftrightarrow \log_2(2x-1) = \log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x-1 = x-2 \Leftrightarrow x = -1$ (không thỏa mãn).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 73: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x - 1) = \log_{\frac{1}{3}} 8x - \log_{\frac{1}{3}} 4x$ bằng

A. 5

B. 1

C. 4

D. 3

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0, x^2 - 4x - 1 > 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 4x - 1} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{8x}{4x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(ktm) \\ x = 5(tm) \end{cases}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 5.

Câu 74: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$ là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}, x \neq 1$

Ta có: $\log_2(x-1)^2 + \log_{\sqrt{2}}(2x+1) = 2 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 + \log_2(2x+1)^2 = \log_2 4$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x-1)(2x+1)]^2 = \log_2 4 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = -2 \\ 2x^2 - x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 = 0(VN) \\ 2x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$$

Thử lại ta có một nghiệm $x = \frac{3}{2}$ thỏa mãn.

Câu 75: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\log_8(x+2)^3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 2) = 0$. Tổng các phần tử của S là

A. 2.

B. -5.

C. 1.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2 > 0 \\ x^2 - 4x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 2 + \sqrt{2} \\ x < 2 - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 + \sqrt{2} \\ -2 < x < 2 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Ta có: $\log_8(x+2)^3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(x+2) - \log_2(x^2 - 4x + 2) = 0$.

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2) = \log_2(x^2 - 4x + 2) \Leftrightarrow x+2 = x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 5\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 5.

Câu 76: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x$ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 2 + \sqrt{5}$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 8x - \log 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log(x^2 - 4x - 1) = \log 2$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 - 4x - 1) = \log 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Do $x > 2 + \sqrt{5}$ nên $x = 5$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình bằng 5.

Câu 77: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(2x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 5$.

$$\text{Ta có: } 3\log_3(2x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3 \Leftrightarrow 3\log_3(2x-1) + 3\log_3(x-5) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1) \cdot (x-5) = 1 \Leftrightarrow (2x-1)(x-5) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11 + \sqrt{105}}{4} > 5 \\ x = \frac{11 - \sqrt{105}}{4} < 5 \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 78: Phương trình $\log_x 5 \cdot \log_5 x = 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$?

A. 10.

B. 8.

C. 9.

D. 21.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$.

$$\text{Với điều kiện trên ta có: } \log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x} \Rightarrow \log_x 5 \cdot \log_5 x = 1.$$

Vậy phương trình $\log_x 5 \cdot \log_5 x = 1$ có 9 nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$.

Câu 79: Phương trình $\log_3(x+2) + \frac{1}{2}\log_3(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{3}} 8 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}.$$

$$\log_3(x+2) + \frac{1}{2}\log_3(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{3}}8 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+2) + \log_3|x-5| = \log_3 8$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x+2)|x-5|] = \log_3 8 \Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8.$$

Trường hợp 1: $x > 5$, ta có: $(x+2)(x-5) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 & (tm) \\ x = -3 & (l) \end{cases}$.

Trường hợp 2: $-2 < x < 5$, ta có: $(x+2)(x-5) = -8 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} (tm)$.

Câu 80: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. $4 + \sqrt{2}$.

B. $8 + \sqrt{2}$.

C. 6.

D. $6 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 2x-2 > 0 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 3 \end{cases} (*)$

Với điều kiện (*) phương trình $2\log_2(2x-2) + \log_2(x-3)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2 + \log_2(x-3)^2 = 2 \Leftrightarrow \log_2[(2x-2)^2(x-3)^2] = 2$$

$$\Leftrightarrow [(2x-2)(x-3)]^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-2)(x-3) = 2 \\ (2x-2)(x-3) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 4 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có các nghiệm $x = 2 + \sqrt{2} (N)$; $x = 2 - \sqrt{2} (L)$

Phương trình (2) có nghiệm $x = 2 (N)$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2 + \sqrt{2}; 2\}$. Tổng các nghiệm bằng $4 + \sqrt{2}$.

Câu 81: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$ bằng

A. 12.

B. 6.

C. 32.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 2^x > 0 \\ 12 - 2^x = 2^{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 12 \\ (2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 12 \\ 2^x = 8 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_2 12 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó tích các nghiệm của phương trình là $P = 3.2 = 6$.

Câu 82: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 + x + 1) = 2 + \log_2 x$.

- A. 6. B. 3. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 0$

Ta có $\log_2(x^2 + x + 1) = 2 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x^2 + x + 1) = \log_2(4x) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 4x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn). Vậy tổng các nghiệm bằng $\frac{3}{2}$.

Câu 83: Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $|m| < 2023$ và phương trình $\log_{16}(mx) = \log_2(\sqrt{x+1})$ có nghiệm thực duy nhất?

- A. 2024. B. 2025. C. 2023. D. 2022.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ mx > 0 \end{cases}$

Ta có: $\log_{16}(mx) = \log_2(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \log_2(mx) = 4\log_2(\sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow \log_2(mx) = \log_2(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + (2-m)x + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm kép lớn hơn -1 hoặc có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 > -1 \geq x_2$

Trường hợp 1: $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2-m)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m(m-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$

Nếu $m = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (KTM)

Nếu $m = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM)

Trường hợp 2: $x_1 > -1 > x_2 \Leftrightarrow f(-1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ |m| < 2023 \end{cases}$ nên có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Trường hợp 3: Phương trình có một nghiệm $x = -1$ và có một nghiệm lớn hơn -1 .

$$x = -1 \Rightarrow 1 - (2 - m) + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Với $m = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ khi đó phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = x_2 = -1$ (KTM)

Vậy có 2023 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 84: Có bao nhiêu số nguyên dương a để tồn tại đúng hai số thực b phân biệt, thỏa mãn điều kiện $(4\log_2^2 b + \log_2 b - 5)\sqrt{7^b - a} = 0$.

