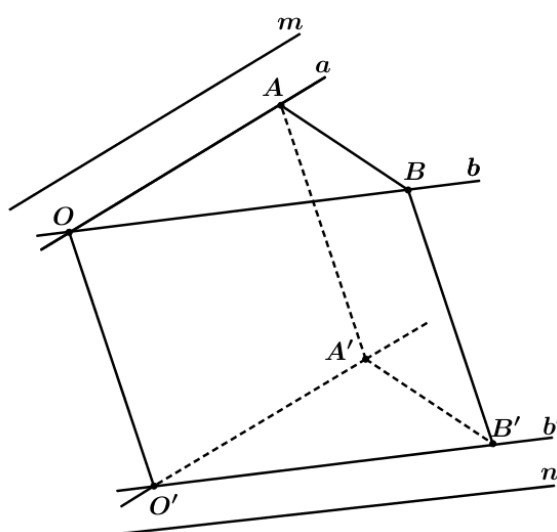


**1** Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng  $m, n$  trong không gian, kí hiệu  $(m, n)$ , là góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với  $m$  và  $n$ .

**Chú ý:**

Để xác định góc giữa hai đường thẳng  $a$  và  $b$  ta có thể lấy điểm  $O$  thuộc đường thẳng  $a$  và qua đó kẻ đường thẳng  $b'$  song song với  $b$ . Khi đó  $(a, b) = (a, b')$ .

Với hai đường thẳng  $a$  và  $b$  bất kì:  $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$ .

**2** Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng  $a$  và  $b$  được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu  $a \perp b$ , nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

**Dạng 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng**

Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng  $(d_1)$  và  $(d_2)$  ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

**Bước 1:** Sử dụng tính chất sau:  $\begin{cases} (d_1, d_2) = \alpha \\ d_2 // d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1, d_2) = (d_1, d_3) = \alpha$

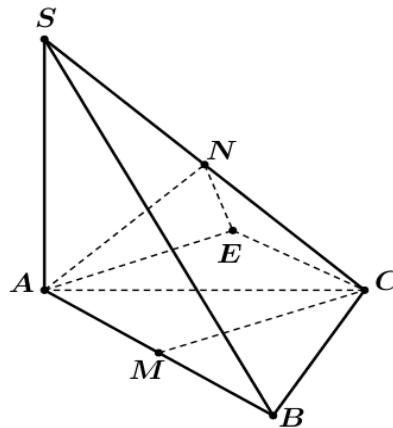
**Bước 2:** Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

Để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian ta cần nhớ các công thức sau:

- Định lý hàm số cosin trong tam giác  $ABC$ :  $\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$
- Tương tự ta có:  $\cos ABC = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC}$  và  $\cos ACB = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot CB}$ .

**Ví dụ 1:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABC)$  và  $SA = a\sqrt{3}$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB$  và  $SC$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AN$  và  $CM$ .

Lời giải



Dựng hình bình hành  $AMCE$  suy ra  $AM = CE = \frac{a}{2}$ .

Khi đó  $AE // CM \Rightarrow (AN; CM) = (AN; AE) = \varphi$ .

Mặt khác  $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow AN = \frac{SC}{2} = a \leftarrow AE = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Do  $\triangle ABC$  đều nên  $CM \perp AM \Rightarrow AMCE$  là hình chữ nhật.

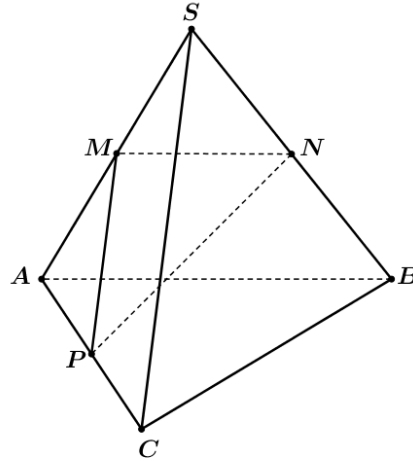
Khi đó  $CE \perp AE$  mà  $CE \perp SA \Rightarrow CE \perp (SAE) \Rightarrow CE \perp SE$ .

Tam giác  $\triangle SEC$  vuông tại  $E$  có đường trung tuyến  $EN = \frac{1}{2}SC = a$ .

Ta có:  $\cos NAE = \frac{AN^2 + AE^2 - NE^2}{2 \cdot AN \cdot AE} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Ví dụ 2:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC = AB = a$ ;  $AC = a\sqrt{2}$  và  $BC = a\sqrt{3}$ . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $AB$ .

**Lời giải**



Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB$  và  $AC$ .

Khi đó  $\begin{cases} MP \parallel SC \\ MN \parallel AB \end{cases} \Rightarrow (SC; AB) = (MP; MN)$ . Khi đó ta có:  $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ ;  $MP = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}$ .

Mặt khác  $\triangle SAC$  vuông tại  $S \Rightarrow SP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

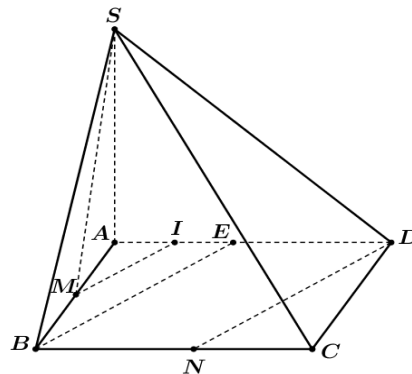
$$BP^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } PN^2 = \frac{PS^2 + PB^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos NMP = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2 \cdot MN \cdot MP} = -\frac{1}{2} \Rightarrow NMP = 120^\circ \Rightarrow \varphi = (SC; AB) = 60^\circ.$$

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SB = a\sqrt{5}$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$  và  $N$  là trung điểm  $BC$ . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $SM$  và  $DN$ .

**Lời giải**



Do  $SA \perp (ABCD)$ . Ta có:  $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$ .

Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$  và  $I$  là trung điểm  $AE$ .

Dễ thấy  $BNDE$  là hình bình hành và  $MI$  là đường trung bình trong tam giác  $ABE$ .

Khi đó:  $DN \parallel BE \parallel MI$  nên ta có:  $AM = a$ ;  $AI = \frac{AE}{2} = \frac{a}{2}$ .

Mặt khác:  $SM^2 = SA^2 + AM^2 = 2a^2$ ;  $SI^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow MI^2 = AI^2 + AM^2 = \frac{5a^2}{4}$ .

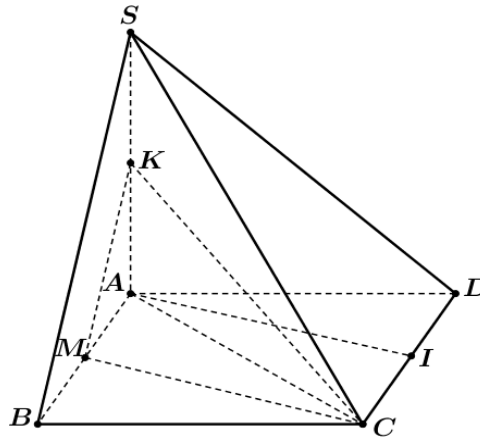
Do vậy  $\cos SMI = \frac{SM^2 + MI^2 - SI^2}{2 \cdot SM \cdot MI} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \cos(SM; DN)$

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật có  $AB = a$ ;  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = 2a$ .

a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $SD$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $SB$  và  $AI$ .

Lời giải



a) Do  $BC \parallel AD \Rightarrow (SD; BC) = (SD; AD) = SDA$

$\triangle SAD$  vuông tại  $A \Rightarrow \cos SDA = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + SA^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

b) Gọi  $M, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $SA$  thì  $MK$  là đường trung bình của tam giác  $SAB$ . Khi đó  $MK \parallel SB$ , mặt khác  $MC \parallel AI$ .

Suy ra  $(SB; AI) = (MK; CM)$ .

Ta có:  $MK = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{3a}{2}$ ;  $KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = 2a$ .

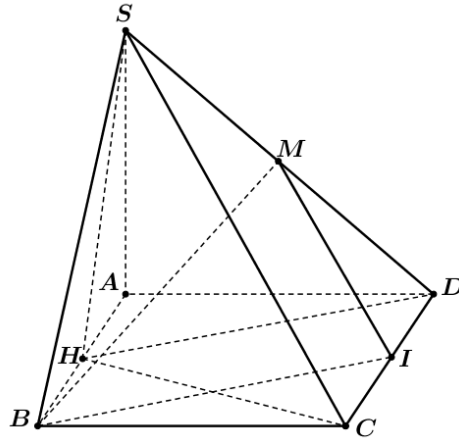
Khi đó  $\cos KMC = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2 \cdot KM \cdot MC} = -\frac{1}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos(SB; AI) = \frac{1}{3\sqrt{5}}$ .

**Ví dụ 5:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi cạnh  $a$ ,  $ABC = 60^\circ$ . Tam giác  $SAB$  cân tại  $S$  và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng  $SC$  tạo với đáy một góc  $30^\circ$ . Tính cosin của góc giữa

a)  $SD$  và  $BC$ .

b)  $DH$  và  $SC$  với  $H$  là chân đường cao hạ từ  $S$  xuống mặt đáy  $(ABCD)$ .

Lời giải



a) Do  $AB = BC = a, \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  đều cạnh  $a$ .

Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ , do tam giác  $SAB$  tại  $S$  nên  $SH \perp AB$ .

Mặt khác  $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$ .

$\triangle ABC$  đều nên  $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, (\angle SC; (ABC)) = \angle SCH = 30^\circ$

Ta có:  $SH = HC \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$ .

Do  $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle BAD = 120^\circ \Rightarrow HD = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH \cdot AD \cos 120^\circ} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ .

Suy ra  $SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = a\sqrt{2}$ .

Mặt khác  $AD \parallel BC \Rightarrow (\angle BC; SD) = (\angle AD; SD), \cos SDA = \frac{DS^2 + DA^2 - SA^2}{2 \cdot DS \cdot DA} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$ .

Do vậy  $\cos(\angle BC; SD) = \frac{5\sqrt{2}}{8}$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm  $CD \Rightarrow \begin{cases} DH \parallel BI \\ DH = BI = \frac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

Gọi  $M$  là trung điểm  $SD \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SC \\ MI = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}$ . Lại có  $BD = a\sqrt{3}; SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Do đó  $BM^2 = \frac{BD^2 + BS^2}{2} - \frac{SD^2}{4} = \frac{5}{4}a^2 \Rightarrow \cos MIB = \frac{MI^2 + IB^2 - MB^2}{2 \cdot MI \cdot IB} = \frac{3\sqrt{17}}{14}$ .

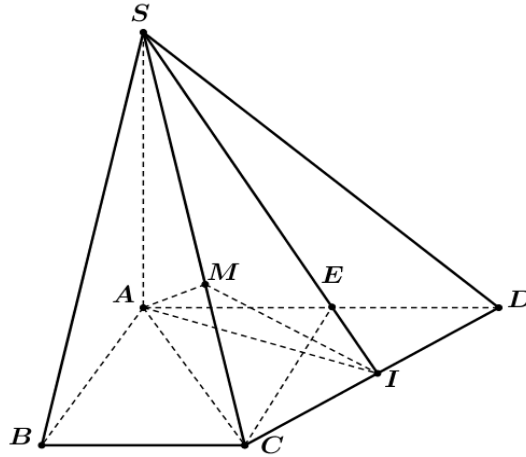
Suy ra  $\cos(\angle DH; SC) = \frac{3\sqrt{17}}{14}$ .

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$  có  $AD = 2AB = 2CD = 2a$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Biết rằng  $SC$  tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính cosin góc giữa:

a)  $BC$  và  $SD$ .

b)  $AI$  và  $SD$  với  $I$  là trung điểm  $CD$

Lời giải



a) Ta có:  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$ . Do  $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC; (ABC)) = SCA = 60^\circ$ .

Khi đó  $SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$ . Do  $AD \parallel BC \Rightarrow (BC; SD) = (AD; SD)$ .

Mặt khác  $\cos ADS = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{6a^2 + 4a^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \cos(BC; SD)$ .

b) Gọi  $M$  là trung điểm  $SC \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SD \\ MI = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}, AI = \frac{a\sqrt{10}}{2}, AM = \frac{SC}{2} = a\sqrt{2}. \end{cases}$

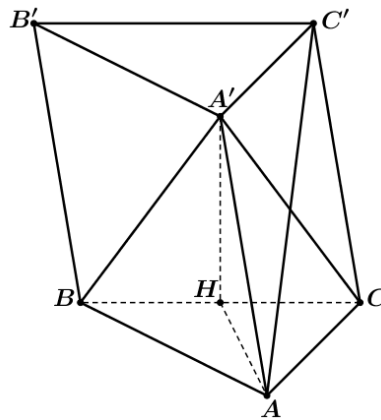
Khi đó  $\cos MIA = \frac{IA^2 + IM^2 - AM^2}{2 \cdot IA \cdot IM} = \frac{3}{5}$ .

**Ví dụ 7:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , hình chiếu của điểm  $A'$  xuống mặt đáy  $(ABC)$  trùng với trung điểm của  $BC$ . Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc  $60^\circ$ .

a) Tính tan góc tạo bởi  $B'C'$  và  $A'C$ .

b) Cosin góc tạo bởi  $CC'$  và  $AB$ .

Lời giải



a) Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ . Ta có:  $BC \parallel B'C' \Rightarrow (B'C'; A'C) = (BC; A'C) = A'CH$ .

Mặt khác  $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (AA'; (ABC)) = A'AH = 60^\circ$ .

Khi đó:  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = AH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$ .

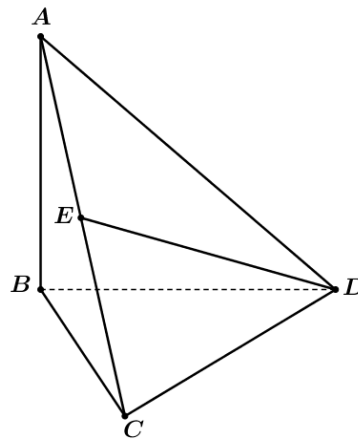
Xét tam giác vuông  $A'HC$  ta có  $\tan A'CH = \frac{A'H}{HC} = 3$ . Vậy  $\tan(B'C'; A'C) = 3$ .

b) Do  $CC' // AA' \Rightarrow (CC'; AB) = (AA'; AB)$ . Ta có:  $A'A = \sqrt{A'H^2 + HA^2} = a\sqrt{3}$

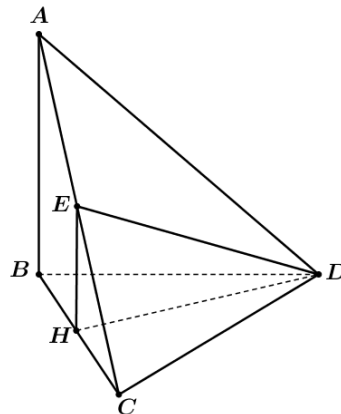
$$A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos A'AB = \frac{AA'^2 + AB^2 - A'B^2}{2.AA'.AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy  $\cos(CC'; AB) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Ví dụ 8:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB$  vuông góc với mặt phẳng  $(BCD)$ . Biết tam giác  $BCD$  vuông tại  $C$  và  $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AC$  (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $DE$ .



Lời giải



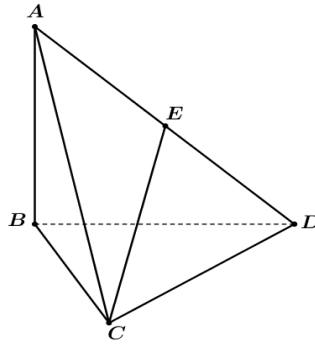
Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$  khi đó:  $EH // AB \Rightarrow EH \perp (BCD) \Rightarrow EH \perp HD$ .

Suy ra  $(AB; DE) = (EH; DE)$ . Ta có:  $HE = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

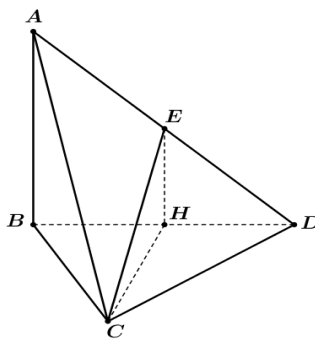
$$\Rightarrow DH = \sqrt{DC^2 + CH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \text{ nên } \tan DEH = \frac{DH}{EH} = \sqrt{3} \Rightarrow DEH = 60^\circ.$$

Vậy  $(AB; DE) = (EH; DE) = DEH = 60^\circ$ .

**Ví dụ 9:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB$  vuông góc với mặt phẳng  $(BCD)$ . Biết tam giác  $BCD$  vuông tại  $C$  và  $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$ . Gọi  $E$  là trung điểm của  $AD$  (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CE$ .



**Lời giải**



Gọi  $H$  là trung điểm  $BD \Rightarrow EH \parallel AB \Rightarrow EH \perp (BCD)$

Vậy  $EH \perp CH$ , ta có  $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

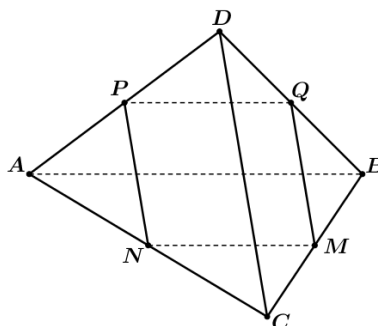
Suy ra  $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CH = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Lại có  $EH = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = CH \Rightarrow \triangle EHC$  vuông cân tại  $H$

Do đó  $(AB; CE) = (EH; CE) = \angle CEH = 45^\circ$ .

**Ví dụ 10:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = 6, CD = 3$ , góc giữa  $AB$  và  $CD$  là  $60^\circ$  và điểm  $M$  trên  $BC$  sao cho  $BM = 2MC$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  song song với  $AB$  và  $CD$  cắt  $AC, AD, BD$  lần lượt tại  $N, P, Q$ . Diện tích  $MNPQ$  bằng

**Lời giải**



Do  $MN // AB$ , theo định lý Talet ta có  $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{AB}{3} = 2$

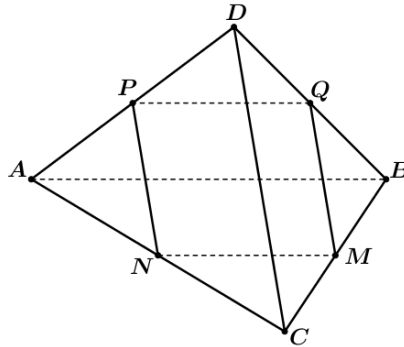
Tương tự  $MQ // CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MQ = \frac{2}{3}CD = 2$

Lại có  $MN // AB$ ,  $MQ // CD \Rightarrow (MN; MQ) = (AB; CD) = 60^\circ$

Khi đó  $S_{MNPQ} = 2S_{MNQ} = MN.MQ \sin(MN; MQ) = 2.2.\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ .

**Ví dụ 11:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB$  vuông góc với  $CD$ ,  $AB = 4$ ,  $CD = 6$ .  $M$  là điểm thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $MC = 2BM$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  song song với  $AB$  và  $CD$ . Diện tích thiết diện của  $(P)$  với tứ diện là

**Lời giải**



Mặt phẳng  $(P)$  qua  $M$  song song với  $AB$  và  $CD$  cắt  $AC, AD, BD$  lần lượt tại  $N, P, Q$ .