A. 48.

B. 47.

C. 49.

D. 46.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (4\log_2^2 b + \log_2 b - 5)\sqrt{7^b - a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, b \geq \log_7 a \\ \log_2 b = 1 \\ \log_2 b = \frac{-5}{4} \\ 7^b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, b \geq \log_7 a \\ b = 2 \\ b = 2^{\frac{-5}{4}} \\ b = \log_7 a \end{cases}.$$

$$\text{Để tồn tại đúng hai số thực } b \text{ phân biệt} \Leftrightarrow 2^{\frac{-5}{4}} \leq \log_7 a < 2 \Leftrightarrow 7^{2^{\frac{-5}{4}}} \leq a < 49 \Rightarrow a \in \{3; 4; \dots; 48\}$$

Câu 85: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\log_2(x-3) + (2m+5)\log_{\sqrt{x-3}} 2 = 2m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 5$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 2\log_2(x-3) + (2m+5)\log_{\sqrt{x-3}} 2 = 2m \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } 3 < x \neq 4 \text{ khi đó } (1) \Leftrightarrow \log_2^2(x-3) - m\log_2(x-3) + (2m+5) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(x-3); x \in (3; 5) \setminus \{4\} \Rightarrow t \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}.$$

$$\text{Thay } t \text{ vào } (2) \text{ ta được: } t^2 - mt + (2m+5) = 0 \quad (3).$$

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 5$

$$\Leftrightarrow (3) \text{ có hai nghiệm phân biệt } t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } t_1, t_2 \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 8m - 20 > 0 \\ 1. f(1) = m + 6 > 0 \\ f(0) = 2m + 5 \neq 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{m}{2} < 1 \end{cases}, \text{ với } f(t) = t^2 - mt + (2m+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -2) \cup (10; +\infty) \\ m \in (-6; 2) \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-6; -2) \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 86: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho ứng với mỗi x tồn tại đúng hai số thực y thỏa mãn $(\log_2^2 y - 3\log_2 y + 2)\sqrt{3^y - x} = 0$?

A. 78.

B. 72.

C. 79.

D. 73.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(\log_2^2 y - 3\log_2 y + 2)\sqrt{3^y - x} = 0$

Điều kiện: $\begin{cases} y > 0 \\ y \geq \log_3 x \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 y - 3\log_2 y + 2 = 0 \\ 3^y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 4 \\ y = \log_3 x \end{cases}$.

Để tồn tại đúng hai số thực $y \Leftrightarrow 2 \leq \log_3 x < 4 \Leftrightarrow 9 \leq x < 81 \Rightarrow x \in \{9; 10; \dots; 80\}$.

Câu 87: Biết tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(4^x + 48) = x + 4$ bằng $a + b\log_2 3$ với $(a; b \in \mathbb{Q})$.

Tính $2a + b$.

A. $2a + b = 8$.

B. $2a + b = 5$.

C. $2a + b = 9$.

D. $2a + b = 6$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(4^x + 48) = x + 4 \Leftrightarrow 4^x + 48 = 2^{x+4} \Leftrightarrow 2^{2x} - 16 \cdot 2^x + 48 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_2 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 + \log_2 3 \end{cases}$.

Vậy tổng các nghiệm là: $4 + \log_2 3 \Rightarrow a = 4; b = 1 \Rightarrow 2a + b = 9$.

Câu 88: Cho hai số thực x, y thỏa $1 < x < y$ và $\log_x(y^4) + \log_y(x^5) = 9$. Tính $\log_{xy} \frac{x^5 + y^4}{2}$.

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{20}{9}$.

D. $\frac{45}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = \log_x y (t > 1) \Leftrightarrow y = x^t$, khi đó $\log_x(x^{4t}) + \log_{x^t}(x^5) = 9 \Leftrightarrow 4t + \frac{5}{t} = 9 \Rightarrow t = \frac{5}{4}$.

$\Rightarrow y = x^{\frac{5}{4}} \Rightarrow \begin{cases} y^4 = x^5 \\ xy = x^{\frac{9}{4}} \end{cases} \Rightarrow \log_{xy} \frac{x^5 + y^4}{2} = \log_{x^{\frac{9}{4}}} \frac{2x^5}{2} = \frac{20}{9}$.

3. Bất phương trình mũ

Câu 89: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 3$ là

- A. $[-2; +\infty)$. B. $(-2; +\infty)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-\infty; -2]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 3 \Leftrightarrow x+1 < -1 \Leftrightarrow x < -2.$$

Câu 90: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x-2} \geq 2$ là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(3; +\infty)$. C. $[2; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2^{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Câu 91: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x - 5 \leq 0$ là

- A. $S = (-\infty; \log_2 5]$. B. $S = (0; \log_2 5]$. C. $S = [0; \log_2 5]$. D. $S = (0; \log_5 2]$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2^x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \log_2 5.$$

Tập nghiệm của bất phương trình $2^x - 5 \leq 0$ là $S = (-\infty; \log_2 5]$.

Câu 92: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x > 27$

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(3; +\infty)$. C. $(9; +\infty)$ D. $(0; 3)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 3^x > 27 \Leftrightarrow 3^x > 3^3 \Leftrightarrow x > 3 \Leftrightarrow x \in (3; +\infty).$$

Câu 93: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \geq \frac{1}{27}$ là

- A. $(-\infty; 2]$. B. $[2; +\infty)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $(-\infty; 3]$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có cơ số } 0 < a = \frac{1}{3} < 1.$$

$$\text{Nên bất phương trình đã cho tương đương } 2x-1 \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \Leftrightarrow 2x-1 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 2]$.

Câu 94: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là

- A. $(-\infty; 0)$. B. $[-4; +\infty)$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 4]$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 3^{x+2} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow x+2 \geq \log_3 \frac{1}{9} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4.$$

Câu 95: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1} < 4$ là

- A. $(-\infty; 1]$. B. $(1; +\infty)$. C. $[1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2^{x+1} < 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} < 2^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1. \text{ Vậy tập của bất phương trình là } (-\infty; 1).$$

Câu 96: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x+3} > \frac{1}{25}$ là

- A. $\left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 5^{2x+3} > \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{2x+3} > 5^{-2} \Leftrightarrow 2x+3 > -2 \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}.$$

Câu 97: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} < 16$ là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $[1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1]$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 4^{x+1} < 16 \Leftrightarrow 4^{x+1} < 4^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy tập nghiệm của bài toán là $(-\infty; 1)$.

Câu 98: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

- A. $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$. C. $\left[\frac{-2}{3}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \geq x-2 \Leftrightarrow 3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-2}{3}.$$

Câu 99: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \leq \left(\frac{11}{17}\right)^{x^2}$ là

- A. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. B. $[0; 3]$. C. $[-3; 0]$. D. $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có: } \left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \leq \left(\frac{11}{17}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{17}{11}\right)^{3x} \leq \left(\frac{17}{11}\right)^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \geq 3x \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3; 0].$$

Câu 100: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \geq 8$ là

- A. $(-3; +\infty)$. B. $[-3; +\infty)$. C. $(3; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2^x \geq 8 \Leftrightarrow 2^x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [3; +\infty)$.

Câu 101: Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5} - 2)^{x+1} > 9 - 4\sqrt{5}$

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-\infty; 1]$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } (\sqrt{5} - 2)^{x+1} > 9 - 4\sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{5} - 2)^{x+1} > (\sqrt{5} - 2)^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 1.$$

Câu 102: Số nghiệm nguyên trong khoảng $(-50; 50)$ của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \geq 0$ là

- A. 100. B. 98. C. 99. D. 51.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Đặt } t = 4^x, (t > 0) \text{ ta được } t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 1 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 4^x \leq 1 \\ 4^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Kết hợp $\begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ x \in (-50; 50) \end{cases}$ nên có 99 giá trị x thỏa mãn.

Câu 103: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{x}} - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} > 15$ có tập nghiệm $S = (a; b)$. Giá trị của biểu thức

$2a + 5b$ bằng

- A. -5. B. -2. C. 0. D. -3.

Lời giải**Chọn B**

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $t = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$, $t > 0$.

Bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 15 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 5 \\ t < -3 \text{ (KTM)} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}} > 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$$

Vậy tập nghiệm là $S = (-1; 0)$. Do đó $2a + 5b = -2$.

Câu 104: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}} - 5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} > 14$ có tập nghiệm $S = (a; b)$. Giá trị của biểu thức

$3a + 4b$ bằng

A. -3.

B. -2.

C. -5.

D. 0.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}} - 5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} > 14 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{x}} - 5\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} - 14 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} > 7 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} < -2 \text{ (vn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm $S = (-1; 0)$, do đó $3a + 4b = -3$.

Câu 105: Số nghiệm nguyên của phương trình $(9^x - 5 \cdot 6^x - 6 \cdot 4^x) \sqrt{128 - 2^{\sqrt{x}}} > 0$.

A. 45

B. 48

C. 49.

D. 44.

Lời giải**Chọn D**

Ta có:

$$(9^x - 5 \cdot 6^x - 6 \cdot 4^x) \sqrt{128 - 2^{\sqrt{x}}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 5 \cdot 6^x - 6 \cdot 4^x > 0 \\ 128 - 2^{\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x > 6 \\ \sqrt{x} < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \log_{1.5} 6 < x < 49$$

$\Rightarrow x \in \{5; 6; 7; \dots; 48\}$. Vậy bất phương trình đã cho có 44 nghiệm nguyên.

Câu 106: Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $(9^x - 5 \cdot 6^x - 6 \cdot 4^x) \sqrt{128 - 2^{\sqrt{x}}} > 0$ là

A. 45.

B. 48.

C. 49.

D. 44.

Lời giải**Chọn D**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 128 - 2^{\sqrt{x}} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 49.$

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 128 - 2^{\sqrt{x}} > 0 \\ 9^x - 5 \cdot 6^x - 6 \cdot 4^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ \left(\frac{9}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x > 6 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 49 \\ x > \log_{\frac{3}{2}} 6 \end{cases} \Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}} 6 < x < 49.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, và x là số nguyên, nên $x \in \{5, 6, 7, \dots, 47, 48\}.$

Vậy có 44 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu đề.

- Câu 107:** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5} + 3^{x^2+2x} \geq 3^{(x+1)^2+1} + 5 \cdot 2^{x^2+2x}$ là
A. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty).$ **B.** $[-1; 3].$ **C.** $[-3; 1].$ **D.** $[-1; 0].$

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $2^{x^2+2x+5} + 3^{x^2+2x} \geq 3^{(x+1)^2+1} + 5 \cdot 2^{x^2+2x} \Leftrightarrow 2^5 \cdot 2^{x^2+2x} - 5 \cdot 2^{x^2+2x} \geq 3^2 \cdot 3^{x^2+2x} - 3^{x^2+2x}$

$$\Leftrightarrow 27 \cdot 2^{x^2+2x} \geq 8 \cdot 3^{x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x} \leq \frac{27}{8} \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq \log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

- Câu 108:** Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 4 - 3^{1-x}$ là $(a; b).$ Giá trị $a + b$ bằng
A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $3^x < 4 - 3^{1-x} \Leftrightarrow 3^x < 4 - \frac{3}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0; 1)$ do đó $a = 0, b = 1.$

- Câu 109:** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$ là?

A. $\left[\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

C. $\left[\frac{-2}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \geq x-2 \Leftrightarrow 3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-2}{3}$.

Câu 110: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ là

A. $(-\infty; 2)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-2; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x-2 \Leftrightarrow x > -2$. Vậy $S = (-2; +\infty)$.

Câu 111: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x+5} + 3^{x^2+2x} \geq 3^{(x+1)^2+1} + 5.2^{x^2+2x}$ là

A. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

B. $[-1; 3]$.

C. $[-3; 1]$.

D. $[-1; 0]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{x^2+2x+5} + 3^{x^2+2x} \geq 3^{(x+1)^2+1} + 5.2^{x^2+2x} \Leftrightarrow 2^5.2^{x^2+2x} - 5.2^{x^2+2x} \geq 3^2.3^{x^2+2x} - 3^{x^2+2x}$

$\Leftrightarrow 27.2^{x^2+2x} \geq 8.3^{x^2+2x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+2x} \leq \frac{27}{8} \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq \log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

Câu 112: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 5^{3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 3x^2 < 5x+2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 2$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1\}$.

Số nghiệm nguyên của bất phương trình là 2.

Câu 113: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 5^{3x^2} < 5^{5x+2} \Leftrightarrow 3x^2 < 5x+2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 2.$$

Kết hợp điều kiện $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \{0;1\}$

Câu 114: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1} < 32$ là

A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$.