Do  $MN // AB$ , theo định lý Talet ta có  $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2AB}{3} = \frac{8}{3}$

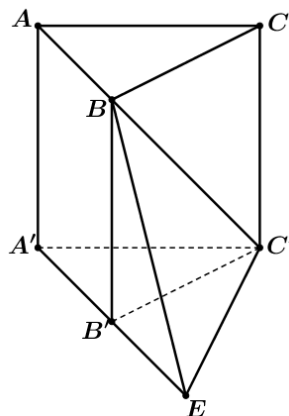
Tương tự  $MQ // CD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MQ = \frac{1}{3}CD = 2$

Lại có  $MN // AB$ ,  $MQ // CD \Rightarrow (MN; MQ) = (AB; CD) = 90^\circ$

Khi đó  $S_{MNPQ} = 2S_{MNQ} = MN.MQ \sin(MN; MQ) = \frac{8}{3}.2.\sin 90^\circ = \frac{16}{3}$ .

**Ví dụ 12:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$  và  $AA' = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$  bằng

**Lời giải**



Gọi  $E$  là điểm thuộc  $A'B'$  sao cho  $B'A' = B'E$

Ta có  $ABEB'$  là hình bình hành nên  $AB' // BE$

Lại có  $A'E = 2a$ ,  $B'C' = \frac{1}{2}A'E \Rightarrow \triangle EA'C'$  vuông tại  $C'$

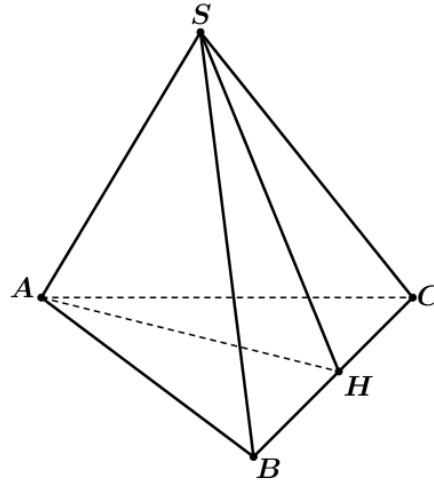
Khi đó  $C'E = \sqrt{A'E^2 - A'C'^2} = a\sqrt{3}$ ,  $BE = AB' = a\sqrt{3}$   $BC' = \sqrt{BB'^2 + C'B'^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \triangle BEC'$  là tam giác đều.

Do đó  $(AB'; BC') = (BE; BC') = EBC' = 60^\circ$ .

Mối quan hệ giữa quan hệ song song và vuông góc:  $\begin{cases} a // b \\ c \perp a \end{cases} \longrightarrow c \perp b$

**Ví dụ 13:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $AB = AC$ ,  $SAC = SAB$ . Chứng minh  $SA$  vuông góc với  $BC$ .

Lời giải



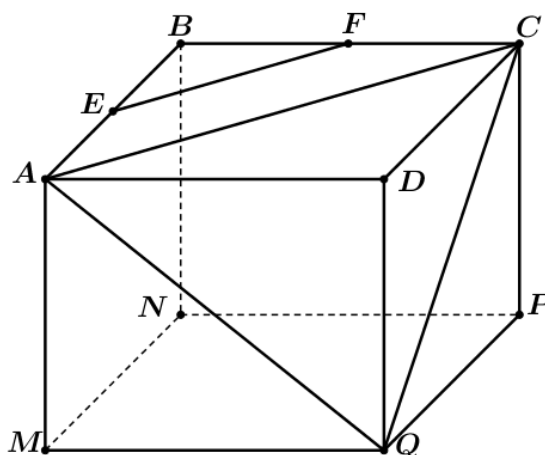
Vì  $AB = AC$ ,  $SAC = SAB$  nên  $\triangle SAC = \triangle SAB$ , suy ra  $SB = SC$ , nên hai tam giác  $ABC$  và  $SBC$  là tam giác cân. Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ , ta có  $\begin{cases} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAH) \perp BC$  nên  $SA \perp BC \Rightarrow (SA, BC) = 90^\circ$ . Vậy  $SA \perp BC$

**Ví dụ 14:** Cho hình hộp  $ABCD.MNPQ$  có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi  $E$ ,  $F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ .

a) Chứng minh:  $EF \perp BD$ ,  $EF \perp AM$ .

b) Tính góc giữa  $EF$  và  $AQ$ .

Lời giải



a) Chứng minh:  $EF \perp BD$ ,  $EF \perp AM$ .

Ta thấy:  $EF$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$

$\Rightarrow EF // AC$  mà:  $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp AA' \end{cases}$  nên  $EF \perp BD, EF \perp AM$

b) Tính góc giữa  $EF$  và  $AQ$ .

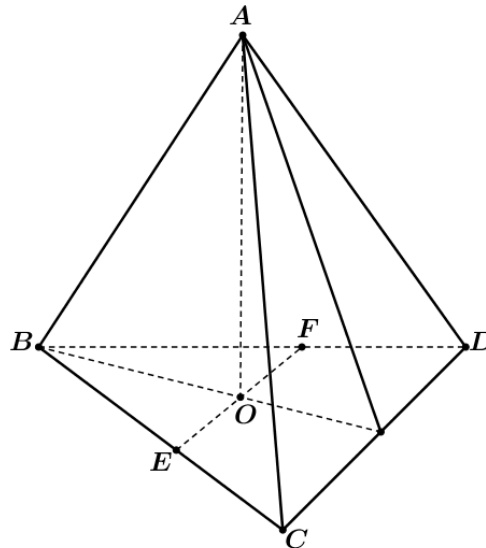
Ta có:  $EF \parallel AC \Rightarrow (EF, AQ) = (AC, AQ) = CAQ$ .

Nhận thấy:  $AC = AQ = CQ = a\sqrt{2}$ .

$\Rightarrow \Delta ACQ$  đều nên  $CAQ = 60^\circ \Rightarrow (EF, AQ) = CAQ = 60^\circ$ .

**Ví dụ 15:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA = SB = SC$  và  $ASB = BSC = CSA$ . Chứng minh rằng  $SA \perp BC$ ,  $SB \perp AC$  và  $SC \perp AB$ .

Lời giải



Qua  $O$  vẽ đường thẳng song song với  $CD$  cắt  $BC$  tại  $E$  và cắt  $BD$  tại  $F$ .

Ta cần chứng minh  $AO \perp EF$ . Ta có  $AOE = (AO, CD)$ .

Vì  $EF \parallel CD$  nên  $BEF$  là tam giác đều nên  $BE = BF$  và  $OE = OF$ . (1) Xét hai tam giác  $ABE$  và  $ABF$ , ta có

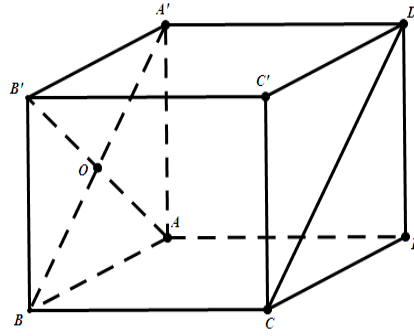
$$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ BE = BF \\ \angle ABE = \angle ABF \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ABF \text{ (c - g - c)}. \text{ Suy ra } AE = AF. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra tam giác  $AEF$  cân tại  $A$  có  $AO$  là trung tuyến nên cũng là đường cao.

Do đó  $\angle AOE = 90^\circ$ . Vậy  $AO \perp CD$ .

**Câu 1:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = AD = \sqrt{2}$ ,  $AA' = 2$ . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $CD'$ .

**Lời giải**



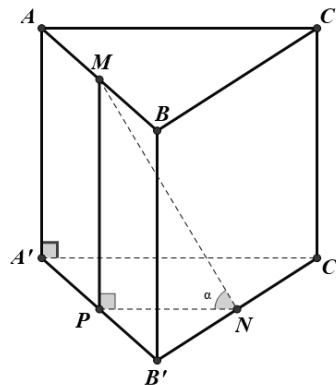
Ta có:  $CD' \parallel A'B$  nên  $(AB', CD') = (AB', A'B)$  và gọi  $O$  là giao điểm của  $AB'$  và  $A'B$ .

$$\text{Ta có: } OA = OB = \frac{1}{2} AB' = \frac{1}{2} \sqrt{2+4} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{\frac{6}{4} + \frac{6}{4} - 2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \cos(AB', CD') = \frac{1}{3}.$$

**Câu 2:** Cho lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, B'C'$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng  $AC, MN$ . Tính  $\tan \alpha$ .

**Lời giải**



Gọi  $P$  là trung điểm  $A'B'$  khi đó ta có  $AC \parallel PN$ .

Do đó góc giữa hai đường thẳng  $AC, MN$  chính là góc giữa đường thẳng  $MN, PN$ .

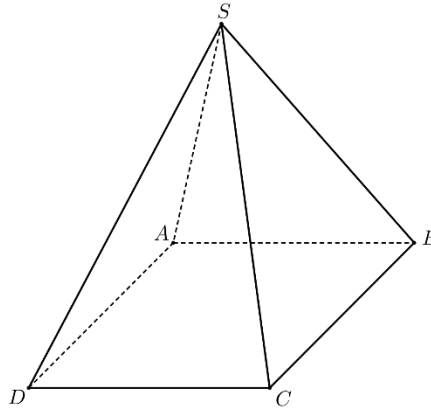
Tức là  $(AC, MN) = (MN, PN) = \alpha$ .