C. $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$.

D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Bất phương trình đã cho } \Leftrightarrow 2^{x^2-1} < 2^5 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 5 \Leftrightarrow x^2 < 6 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < x < \sqrt{6}.$$

Câu 115: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 1)$.

C. $S = (2; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2 < 2x \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; +\infty)$.

Câu 116: Tập nghiệm của bất phương trình $(3^x + 2)(4^{x+1} - 8^{2x+1}) \leq 0$

A. $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$.

C. $(-\infty; 4]$

D. $[4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } 3^x + 2 > 0 \forall x \text{ nên } (3^x + 2)(4^{x+1} - 8^{2x+1}) \leq 0 \Leftrightarrow 4^{x+1} - 8^{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow 4^{x+1} \leq 8^{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x+2} \leq 2^{6x+3} \Leftrightarrow 2x+2 \leq 6x+3 \Leftrightarrow 4x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Câu 117: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$ là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Bất phương trình } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x} \Leftrightarrow 2^{-x^2+2} > 2^{4-3x} \Leftrightarrow -x^2+2 > 4-3x \Leftrightarrow -x^2+3x-2 > 0 \\ \Leftrightarrow x \in (1; 2).$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$ là $(1; 2)$.

Câu 118: Bất phương trình $3^{|x|} < 81$ có tập nghiệm là

- A. $[0; 4]$. B. $(0; 4)$. C. $(-\infty; 4)$. D. $(-4; 4)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 3^{|x|} < 81 \Leftrightarrow 3^{|x|} < 3^4 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$$

Câu 119: Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x+2} \leq 25$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 5^{x+2} \leq 25 \Leftrightarrow 5^{x+2} \leq 5^2 \Leftrightarrow x+2 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 0]$.

Câu 120: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}}$ là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $[0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\sqrt{x}} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2-\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} < 2-\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1.$$

Do vậy, tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0; 1)$.

Câu 121: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -3$ là

- A. $(-1; 5)$. B. $(7; +\infty)$. C. $(-1; 7)$. D. $[-1; 7)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7.$$

Câu 122: Số các số nguyên dương x thỏa mãn $4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x$ là:

- A. 7. B. 9. C. 8. D. 10.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 4^x + 2023(x+1) < (x+2024).2^x \Leftrightarrow 4^x - 2024.2^x + 2023 - (2^x - 2023).x < 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2023) - (2^x - 2023).x < 0 \Leftrightarrow (2^x - 2023)(2^x - x - 1) < 0$$

$$\text{Do } x \text{ nguyên dương nên } 2^x > x+1 \Rightarrow 2^x - x - 1 > 0$$

$$\text{Do đó bpt} \Leftrightarrow 2^x < 2023 \Rightarrow x \in \{1; 2; \dots; 10\}.$$

Vậy có 10 số nguyên dương x thỏa mãn.

Câu 123: Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $(2^{x+1} - \sqrt{2})(2^x - y) < 0$?

- A. 2047. B. 1022. C. 1023. D. 1024.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$(2^{x+1} - \sqrt{2})(2^x - y) < 0 \Leftrightarrow \left(2^x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2^x - y) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ 2^x - y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{-1}{2} \\ x < \log_2 y, y > 0 \end{cases} \quad (1)$$
$$\begin{cases} 2^x - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \\ 2^x - y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1}{2} \\ x > \log_2 y, y > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Nhận thấy (2) không thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy $y > 0$ nên bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 2^x < y \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \log_2 y.$$

Nếu $\log_2 y > 10 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$ đều là nghiệm, do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\Rightarrow \log_2 y \leq 10 \Leftrightarrow y \leq 1024.$$

Mà y là số nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3; \dots; 1023; 1024\}$.

Vậy có 1024 giá trị nguyên dương của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 124: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x + 12 \leq 2^{x+1} + 2.3^{x+1}$

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $6^x + 12 \leq 2^{x+1} + 2.3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x.3^x + 12 \leq 2.2^x + 6.3^x \Leftrightarrow 2^x(3^x - 2) - 6(3^x - 2) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (3^x - 2)(2^x - 6) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 2 \leq 0 \\ 2^x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \log_3 2 \\ x \geq \log_2 6 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 2 \leq x \leq \log_2 6.$$

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là: 1, 2.

Vậy bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Câu 125: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm

đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 8.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x-3m} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{-2x+3m} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 1 \geq -2x + 3m$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x + 1 - 3m \geq 0, (*)$$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với

$$\text{mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (1-3m) \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 5m \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq 0.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Câu 126: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 100]$ để bất phương trình

$$4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1 \text{ nghiệm đúng với } \forall x \in (-\infty; 4]?$$

A. 99.

B. 92.

C. 98.

D. 93.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 4^{2x-m} - 4.2^{3x-2m} + 4.2^{x-m} < 1 \Leftrightarrow 2^{4x} - 4.2^{3x} + 4.2^x.2^m < 2^{2m}$$

$$\Leftrightarrow (2^m - 2^{2x})(2^m + 2^{2x} - 4 \cdot 2^x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4 \cdot 2^x - 2^{2x} \end{cases} \quad (1)$$

$$\forall x \in (-\infty; 4] \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2^{2x} \leq 2^8 \\ -192 \leq 4 \cdot 2^x - 2^{2x} \leq 2^2 \end{cases}$$

Giải $\begin{cases} 2^m > 2^{2x} \\ 2^m > 4 \cdot 2^x - 2^{2x} \end{cases} \quad (1)$

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m > 2^8 \\ 2^m > 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 8$. Do m nguyên thuộc đoạn $[0; 100]$

nên có $100 - 8 = 92$ giá trị của m .

Giải $\begin{cases} 2^m < 2^{2x} \\ 2^m < 4 \cdot 2^x - 2^{2x} \end{cases} \quad (2)$

Để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^m \leq 0 \\ 2^m < -192 \end{cases}$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy có 92 giá trị của m .

4. Bất phương trình logarit

Câu 127: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq 1$ là

A. $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. C. $(-\infty; \log_2 5)$. D. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow x-2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm $T = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Câu 128: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x+4) \leq 3$ là:

A. $(-4; 23]$. B. $(-\infty; 23]$. C. $(-\infty; 27]$. D. $(-4; 5]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > -4$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow x+4 \leq 27 \Leftrightarrow x \leq 23$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x \in (-4; 23]$.

Câu 129: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) < -2$ là

- A. $(12; +\infty)$. B. $(-\infty; 12)$. C. $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$. D. $(3; 12)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 3$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) < -2 \Leftrightarrow x-3 > 9 \Leftrightarrow x > 12.$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (12; +\infty)$.

Câu 130: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x) < \log(x+6)$ là:

- A. $[0; 6)$ B. $(0; 6)$ C. $(6; +\infty)$ D. $(-\infty; 6)$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x > 0 \\ x+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Vì cơ số $a = 10 > 1$ nên bất phương trình $\log(2x) < \log(x+6)$

$$\Leftrightarrow 2x < x+6 \Leftrightarrow x < 6.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $0 < x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 6)$.

Câu 131: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x+10) < \log_{\frac{1}{3}}(4x-9)$

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{3}}(x+10) < \log_{\frac{1}{3}}(4x-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x+10 > 4x-9 \\ 4x-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{19}{3} \\ x > \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{4} < x < \frac{19}{3}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Câu 132: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 2x < \log_2(x+2)$ là

- A. $(0; 2)$. B. $[0; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \log_2 2x < \log_2 (x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < x+2 \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 2)$$

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 2x < \log_2 (x+2)$ là $(0; 2)$.

Câu 133: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn $\log_3^2 x - 2\log_3(3x) - 1 \leq 0$. Số phần tử của tập S là

A. 27.

B. 230.

C. 103.

D. 54.

Lời giải**Chọn A.**

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } \log_3^2 x - 2\log_3(3x) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \log_3 x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 27.$$

Vì $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; \dots; 27\}$.

Vậy có 27 số nguyên x .

Câu 134: Bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \geq 0$ có tập nghiệm S là

A. $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 0] \cup [\log_2 5; +\infty)$.

C. $S = (0; 2] \cup [8; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$.

Lời giải**Chọn C**

Bất phương trình $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \geq 0$.

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Đặt } t = \log_2 x, \text{ bất phương trình đã cho trở thành: } t^2 - 4t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 3 \\ t \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 3 \\ \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 2] \cup [8; +\infty)$.

Câu 135: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(5^x - 125)(\log_3^2 x - 8\log_3 x + 15) < 0$

A. 242.

B. 217.

C. 220.

D. 215.

Lời giải**Chọn B**

Giải phương trình: $(5^x - 125)(\log_3^2 x - 8\log_3 x + 15) < 0$ với điều kiện $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình đã cho} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x - 125 < 0 \\ \log_3^2 x - 8\log_3 x + 15 > 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 5^x - 125 > 0 \\ \log_3^2 x - 8\log_3 x + 15 < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x < 5^3 \\ \log_3 x < 3 \\ \log_3 x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x > 5^3 \\ 3 < \log_3 x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < 27 \\ x > 243 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 27 < x < 243 \end{cases} \Leftrightarrow 27 < x < 243 \\ x \text{ nguyên} &\Rightarrow x = 1, 2, 28, 29, \dots, 242 \text{ có 217 số.} \end{aligned}$$

Câu 136: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn điều kiện $(7^x - 49)(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6) < 0$?

A. 728.

B. 726.

C. 725.

D. 729.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (7^x - 49)(\log_3^2 x - 7\log_3 x + 6) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 7^x - 49 > 0 \\ \log_3^2 x - 7\log_3 x + 6 < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 7^x - 49 < 0 \\ \log_3^2 x - 7\log_3 x + 6 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7^x > 49 \\ 1 < \log_3 x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 3 < x < 3^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 3 < x < 3^6 \end{cases} \text{ mà } x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{1; 4; 5; \dots; 728\}. \end{aligned}$$

Vậy có 726 số thỏa mãn.

Câu 137: Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

A. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

B. $(1; 3]$.

C. $[-3; 1]$.

D. $[-1; 0]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1 < x < 5$

$$\text{Ta có: } 2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \leq \log_2(10-2x)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 10-2x \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm là: $S = (1; 3]$

Câu 138: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2) < 1$ là

A. $(-\infty; 8)$.

B. $(-2; +\infty)$.

C. $(-2; 8)$.

D. $(8; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Bất phương trình } \log(x+2) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 8 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log(x+2) < 1$ là $T = (-2; 8)$

Câu 139: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_4(x+6) < 2 - 2\log_4 x$ bằng

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Ta có: } \log_4(x+6) < 2 - 2\log_4 x \Leftrightarrow \log_4(x+6) < \log_4 \frac{16}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x+6 < \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 - 2\sqrt{3} \\ -2 < x < -2 + 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

So với điều kiện ta có $0 < x < -2 + 2\sqrt{3}$.

Suy ra nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $x = 1$.

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm nguyên.

Câu 140: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(3x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(6-5x) > 0$ là

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

C. $S = \left(1; \frac{6}{5}\right)$.

D. $S = \left(1; \frac{6}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 6-5x \\ 6-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{6}{5}.$$

$$\text{Vậy } S = \left(1; \frac{6}{5}\right).$$

Câu 141: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S = (-\infty; 2)$.

B. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

C. $S = (2; +\infty)$.

D. $S = (-1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x-1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm S của bất phương trình đã cho là $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 142: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a.b$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_3(2x+3) < \log_3(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 < 1-x \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -2 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Khi đó } a.b = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 1.$$

Câu 143: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) < \log_2(3-x)$ là

A. $S = (-1;1)$.

B. $S = (1;+\infty)$.

C. $S = (1;3]$.

D. $S = (-\infty;1)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

$$\text{Ta có: } \log_2(x+1) < \log_2(3-x) \Rightarrow x+1 < 3-x \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;1)$.

Câu 144: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) + \log_2(3x-3) < 0$ là

A. $S = (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$.

B. $S = (1;2)$.

C. $S = (-1;2)$.

D. $S = (2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 1$.

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) + \log_2(3x-3) < 0 \Leftrightarrow \log_2(3x-3) < \log_2(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow 3x-3 < x^2-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm bất phương trình là $S = (2; +\infty)$.