Trong tam giác vuông  $MPN$  có:  $MP = AA' = a, PN = \frac{a}{2}$  suy ra  $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan MNP = \frac{MP}{PN} = 2.$$

**Câu 3:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $SA = AB = a$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $CD$

**Lời giải**



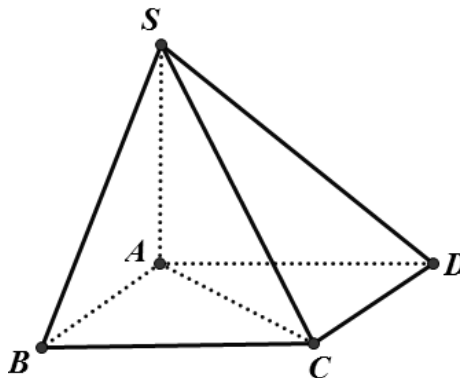
Ta có  $CD \parallel AB$  do đó góc giữa  $SA$  và  $CD$  bằng góc giữa  $SA$  và  $AB$  bằng góc  $SAB$

Do  $S.ABCD$  là hình chóp tứ giác đều có  $SA = AB$  nên  $\triangle SAB$  là tam giác đều, do đó  $\angle SAB = 60^\circ$ .

Vậy góc giữa  $SA$  và  $CD$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 4:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình chữ nhật. Biết  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AD = 2a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $AB$  bằng

Lời giải



Góc giữa đường thẳng  $SC$  và  $AB$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $CD$ .

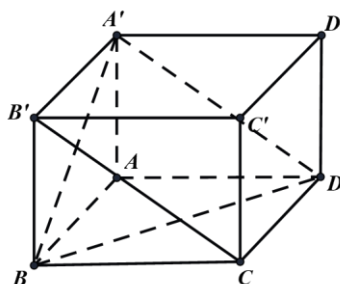
Mặt khác:  $CD \perp SA, CD \perp AD$  nên  $CD \perp SD$  hay tam giác  $SCD$  vuông tại  $D$ .

$$\cos \angle SCD = \frac{CD}{SC} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 2a^2 + 4a^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra góc  $\angle SCD = 60^\circ$  nên góc giữa đường thẳng  $SC$  và  $AB$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 5:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  
a)  $A'B$  và  $B'C$  b)  $AC$  và  $A'D$ .

Lời giải

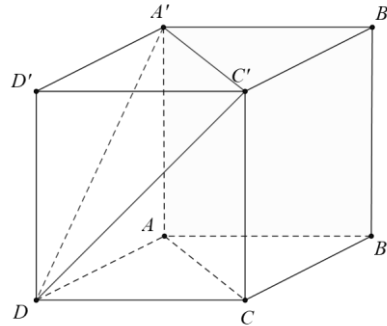


Theo tính chất hình lập phương ta có:  $B'C // A'D$ .

Do đó góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $B'C$  là: góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $A'D$ .

Mà tam giác  $A'BD$  là tam giác đều nên:  $(A'B, B'C) = (A'B, A'D) = 60^\circ$ .

b)  $AC$  và  $A'D$ .



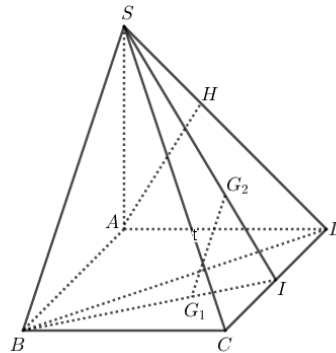
Do  $AC // A'C'$  nên góc giữa  $AC$  và  $A'D$  bằng góc giữa  $A'C'$  và  $A'D$ .

Do  $ABCD.A'B'C'D'$  là hình lập phương nên tam giác  $A'C'D$  là tam giác đều.

Suy ra  $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \angle A'C'D = 60^\circ$ .

**Câu 6:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông,  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $SD$ . Cho  $SA = a\sqrt{3}$ ;  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Gọi  $G_1; G_2$  lần lượt là trọng tâm  $\triangle BCD$  và  $\triangle SCD$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $CD$  và  $G_1G_2$ .

**Lời giải**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ .

$$\text{Trong } \triangle SBI \text{ ta có: } \left. \begin{array}{l} \frac{IG_1}{IB} = \frac{1}{3} \\ \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{IG_1}{IB} = \frac{IG_2}{IS} \Rightarrow G_1G_2 // SB.$$

Vì  $ABCD$  là hình vuông nên  $CD // AB$ .

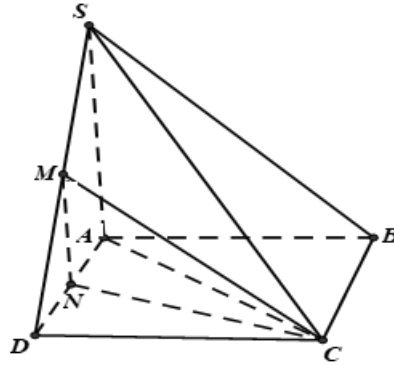
Vậy góc giữa hai đường thẳng  $CD$  và  $G_1G_2$  là góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SB$ .

Vì  $\triangle SAB$  vuông tại  $A$  nên góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SB$  là  $\angle SBA$ .

Suy ra  $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60^\circ$ .

**Câu 7:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật  $AB = 2a$ ,  $BC = a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $SD$ . Tính  $\tan \alpha$  với  $\alpha$  góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $CM$ .

**Lời giải**



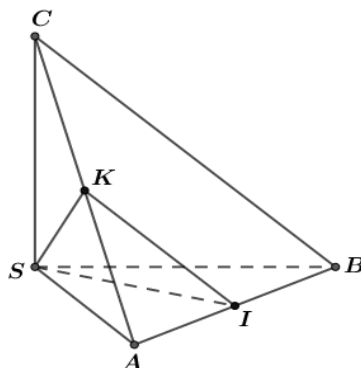
Gọi  $N$  là trung điểm của  $AD$ , khi đó  $MN \parallel SA$  nên  $(SA, CM) = (MN, CM) = CMN = \alpha$ .

Ta có  $MN = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$ ,  $CN = \sqrt{DN^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (2a)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ .

Tam giác  $MNC$  vuông tại  $N$  nên ta có  $\tan \alpha = \frac{NC}{MN} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = 3\sqrt{2}$ .

**Câu 8:** Hình chóp  $S.ABC$  có  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc với nhau và  $SA = SB = SC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tính góc giữa  $SI$  và  $BC$ .

**Lời giải**



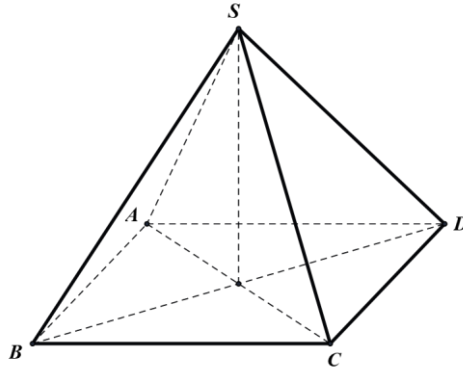
Gọi  $K$  là trung điểm của  $AC$ . Khi đó  $(SI, BC) = (SI, KI) = SIK$ .

Ta có  $AB = BC = CA \Rightarrow SI = IK = SK$

Tam giác  $SIK$  là tam giác đều nên  $SIK = 60^\circ$ .

**Câu 9:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng  $a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$ .

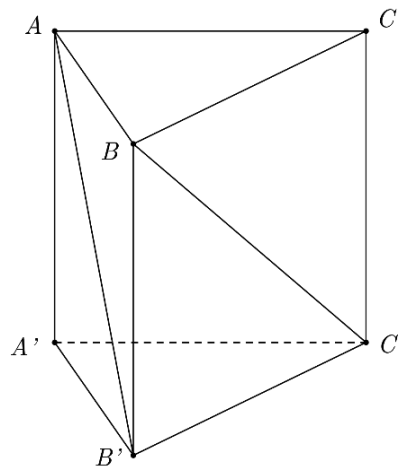
**Lời giải**



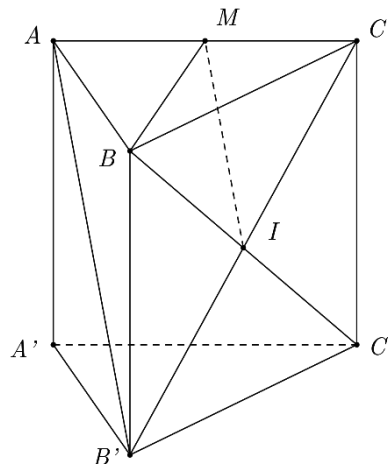
Do  $AB \parallel CD$  nên góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng góc giữa hai đường thẳng  $CD$  và  $SC$ .

Xét tam giác  $SCD$  ta có  $CD = 2a$ ,  $SC = a\sqrt{2}$ ,  $SD = a\sqrt{2}$  thỏa mãn  $SC^2 + SD^2 = CD^2$  nên tam giác  $SCD$  vuông tại  $S$ . Vậy góc  $SCD = 45^\circ$  hay góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng  $45^\circ$ .

**Câu 10:** Cho hình lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng  $a$ , cạnh bên có độ dài  $a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $BC'$ .



**Lời giải**



Gọi  $I$  là giao điểm của  $BC'$  và  $B'C$  khi đó  $I$  là trung điểm của hai đường trên, gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ .

Ta có  $IM \parallel AB'$  nên  $(AB'; BC') = (IM; BC')$ .

$$\text{Ta có } BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; IM = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BI = \frac{BC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

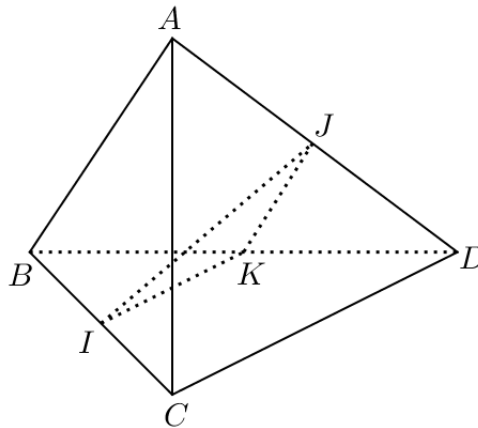
Do đó  $BM = IM = BI$  nên tam giác  $BIM$  đều, suy ra  $BIM = 60^\circ$ .