Câu 145: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x-1) > 4$.

- A. $S = (-\infty; 17)$. B. $S = (1; 17)$. C. $S = (17; +\infty)$. D. $S = (0; 17)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x-1) > 4 \Leftrightarrow x-1 > 2^4 \Leftrightarrow x > 17 \Leftrightarrow x \in (17; +\infty)$.

Câu 146: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) \leq 3$ là

- A. $(-\infty; 9]$. B. $[1; 9]$. C. $(1; 9]$. D. $(1; 10]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x-1) \leq 3 \Leftrightarrow 0 < x-1 \leq 8 \Leftrightarrow 1 < x \leq 9$.

Câu 147: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 2$ là

- A. $(-5; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 5)$. D. $(5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > 1$

Ta có: $\log_2(x-1) > 2 \Leftrightarrow x-1 > 4 \Leftrightarrow x > 5$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $x > 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $(5; +\infty)$.

Câu 148: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(x+1) < 2$ là

- A. $S = (0; 8)$. B. $S = (-\infty; 8)$. C. $S = (8; +\infty)$. D. $S = (-1; 8)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(x+1) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 8$

Câu 149: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$?

- A. 26. B. 25. C. vô số. D. 24.

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x+25) - 3]$:

Điều kiện xác định: $x > -25$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} - 9^x = 0 \\ \log_3(x+25) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

x	-25	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-25; 0] \cup \{2\}$.

Suy ra, có 26 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 150: Tập nghiệm của bất phương trình $\log(7x+2) \leq 2$ là

- A. $(-\infty; 14)$. B. $\left[-\frac{2}{7}; 14\right]$. C. $(-\infty; 14]$. D. $\left(-\frac{2}{7}; 14\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log(7x+2) \leq 2 \Leftrightarrow 0 < 7x+2 < 10^2 \Leftrightarrow -\frac{2}{7} < x \leq 14$.

Vậy tập nghiệm $s = \left(-\frac{2}{7}; 14\right]$.

Câu 151: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 2$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(5; +\infty)$. C. $(-\infty; 5)$. D. $(1; 5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2(x-1) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 < 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; 5)$.

Câu 152: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(4-x) > 2$ là

- A. $(-5; 4)$. B. $(-\infty; 4)$. C. $(-\infty; -5]$. D. $(-\infty; -5)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(4-x) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \\ 4-x > 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; -5)$.

Câu 153: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ là:

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $S = (-1; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow x+1 > 2x-1 \Leftrightarrow x < 2 \xrightarrow{x > \frac{1}{2}} \frac{1}{2} < x < 2.$$

Câu 154: Số các giá trị nguyên của x thỏa $(2^{x^2} - 16)(\log_3 x - 4) \leq 0$ là

A. Vô số.

B. 80.

C. 17.

D. 78.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$(2^{x^2} - 16)(\log_3 x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} - 16 \geq 0 \\ \log_3 x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \\ 0 \leq x \leq 81 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 81.$$

Do x nguyên nên có 80 giá trị thỏa mãn.

Câu 155: Gọi S là tập hợp các số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_3 \left(\frac{2x^2 - 7}{625} \right) \leq \log_5 \left(\frac{2x^2 - 7}{81} \right)$

.Số tập hợp con của S là

A. 2^{316} .

B. 2^{318} .

C. 319.

D. 2^{319} .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định của bất phương trình } 2x^2 - 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} (*) (\text{do } x \text{ nguyên}).$$

$$\text{Bất phương trình tương đương với } \log_3(2x^2 - 7) - 4\log_3 5 \leq \log_5(2x^2 - 7) - 4\log_5 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 - 7) - \log_5 3 \cdot \log_3(2x^2 - 7) \leq 4(\log_3 5 - \log_5 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 - 7)(1 - \log_5 3) \leq 4 \left(\frac{1 - \log_5^2 3}{\log_5 3} \right) \Leftrightarrow \log_3(2x^2 - 7) \leq \frac{4(1 + \log_5 3)}{\log_5 3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7 \leq 50625 \Leftrightarrow -\sqrt{25316} \leq x \leq \sqrt{25316} \Leftrightarrow -159 \leq x \leq 159 (\text{do } x \text{ nguyên})$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có tập S có 316 số nguyên. Do đó số tập con của S là 2^{316} .

Câu 156: Số nghiệm nguyên của bất phương trình thỏa mãn $[1 - \log_2(x+8)]\sqrt{2 \cdot 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x} + 2 \geq 0$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+8 > 0 \\ 2 \cdot 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -8 \\ 2^x \geq 2 \\ 2^x \leq \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -8 \\ x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -8 < x \leq -3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } [1 - \log_2(x+8)]\sqrt{2 \cdot 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 \cdot 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 2 = 0 \\ x > -8 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \cdot 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 2 > 0 \\ 1 - \log_2(x+8) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \\ x > -8 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ -8 < x < -3 \\ \log_2(x+8) \leq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ -8 < x < -3 \\ x \leq -6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \\ -8 < x \leq -6 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x \in \mathbb{Q}$ ta có trường hợp này các giá trị x thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x \in \{-7; -6; -1; 3\}$.

Câu 157: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1$ là:

A. $S = (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

B. $S = [1; \sqrt{5}]$.

C. $S = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

D. $S = [-\sqrt{5}; 1) \cup (1; \sqrt{5}]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \log_2(x^2 - 1) > 0 \\ \log_2(x^2 - 1) \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 > 1 \\ x^2 - 1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \\ x < -\sqrt{2} \\ x > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{5} \\ x \geq \sqrt{5} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

Câu 158: Tổng các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\log_x\left(\log_3 \frac{9^x - 328}{78}\right) < 1$ là

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 12.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 9^x > 328 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_9 328.$$

$$\text{Khi đó: } \log_x \left(\log_3 \frac{9^x - 328}{78} \right) < 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{9^x - 328}{78} < x$$

$$\Leftrightarrow 9^x - 328 < 78 \cdot 3^x \Leftrightarrow 3^{2x} - 78 \cdot 3^x - 328 < 0 \Leftrightarrow 3^x < 82 \Leftrightarrow x < \log_3 82.$$

So với điều kiện, suy ra $\log_9 328 < x < \log_3 82$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{3; 4\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\log_x \left(\log_3 \frac{9^x - 328}{78} \right) < 1$ là 7.