Vậy  $(AB'; BC') = (IM; BC') = 60^\circ$ .

**Câu 11:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = a, IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  ( $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ ).

Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

**Lời giải**



Gọi  $K$  là trung điểm của  $BD$ . Khi đó  $IK$  song song với  $CD$  và  $JK$  song song với  $AB$ .

$$\text{Khi đó } (AB, CD) = (KI, KJ) = \begin{cases} IKJ \\ 180^\circ - IKJ \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } KI = KJ = \frac{a}{2} \Rightarrow \cos IKJ = \frac{KI^2 + KJ^2 - IJ^2}{2KI.KJ} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

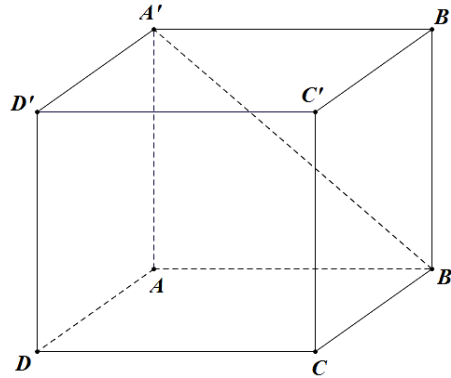
Vậy  $IKJ = 120^\circ \Rightarrow (AB, CD) = 60^\circ$ .

## D // BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $CD$  bằng
- A.  $60^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

Lời giải

Chọn C



Ta có  $AB \parallel CD$  nên  $(BA', CD) = (BA', AB)$ .

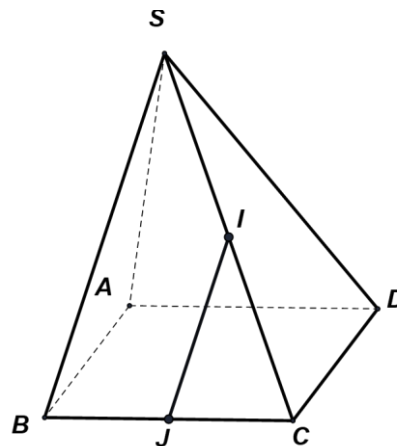
Vì  $ABB'A'$  là hình vuông nên  $(BA', AB) = \angle ABA' = 45^\circ$ .

- Câu 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Số đo của góc  $(IJ, CD)$  bằng:

A.  $90^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết ta có  $IJ$  là đường trung bình của  $\triangle SBC$  nên  $IJ \parallel SB$ .

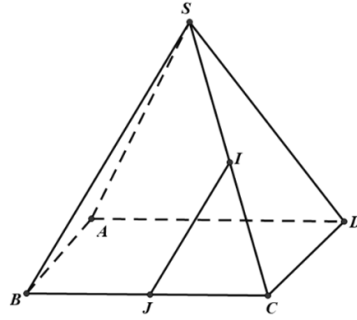
Vì  $IJ \parallel SB$  và  $CD \parallel AB$  nên  $(IJ, CD) = (SB, AB) = \angle SBA = 60^\circ$  (Do  $\triangle SAB$  đều).

- Câu 3:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Góc giữa hai đường thẳng  $IJ$  và  $SC$  bằng

A.  $60^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

Lời giải

Chọn A



Dễ thấy  $\triangle SBC$  là tam giác đều. Do  $IJ \parallel SB$  nên  $(IJ, SC) = (SB, SC) = BSC = 60^\circ$ .

**Câu 4:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = a$ ;  $AA' = a\sqrt{3}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB'$  và  $CC'$  bằng

A.  $30^\circ$ .

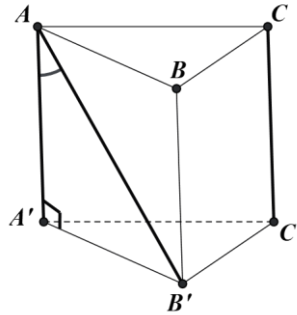
B.  $60^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Vì  $AA' \parallel CC'$  nên góc giữa  $CC'$  và  $AB'$  bằng góc giữa  $AA'$  và  $AB'$  và bằng góc  $A'AB'$

Với  $AB = a$ ;  $AA' = a\sqrt{3}$  thì  $\tan A'AB' = \frac{A'B'}{AA'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'AB' = 30^\circ$

**Câu 5:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $A'B$  và  $CD$  bằng

A.  $30^\circ$ .

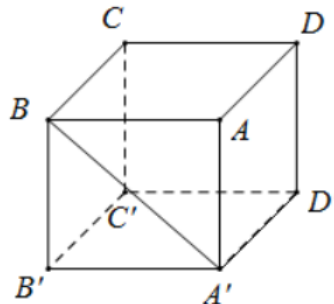
B.  $90^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có  $AB \parallel CD \Rightarrow (A'B; CD) = (A'B; AB) = ABA' = 45^\circ$ .

**Câu 6:** Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AC$  và  $DA_1$  bằng

A.  $60^\circ$ .

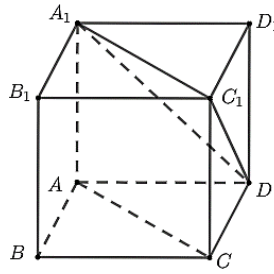
B.  $90^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có  $AC \perp A_1C_1$ , do đó góc giữa  $(AC, DA_1) = (A_1C_1, DA_1)$ , bằng góc  $DA_1C_1$ .

Do  $DA_1, A_1C_1, DC_1$  là các đường chéo hình vuông nên bằng nhau. Vậy  $\triangle DA_1C_1$  đều,

Vậy góc  $DA_1C_1$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 7:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $A'D$  và  $B'C'$  bằng

A.  $90^\circ$ .

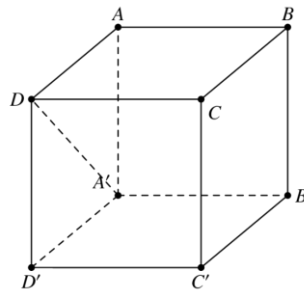
B.  $60^\circ$ .

C.  $30^\circ$ .

D.  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Vì  $B'C' \parallel A'D'$  nên  $(A'D, B'C') = (A'D, A'D') = \angle A'D'D = 45^\circ$ .

**Câu 8:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Số đo góc giữa hai đường thẳng  $SA$  và  $CD$  bằng

A.  $30^\circ$ .

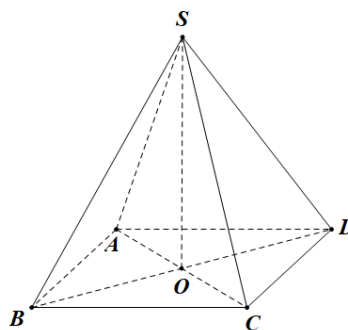
B.  $90^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $45^\circ$ .

**Lời giải**

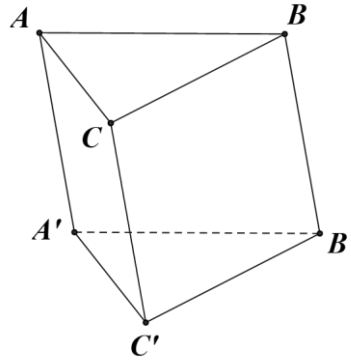
**Chọn C**



Vì  $AB \parallel CD \Rightarrow (SA, CD) = (SA, AB)$ .

Tam giác  $SAB$  đều cạnh  $a \Rightarrow \angle SAB = 60^\circ$ . Vậy  $(SA, CD) = 60^\circ$ .

**Câu 9:** Cho lăng trụ  $ABCA'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ)



Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $C'A'$  bằng

- A.  $30^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có tam giác  $ABC$  là tam giác đều suy ra  $\angle BAC = 60^\circ$ .

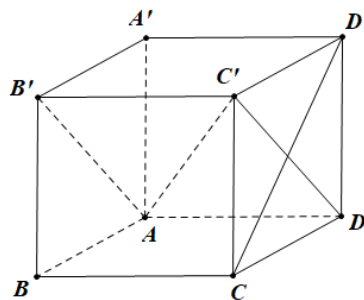
Lại có  $CA \parallel C'A' \Rightarrow (AB, C'A') = (AB, CA) = \angle BAC = 60^\circ$ .

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $C'A'$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 10:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $CD'$  và  $AC'$ .

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Chọn C**



Ta có  $CD' \perp C'D$  (tính chất đường chéo hình vuông),  $CD' \perp C'B'$  (tính chất hình lập phương).

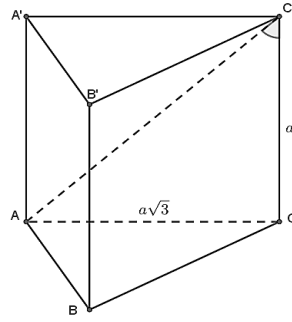
Suy ra  $CD' \perp (AB'C'D) \Rightarrow CD' \perp AC'$ . Vậy góc giữa hai đường thẳng  $CD'$  và  $AC'$  bằng  $90^\circ$ .

**Câu 11:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh bằng  $a\sqrt{3}$  và cạnh bên bằng  $a$ . Góc giữa đường thẳng  $BB'$  và  $AC'$  bằng

- A.  $90^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Ta có  $BB' \parallel CC' \Rightarrow (BB', AC') = (CC', AC') = AC'C$ .

Khi đó  $\triangle ACC'$  vuông tại C nên  $\tan AC'C = \frac{AC}{CC'} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow AC'C = 60^\circ$ .

Vậy góc giữa đường thẳng  $BB'$  và  $AC'$  bằng  $60^\circ$ .

**Câu 12:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $SC$  và  $BC$ . Số đo của góc  $(IJ, CD)$  bằng

A.  $90^\circ$ .

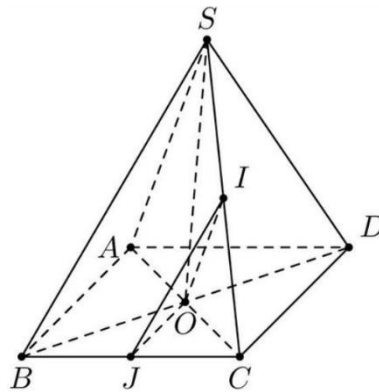
B.  $45^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $O$  là tâm của hình thoi  $ABCD$ .

Suy ra  $OJ$  là đường trung bình trong tam giác  $BCD \Rightarrow \begin{cases} OJ \parallel CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$ .

Vì  $CD \parallel OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$ .

Xét tam giác  $IOJ$  có  $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle IOJ \text{ đều.}$

Vậy  $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = IJO = 60^\circ$ .

**Câu 13:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $a$ . Tính góc tạo bởi đường thẳng  $A'B$  và đường thẳng  $B'C$ .

A.  $60^\circ$ .

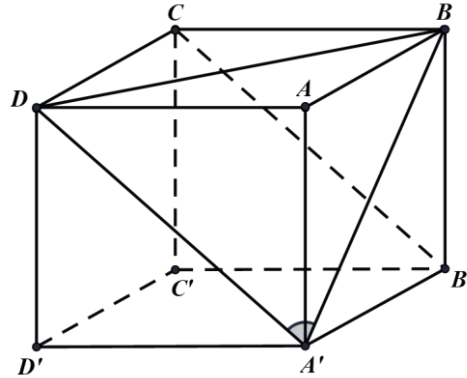
B.  $45^\circ$ .

C.  $30^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Xét  $\triangle DA'B$  có  $A'D = A'B = BD$  nên  $\triangle DA'B$  là tam giác đều  $\Rightarrow \angle DA'B = 60^\circ$ .

Ta có  $B'C \parallel A'D \Rightarrow (A'B; B'C) = (A'B; A'D) = \angle DA'B = 60^\circ$ .

**Câu 14:** Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $BC$ . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $CD$ .

A.  $30^\circ$ .

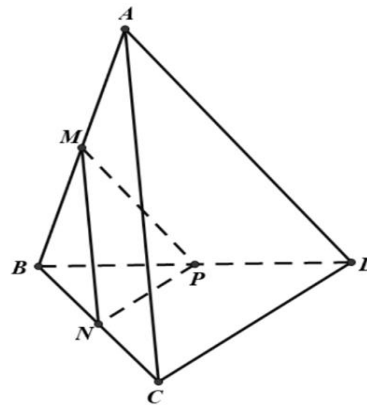
B.  $60^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $BD$ .

Ta có  $MN, NP, MP$  lần lượt là đường trung bình của tam giác  $ABC, BCD, ABD$ .

Do đó:  $MN \parallel AC$ ,  $MN = \frac{1}{2}AC$

$NP \parallel CD$ ,  $NP = \frac{1}{2}CD$ .

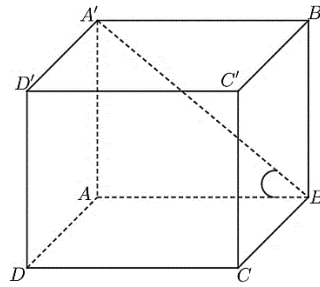
$MP \parallel AD$ ,  $MP = \frac{1}{2}AD$ .

Suy ra  $ABCD$  là tứ diện đều  $\Rightarrow AC = CD = AD \Rightarrow MN = NP = MP$  nên tam giác  $MNP$  là tam giác đều nên  $(MN, CD) = (MN, NP) = \angle MNP = 60^\circ$ .

- Câu 15:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai đường thẳng  $BA'$  và  $CD$  bằng  
**A.**  $90^\circ$ .                      **B.**  $45^\circ$ .                      **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

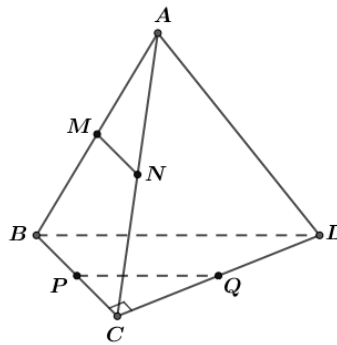


Ta có:  $AB \parallel CD$  (do  $ABCD$  là hình vuông)  $\Rightarrow (BA', CD) = (BA', AB) = \angle ABA' = 45^\circ$ .

- Câu 16:** Cho tứ diện  $ABCD$  với đáy  $BCD$  là tam giác vuông cân tại  $C$ . Các điểm  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC, CD$ . Góc giữa  $MN$  và  $PQ$  bằng  
**A.**  $45^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $0^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

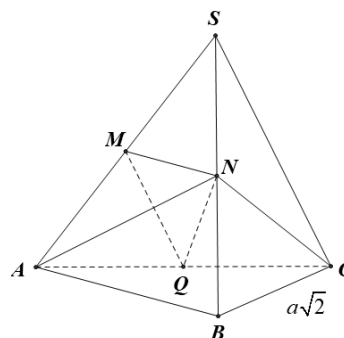


Do  $MN$  song song  $BC$  và  $PQ$  song song  $BD$  nên góc giữa  $MN$  và  $PQ$  bằng góc giữa  $BC$  và  $BD$  và bằng góc  $CBD = 45^\circ$  (do tam giác  $BCD$  vuông cân tại  $C$ ).

- Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có độ dài các cạnh  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  bằng  
**A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $90^\circ$ .                      **C.**  $30^\circ$ .                      **D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Gọi  $M, N, Q$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, AC$ .

Mặt khác, ta có  $\begin{cases} MN // AB \\ MQ // SC \end{cases} \Rightarrow (AB, SC) = (MN, MQ)$ .

$$\text{Ta có } AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}; NC = \sqrt{\frac{SC^2 + BC^2}{2} - \frac{SB^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } NAC \text{ có } NQ = \sqrt{\frac{NA^2 + NC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } MNQ \text{ có } \cos \angle MNQ = \frac{MN^2 + MQ^2 - NQ^2}{2MN \cdot MQ} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \angle MNQ = 120^\circ \Rightarrow (MN, MQ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

**Câu 18:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a$ ,  $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,

góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SD$  là

A.  $120^\circ$ .

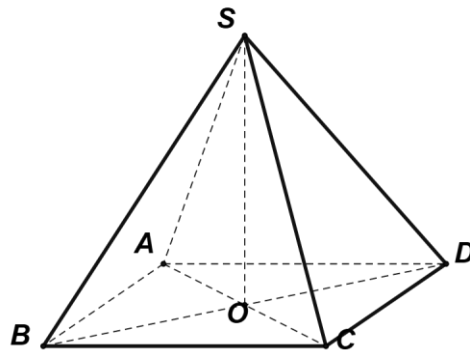
B.  $60^\circ$ .

C.  $30^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

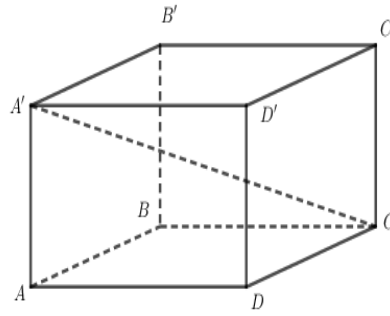


$$\text{Ta có: } AB // CD \Rightarrow (AB, SD) = (CD, SD); OD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a \Rightarrow SD = SC = CD = a \Rightarrow \triangle SCD \text{ đều} \Rightarrow \angle SDC = 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } (AB, SD) = (CD, SD) = \angle SDC = 60^\circ.$$

**Câu 19:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết  $AB = AA' = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ . Tính góc giữa  $A'C$  và  $DD'$ .



A.  $90^\circ$ .

B.  $30^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $45^\circ$ .

**Lời giải**

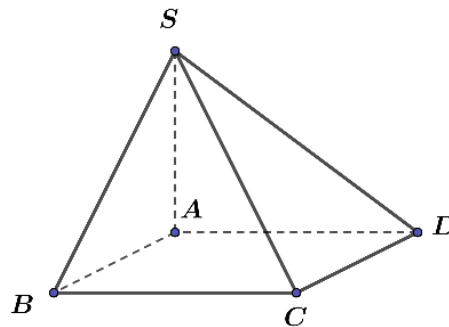
**Chọn C**

Vì  $AA'D'D$  là chữ nhật nên  $DD' \parallel AA' \Rightarrow (A'C, DD') = (A'C, AA') = \angle AA'C$ .

Ta có  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$ .

Khi đó:  $\tan(\angle AA'C) = \frac{AC}{AA'} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle AA'C = 60^\circ$

**Câu 20:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông,  $AC = 2a$ ,  $SA = a\sqrt{2}$  và  $SA$  vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa hai đường thẳng  $BC$  và  $SD$

A.  $90^\circ$ .

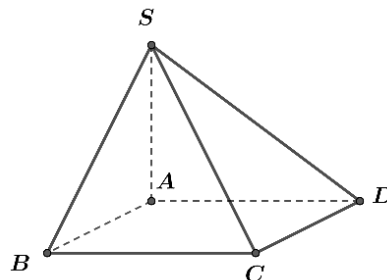
B.  $30^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



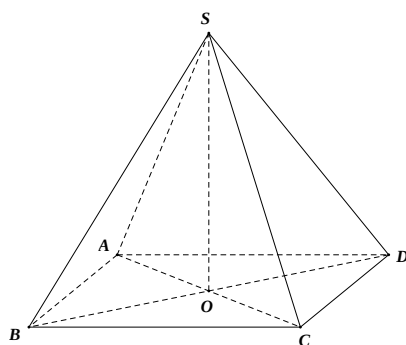
Vì  $AD \parallel BC$  nên  $(BC; SD) = (AD; SD) = \angle SDA$  ( $\angle SDA$  nhọn vì  $\triangle SDA$  vuông tại  $A$ ).