Câu 159: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left[\log_3(x^2 + 1) - \log_3(x + 31) \right] (32 - 2^{x-1}) \geq 0$?

A. 27.

B. Vô số.

C. 28.

D. 26.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \left[\log_3(x^2 + 1) - \log_3(x + 31) \right] (32 - 2^{x-1}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 1) - \log_3(x + 31) \geq 0 \\ 32 - 2^{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 1) \geq \log_3(x + 31) \\ 2^{x-1} \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq x + 31 \\ x + 31 > 0 \\ 2^{x-1} \leq 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 30 \geq 0 \\ x > -31 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -31 < x \leq -5 \\ x = 6 \end{cases}$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-30; -29; -28; \dots; -6; -5; 6\}$

Vậy có 27 số nguyên x thỏa đề.

Câu 160: Bất phương trình $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x - 1) + 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[0; 2023]$?

A. 2019.

B. 2022.

C. 2021.

D. 2020.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x - 1) + 1$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \Leftrightarrow x > 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_2(x^2 - x - 2) &\geq \log_{0,5}(x-1) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - x - 2) \geq -\log_2(x-1) + 1 \\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2 - x - 2)(x-1) \geq 1 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x-1) \geq 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [1 - \sqrt{2}; 0] \cup [1 + \sqrt{2}; +\infty) \end{aligned}$$

So với điều kiện $\Rightarrow x \in [1 + \sqrt{2}; +\infty)$

Vậy có 2021 nghiệm nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 161: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_2(8x^2) + \log_3(3x^3) \geq \log_2 x \cdot \log_3 x$?

A. 27.

B. 8.

C. 134.

D. 133.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Với điều kiện trên, bpt tương đương với:

$$\text{Ta có: } 3 + 2\log_2 x + 1 + 3\log_3 x - \log_2 x \cdot \log_3 x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x + 3\log_3 2 \cdot \log_2 x - \log_2 x \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\log_3 2 \cdot (\log_2 x)^2 + (2 + 3\log_3 2) \cdot \log_2 x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-0,897...}_{A} \leq \log_2 x \leq \underbrace{7,067...}_{B} \Leftrightarrow 0,536... \leq x \leq 134,087...$$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $x \in \{1; 2; ...; 134\}$.

Câu 162: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(2x) \cdot \log\left(\frac{100}{x}\right) > 2$?

A. 198.

B. 48.

C. 96.

D. 149.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Phương trình: } \log_2(2x) \cdot \log\left(\frac{100}{x}\right) > 2 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)(2 - \log x) > 2$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x - \log x - \log_2 x \cdot \log x > 0 \Leftrightarrow 2\log_2 x - \log 2 \cdot \log_2 x - \log_2 x \cdot \log x > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(2 - \log 2 - \log x) > 0 \Leftrightarrow \log_2 x(\log 50 - \log x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > 0 \\ \log 50 - \log x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 50 \\ x < 1 \vee 50 < x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 50.$$

Câu 163: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(\log_3(x^2 + 10) - \log_3(x + 40))(32 - 2^{x-1}) \geq 0$?

A. Vô số.

B. 38.

C. 36.

D. 37.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(\log_3(x^2 + 10) - \log_3(x + 40))(32 - 2^{x-1}) \geq 0$

Điều kiện: $x + 40 > 0 \Leftrightarrow x > -40$ (*).

$$\text{Xét } \begin{cases} \log_3(x^2 + 10) - \log_3(x + 40) = 0 \\ 32 - 2^{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 10) = \log_3(x + 40) \\ 32 = 2^{x-1} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 10 = x + 40 \\ 5 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 30 = 0 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 6 \end{cases} \text{ là nghiệm của bất phương trình.}$$

$$\text{Xét } \begin{cases} \log_3(x^2 + 10) - \log_3(x + 40) \neq 0 \\ 32 - 2^{x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 6 \end{cases}.$$

Khi đó $(\log_3(x^2 + 10) - \log_3(x + 40))(32 - 2^{x-1}) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 10) - \log_3(x + 40) > 0 \\ 32 - 2^{x-1} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \log_3(x^2 + 10) - \log_3(x + 40) < 0 \\ 32 - 2^{x-1} < 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 10) > \log_3(x + 40) \\ 32 > 2^{x-1} \end{cases} \cup \begin{cases} \log_3(x^2 + 10) < \log_3(x + 40) \\ 32 < 2^{x-1} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 10 > x + 40 \\ 5 > x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + 10 < x + 40 \\ 5 < x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 30 > 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - x - 30 < 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \cup x > 6 \\ x < 6 \end{cases} \cup \begin{cases} -5 < x < 6 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x < -5.$$

Từ các trường hợp trên, ta có nghiệm của bất phương trình là $-40 < x \leq -5 \cup x = 6$.

Mà x nguyên nên ta có: $x \in \{-39; -38; \dots; -5; 6\}$.

Câu 164: Cho bất phương trình $\log_3(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq \log_4(x+1)^2 - \log_3\left(\frac{x-2}{4}\right) - 2$. Tổng tất cả các

nghiệm nguyên của bất phương trình bằng

A. 5.

B. 7.

C. 3.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2.$$

$$\text{Trên điều kiện, bất phương trình } \Leftrightarrow \log_3\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right] \geq \log_2\left[\frac{(x+1)(x-2)}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_3 2 \cdot \log_2 \left[\frac{(x+1)(x-2)}{4} \right] \geq \log_2 \left[\frac{(x+1)(x-2)}{4} \right]$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left[\frac{(x+1)(x-2)}{4} \right] \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.$$

Kết hợp điều kiện $x > 2$, ta được: $2 < x \leq 3$ và $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = 3$.