$ABCD$  là hình vuông có đường chéo  $AC = 2a \Rightarrow AD = a\sqrt{2}$

Tam giác vuông  $SDA$  có  $SA = AD = a\sqrt{2}$ , nên tam giác này vuông cân tại  $A \Rightarrow \angle SDA = 45^\circ$ .

Vậy  $(BC;SD) = 45^\circ$ .

**Câu 21:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$



Góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$  bằng

A.  $30^\circ$ .

B.  $45^\circ$ .

C.  $60^\circ$ .

D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**

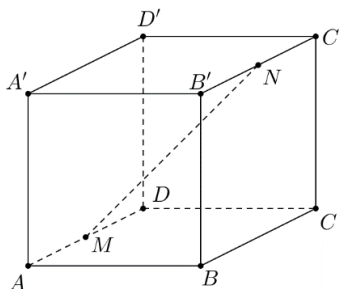
**Chọn D**

Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD$ .

Ta có  $S.ABCD$  là chóp đều  $\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$ . Mà  $BD \perp AC$  nên  $BD \perp (SAC)$   
 $\Rightarrow BD \perp SC$ .

Vậy góc giữa hai đường thẳng  $SC$  và  $BD$  bằng  $90^\circ$ .

**Câu 22:** Cho hình lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$ , gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $B'C'$  (tham khảo hình bên dưới).



Góc giữa hai đường thẳng  $MN$  và  $AA'$  bằng

A.  $90^\circ$ .

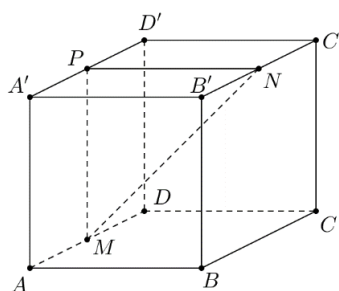
B.  $30^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $A'D'$ . Khi đó,  $AA' \parallel MP \Rightarrow (MN, AA') = (MN, MP)$ .

Ta có  $\triangle MNP$  vuông cân tại  $P$ . Suy ra  $(MN, AA') = (MN, MP) = NMP = 45^\circ$

**Câu 23:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA = 2a$  và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $F$  là trung điểm cạnh  $AB$  và  $G$  là trung điểm của  $SF$ . Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi hai đường thẳng  $CG$  và  $BD$ . Tính  $\cos \alpha$ ?

A.  $\frac{\sqrt{82}}{41}$ .

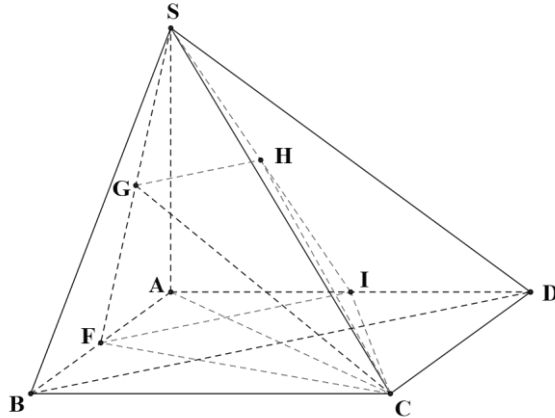
B.  $\frac{\sqrt{41}}{41}$ .

C.  $\frac{2\sqrt{41}}{41}$ .

D.  $\frac{\sqrt{82}}{82}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $I$  là trung điểm  $AD$  và  $H$  là trung điểm  $SI$ .

Dễ thấy  $GH \parallel FI$  (vì  $GH$  là đường trung bình của tam giác  $SFI$ )

$BD \parallel FI$  (vì  $FI$  là đường trung bình của tam giác  $ABD$ )

Nên  $GH \parallel BD$  suy ra  $(CG; BD) = (CG; GH)$ .

$$\text{Ta có } CI = \sqrt{CD^2 + DI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow CF = CI = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$SF = SI = \sqrt{SA^2 + AF^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2};$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{6}.$$

$$\text{Khi đó } CG^2 = \frac{CF^2 + CS^2}{2} - \frac{SF^2}{4} = \frac{\frac{5a^2}{4} + 6a^2}{2} - \frac{9a^2}{4} = \frac{41a^2}{16} \Rightarrow CH = CG = \frac{a\sqrt{41}}{4}$$

$$\text{Mặt khác: } GH = \frac{1}{2}FI = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \cos CGH = \frac{GC^2 + GH^2 - HC^2}{2.GC.GH} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{41}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{82}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{\sqrt{82}}{82}.$$

**Câu 24:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy hình vuông, tam giác  $SAB$  vuông tại  $S$  và  $SBA = 30^\circ$ . Mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng  $(SM, BD)$ .

A.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

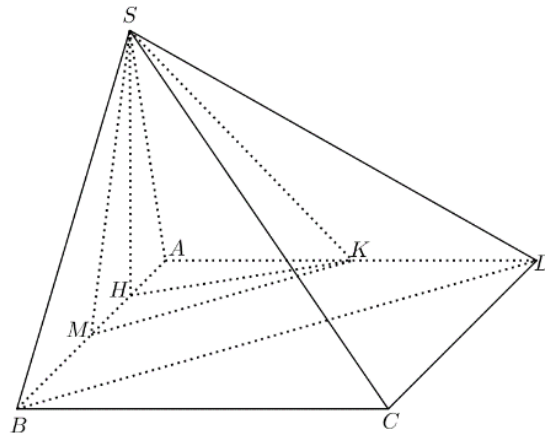
B.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

C.  $\frac{\sqrt{26}}{13}$ .

D.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Đặt  $AB = a$  ( $a > 0$ ).

Ta có  $SM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ ;  $SA = SB$  nên tam giác  $SAB$  cân tại  $S$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  lên  $AB$ , do  $(SAB) \perp (ABCD)$  và  $(SAB) \cap (ABCD) = AB$  nên  $SH \perp (ABCD)$  hay  $H$  là trung điểm của  $AB$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $AD$ , khi đó  $(SM, BD) = (SM, MK)$  và  $MK = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Khi đó } SH = HB \cdot \tan 30^\circ = \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$SK^2 = SH^2 + HK^2 = SH^2 + AH^2 + AK^2 = \frac{a^2}{2}.$$

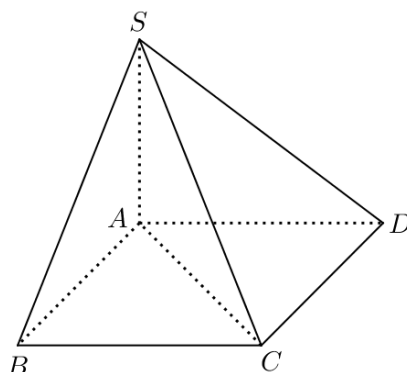
$$\text{Ta có: } \cos SMK = \frac{SM^2 + MK^2 - SK^2}{2.SM.MK} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**Câu 25:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Biết  $SA$  vuông góc với đáy và  $AB = SA = a, AC = 2a$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BC$ .

A.  $30^0$ .B.  $60^0$ .C.  $90^0$ .D.  $45^0$ .

Lời giải

Chọn A



Do  $BC \parallel AD \Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = SDA$

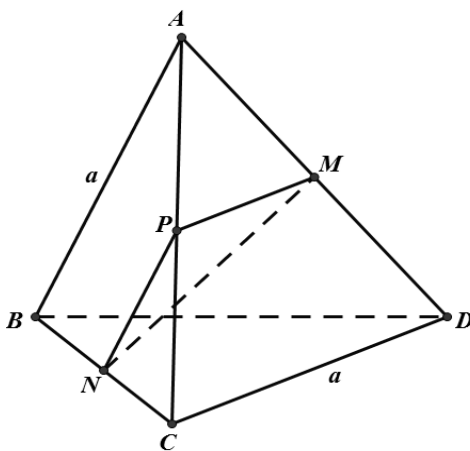
Ta có  $AD = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$ , suy ra  $\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SDA = 30^0$ .

**Câu 26:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Xác định độ dài đoạn thẳng  $MN$  để góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $MN$  bằng  $30^0$ .

A.  $MN = \frac{a}{4}$ .B.  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .C.  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .D.  $MN = \frac{a}{2}$ .

Lời giải

Chọn C

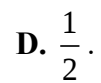


Gọi  $P$  là trung điểm của cạnh  $AC$  thì ta có  $PN \parallel AB$  và  $PM \parallel CD$ ,  $PN = PM = \frac{a}{2}$ . Do đó tam

giác  $MNP$  cân tại  $P$ . Khi đó  $(AB, MN) = (NP, MN) = PNM = 30^0$ , suy ra  $MPN = 120^0$

Xét tam giác  $PMN$  có  $MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cdot \cos MPN = \frac{3a^2}{4}$ , do đó  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 27:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông tại  $A$ ,  $BA = 2AC = 2a$ , cạnh bên  $AA' = 2a$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$  (minh họa như hình dưới). Cosin góc giữa hai đường thẳng  $B'C$  và  $AM$  bằng



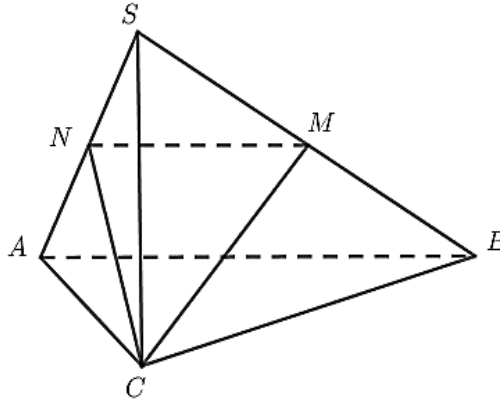
$$\cos NMA = \frac{MN^2 + MA^2 - AN^2}{2.MN.MA} = \frac{\frac{9}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 5a^2}{2.\frac{3}{2}a.\frac{\sqrt{5}}{2}a} = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy } \cos(AM, B'C) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 28:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $C$ . Tam giác  $SAB$  vuông cân tại  $S$  và  $BSC = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SB$ ,  $\varphi$  là góc giữa đường thẳng  $AB$  và  $CM$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .      B.  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .      C.  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$ .      D.  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Đặt  $SA = a$ . Suy ra  $SB = CA = CB = a$  và  $AB = a\sqrt{2}$ .

Lại có  $BSC = 60^\circ$ . Suy ra tam giác  $SBC$  đều nên  $SC = a$ .

Suy ra  $CM = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (Với  $N$  là trung điểm của  $SA$ ) hay  $MN$  song song với  $AB$ .

Khi đó  $(AB, CM) = (MN, CM)$ . Áp dụng định lí cosin vào tam giác  $CMN$  ta có:

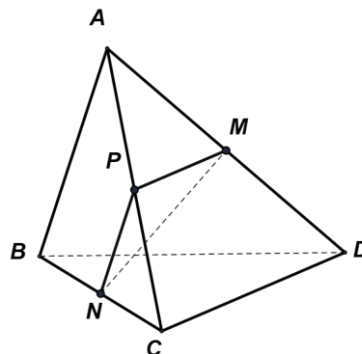
$$\cos CMN = \frac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2MC \cdot MN} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \cos(AB, CM) = \cos(MN, CM) = |\cos CMN| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

**Câu 29:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = CD = a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Xác định độ dài đoạn thẳng  $MN$  để góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $MN$  bằng  $30^\circ$ .

- A.  $MN = \frac{a}{2}$ .      B.  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $MN = \frac{a}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $P$  là trung điểm của  $AC$ . Khi đó  $PM, PN$  lần lượt là đường trung bình của

$$\triangle ACD, \triangle ACB \text{ nên } PM = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \text{ và } PN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$$

Vì  $AB \parallel PN$  nên  $(AB, MN) = (PN, MN) = PNM = 30^\circ$

Mặt khác:  $\triangle PMN$  cân tại  $P$  và có góc ở đáy  $PNM = 30^\circ$  nên góc ở đỉnh bằng  $NPM = 120^\circ$ .

$$\text{Áp dụng định lý Cosin cho } \triangle PMN, \text{ ta có: } MN = \sqrt{PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cdot \cos 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**Câu 30:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông, cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = AB = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Góc giữa  $AM$  và  $BD$  bằng

A.  $45^\circ$ .

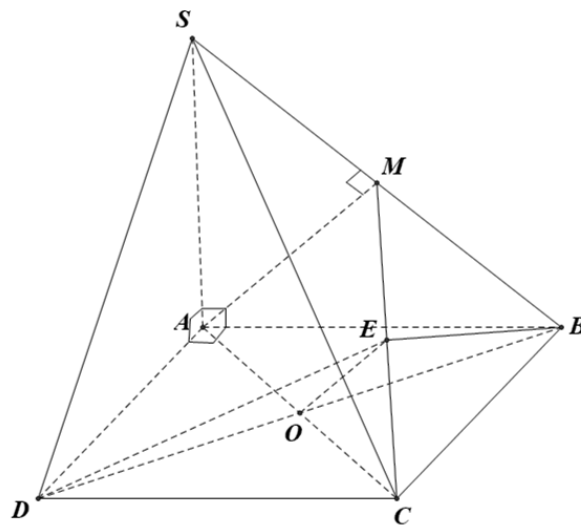
B.  $30^\circ$ .

C.  $90^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Xét tam giác  $SAB$  vuông tại  $A$  có:  $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$ .

Gọi  $E$  là trung điểm của  $MC$ , ta có:  $OE \parallel AM \Rightarrow (AM, BD) = (OE, BD)$

$$\text{Khi đó: } OE = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}SB = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Ta có:  $CB \perp AB, SA \perp CB \Rightarrow CB \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$  vuông tại  $B$ .

$$\text{Xét tam giác } MBC \text{ vuông tại } B \text{ có: } MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{4}.2a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Khi đó: } BE = \frac{1}{2}MC = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Xét tam giác } BCD \text{ vuông tại } C \text{ có: } BD = \sqrt{BC^2 + DC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

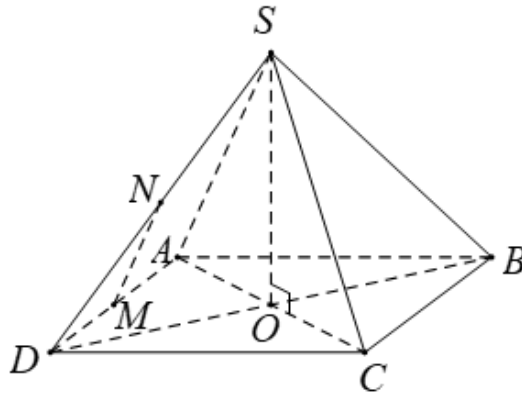
$$\text{Xét tam giác } EBO \text{ có: } \cos EOB = \frac{EO^2 + OB^2 - EB^2}{2 \cdot EO \cdot OE} = \frac{\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{8}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow EOB = 60^\circ$$

$$\Rightarrow (AM, BD) = (OE, BD) = EOB = 60^\circ.$$

- Câu 31:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $a$  và các cạnh bên đều bằng  $a$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $SD$ . Số đo của góc  $(MN, SC)$  bằng
- A.  $30^\circ$ .                      B.  $45^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $O$  là tâm của hình vuông  $ABCD \Rightarrow O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của hình vuông  $ABCD$  (1).

Ta có:  $SA = SB = SC = SD \Rightarrow S$  nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông  $ABCD$  (2).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$ .

Từ giả thiết ta có:  $MN \parallel SA$  (do  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle SAD$ ).  $\Rightarrow (MN, SC) = (SA, SC)$

$$\text{Xét } \triangle SAC, \text{ ta có: } \begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = 2AD = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \triangle SAC \text{ vuông tại } S \Rightarrow SA \perp SC.$$

$$\Rightarrow (SA, SC) = (MN, SC) = 90^\circ.$$

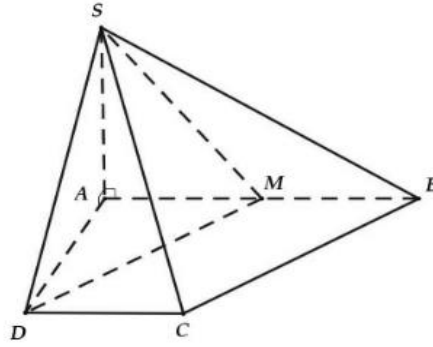
- Câu 32:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $D$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $SD$  và  $BC$  biết

$$AD = DC = a, AB = 2a, SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

- A.  $\frac{1}{\sqrt{42}}$ .                      B.  $\frac{2}{\sqrt{42}}$ .                      C.  $\frac{3}{\sqrt{42}}$ .                      D.  $\frac{4}{\sqrt{42}}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ . Ta có  $MB = DC = a$ .

Mà  $MB \parallel CD$  nên  $MBCD$  là hình bình hành. Do đó  $DM \parallel BC$ .

Suy ra  $(SD, BC) = (SD, DM)$ .

Lại có  $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$  và  $DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ ,  $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

Áp dụng định lí cosin trong  $\triangle SDM$  ta được:

$$\cos \angle SDM = \frac{SD^2 + DM^2 - SM^2}{2SD \cdot DM} = \frac{3}{\sqrt{42}}. \text{ Suy ra } \cos(SD, BC) = \frac{3}{\sqrt{42}}.$$

**Câu 33:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có độ dài các cạnh  $SA = SB = SC = AB = AC = a$  và  $BC = a\sqrt{2}$ . Góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $SC$  là?

A.  $60^\circ$ .

B.  $90^\circ$ .

C.  $30^\circ$ .

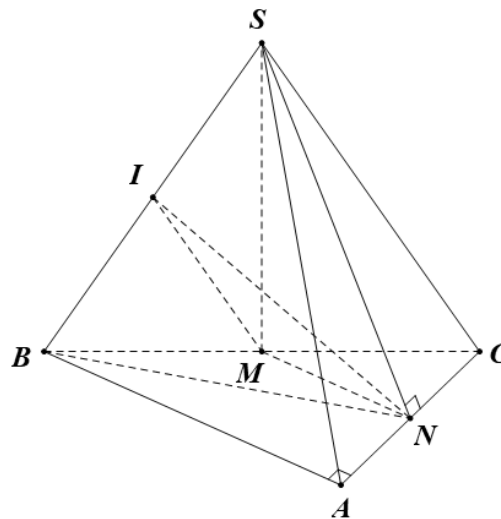
D.  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$  vuông tại  $A \Rightarrow$  trung điểm  $M$  của cạnh huyền  $BC$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Vì  $SA = SB = SC$  nên  $SM$  là đường cao của hình chóp  $S.ABC$ .



Gọi  $N$ ,  $I$  lần lượt là trung điểm của  $AC$ ,  $SB$ .

Ta có  $MN \parallel AB$  và  $IM \parallel SC$  nên  $(SC, AB) = (IM, MN)$ .

Mặt khác:  $BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  $SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Suy ra:  $NI = \frac{\sqrt{2(BN^2 + SN^2) - SB^2}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right) - a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  và  $MN = \frac{a}{2}$ ,  $MI = \frac{a}{2}$ .

Xét tam giác  $IMN$ , ta có  $\cos NMI = \frac{MN^2 + IM^2 - IN^2}{2 \cdot MN \cdot IM} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow NMI = 120^\circ$ .

Suy ra  $(IM, MN) = 60^\circ$ .

-----**HẾT**-----