Câu 165: Số nghiệm nguyên thuộc $[-100; 100]$ của bất phương trình $\log_5(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x - 1}{25}\right) \leq -143$ là

A. 81.

B. 79.

C. 83.

D. 84.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của bất phương trình là $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (*).

$$\text{Ta có, } \log_5(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{3^x - 1}{25}\right) \leq -143 \Leftrightarrow \log_5(3^x - 1) \left[\log_5\left(\frac{25}{3^x - 1}\right) \right] \leq -143$$

$$\Leftrightarrow \log_5(3^x - 1) \left[2 - \log_5(3^x - 1) \right] + 143 \leq 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_5(3^x - 1)$, bất phương trình (1) trở thành: $t(2 - t) + 143 \leq 0$

$$\Leftrightarrow -t^2 + 2t + 143 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -11 \\ t \geq 13 \end{cases}.$$

$$\text{Với } t \leq -11 \Rightarrow \log_5(3^x - 1) \leq -11 \Rightarrow 3^x - 1 \leq 5^{-11} \Rightarrow x < 1.$$

Do x nguyên thỏa điều kiện $x > 0$ nên trường hợp này không tồn tại giá trị x .

$$\text{Với } t \geq 13 \Rightarrow \log_5(3^x - 1) \geq 13 \Rightarrow 3^x - 1 \geq 5^{13} \Rightarrow 3^x \geq 1 + 5^{13}.$$

Do x nguyên thỏa điều kiện $x > 0$ và $x \in [-100; 100]$ nên chọn $x \in \{20, 21, \dots, 100\}$.

Vậy có 81 số nguyên x thỏa mãn điều kiện.

5. Vận dụng kiến thức vào toán thực tế

Câu 166: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 8,4% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo (lãi kép). Hỏi sau ít nhất n năm ($n \in \mathbb{N}^*$) thì người đó có được số tiền nhiều hơn 200 triệu đồng.

A. $n = 8$.

B. $n = 9$.

C. $n = 10$.

D. $n = 7$.

Lời giải:

Chọn B

$$\text{Ta có } 100(1 + 8,4\%)^n > 200 \Rightarrow (1 + 8,4\%)^n > 2 \Rightarrow n > \log_{(1+8,4\%)} 2 \approx 8,59.$$

Câu 167: Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- A. 11 năm. B. 12 năm. C. 13 năm. D. 10 năm.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền ban đầu người đó gửi là A (đồng), $A > 0$.

Số tiền lãi và gốc sau n năm là $T = a(1 + 6,1\%)^n$.

Ta có $a(1 + 6,1\%)^n = 2a \Leftrightarrow (1 + 6,1\%)^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1+6,1\%} 2 \approx 11,7$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu

Câu 168: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 8% / năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 31,17. B. 30,85. C. 31,45. D. 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0(1 + r\%)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A = 18.(1 + 8\%)^7 \approx 30,85$.

Câu 169: Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- A. 13 năm. B. 12 năm. C. 14 năm. D. 11 năm.

Lời giải

Chọn B

Ta có số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau n năm là: $S_n = 50.(1 + 6\%)^n = 50.1,06^n$

$S_n > 100 \Leftrightarrow 50.1,06^n > 100 \Leftrightarrow n > 11,9$.

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó sẽ nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là hơn 100 triệu đồng.

Câu 170: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần

nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

A. 102423000 (đồng).

B. 102160000 (đồng).

C. 102017000 (đồng).

D. 102424000 (đồng).

Lời giải

Chọn D

Sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền là $100000000.(1+0,4\%)^6 \approx 102424000$ (đồng).

Câu 171: Một người gửi ngân hàng 18 triệu đồng theo hình thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 8% / năm. Hỏi sau 7 năm người đó có bao nhiêu tiền? (đơn vị: triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 31,17.

B. 30,85.

C. 31,45.

D. 31,34.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức lãi kép, ta có: $A = A_0(1+r\%)^n$

Trong đó A_0 là số tiền ban đầu gửi vào; $r\%$ là lãi suất của một kì hạn; n là số kì hạn.

Sau 7 năm người đó có số tiền là $A = 18.(1+8\%)^7 \approx 30,85$.

Câu 172: Ông A bị nhiễm một loại virus nên phải nhập viện và được điều trị ngay lập tức. Kể từ ngày nhập viện, sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày thì ông A sẽ được xuất viện, biết rằng ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện?

A. 11 ngày

B. 12 ngày

C. 13 ngày

D. 14 ngày

Lời giải

Chọn B

Gọi K là lượng virus trong cơ thể ông A khi bắt đầu nhập viện.

Sau mỗi ngày điều trị thì lượng virus trong cơ thể ông A giảm đi 10% so với ngày trước đó, nên lượng virus trong cơ thể ông A ở ngày thứ n là: $T \leq K.(1-10\%)^n$

Ông A được xuất viện khi lượng virus trong cơ thể không quá 30% so với ngày nhập viện, nên ta có: $K.(1-10\%)^n \leq K.30\% \Leftrightarrow (1-10\%)^n \leq 30\% \Leftrightarrow n \leq \log_{(1-10\%)} 30\% \Leftrightarrow n \geq 11.4$

Vậy, sau ít nhất 12 ngày thì ông A sẽ được xuất viện.

Câu 173: Năm 2022, một hãng công nghệ có 30 triệu người dùng phần mềm của họ. Hãng đặt kế hoạch, trong 3 năm tiếp theo, mỗi năm số lượng người dùng phần mềm tăng 8% so với năm trước và từ năm thứ 4 trở đi, số lượng người dùng phần mềm sẽ tăng 5% so với năm trước đó. Theo kế hoạch đó, hỏi bắt đầu từ năm nào số lượng người dùng phần mềm của hãng sẽ vượt quá 50 triệu người?

A. Năm 2029.

B. Năm 2028.

C. Năm 2031.

D. Năm 2030.

Lời giải

Chọn C

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau 3 năm: $T_1 = 30 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^3 = 37,79136$.

Số lượng người dùng phần mềm của công ty sau n năm tiếp theo: $T_2 = 37,79 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$

Để người dùng vượt quá 50 triệu người thì $37,79136 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n > 50 \Leftrightarrow n > 5, n \in \mathbb{N}$ nên $n = 6$

Suy ra cần ít nhất $3 + 6 = 9$ năm.

Năm cần tìm sẽ là: $2022 + 9 = 2031$.

-----**HẾT**-----