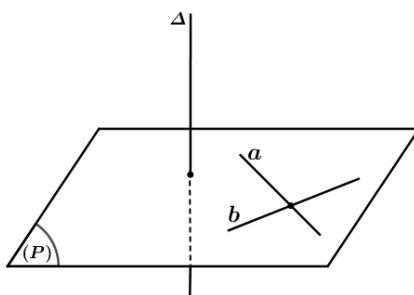


1 Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

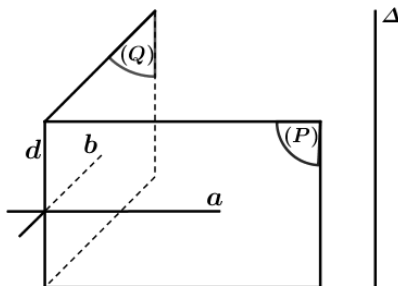
Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .

Chú ý: Khi Δ vuông góc với (P) , ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.

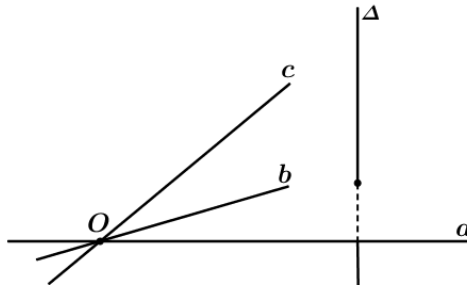
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

**2 Tính chất**

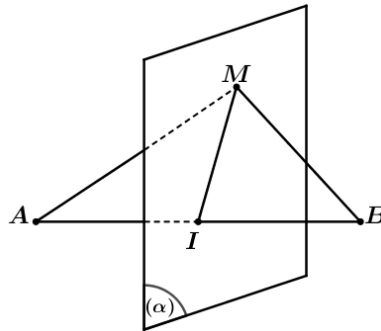
Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



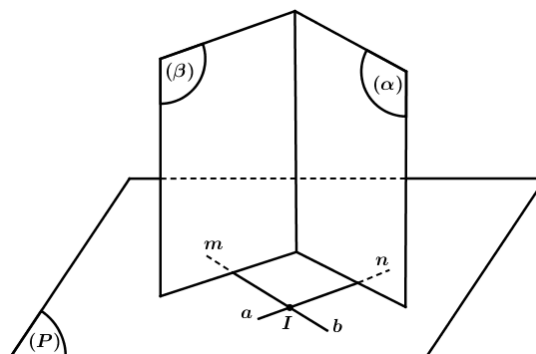
Nhận xét: Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ mô tả như hình vẽ dưới đây:



Chú ý: Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B .



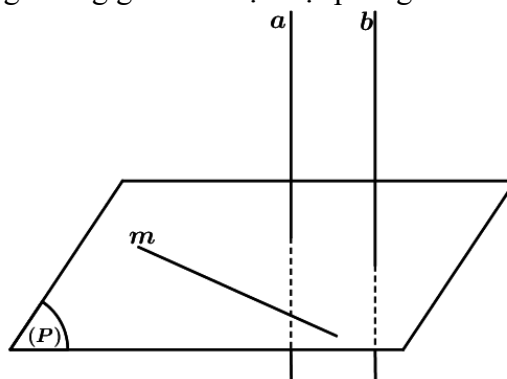
Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



3 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

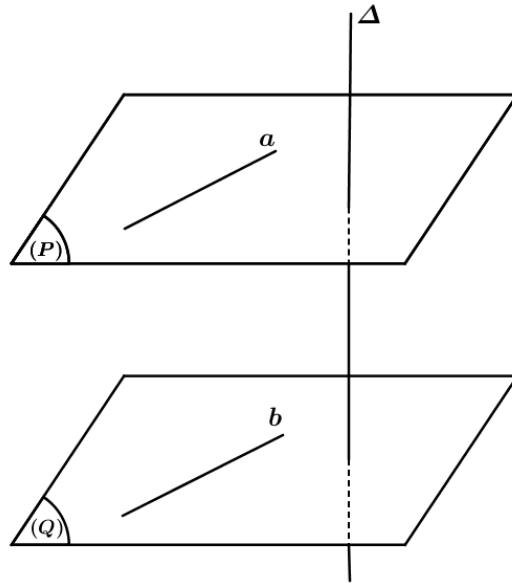
Chú ý 1:

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P) .
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



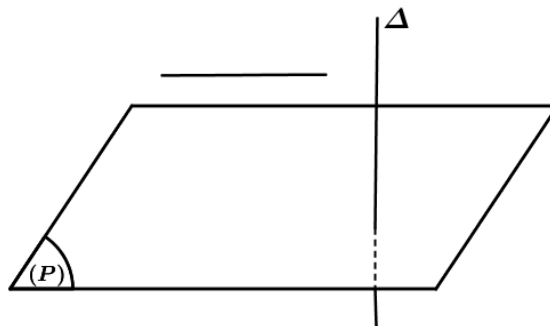
Chú ý 2:

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P) .
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Chú ý 3:

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P) .
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P) .



Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

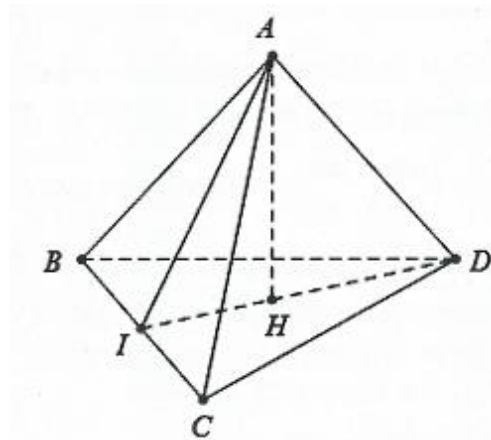
- Đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .
- Đường thẳng d song song với đường thẳng a mà a vuông góc với (P) .

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC . Điểm I là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải



a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác cân nên tại A và D ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao). Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (BCD)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD .

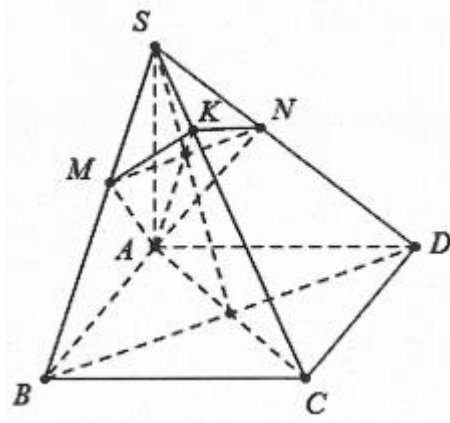
a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$.

d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$. Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$. Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \parallel BD$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

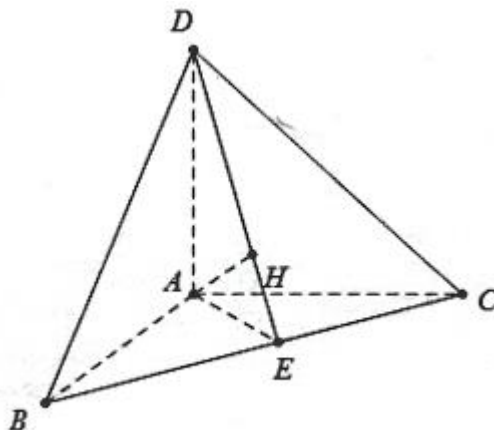
Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD .

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

✍ **Lời giải**



a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH \perp (BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$.

Mặt khác $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH \perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD .

b) Gọi $E = DH \cap BC$, do $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AE$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường cao AE ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB = x$; $AC = y$ và $AD = z$. Ta có: $\begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ BD = \sqrt{x^2 + z^2} \\ CD = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$

Khi đó $\cos B = \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2 \cdot BC \cdot BD} = \frac{x^2}{BC \cdot BD} > 0 \Rightarrow \angle CBD < 90^\circ$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \angle BDC < 90^\circ \\ \angle BCD < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.

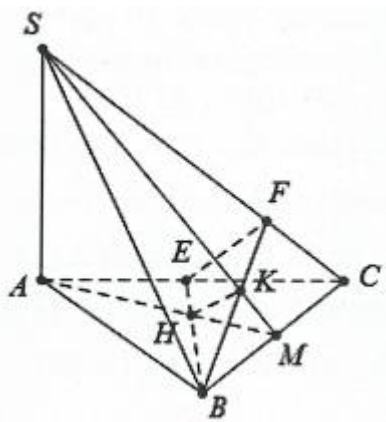
Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC \perp (BHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Giả sử $AH \perp BC$ tại M . Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M .

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$

Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$. Mặt khác $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.

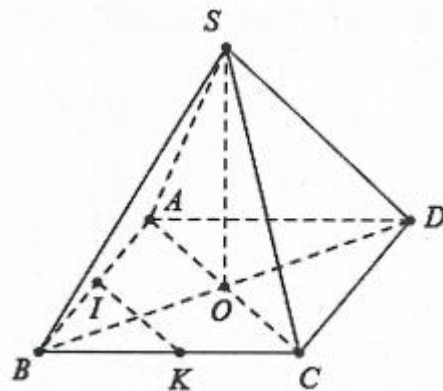
Do đó $HK \perp (SBC)$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$

Lời giải



a) Do $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S có trung tuyến SO đồng thời là đường cao
Suy ra $SO \perp AC$. Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$.

Suy ra IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên $IK \parallel AC$

Mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$.

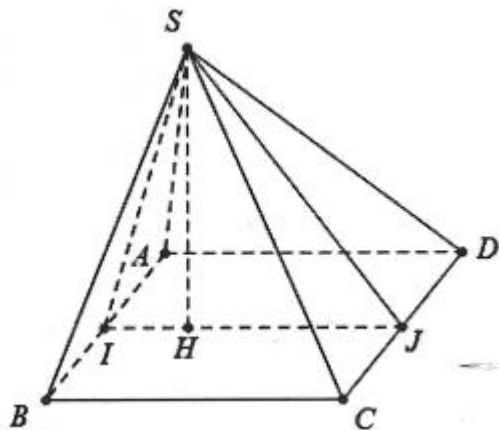
Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ , suy ra tam giác SIJ vuông.

b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$; $SJ \perp (SAB)$.

c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ . Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle SAB$ đều cạnh a nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tứ giác $IBCI$ là hình chữ nhật

Suy ra $IJ = BC = a$.

$\triangle SCD$ là tam giác vuông cân đỉnh $S \Rightarrow SJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \triangle SIJ$ vuông tại S .

b) Do $\triangle SCD$ cân tại S nên $SJ \perp CD$ và do $AB \parallel CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

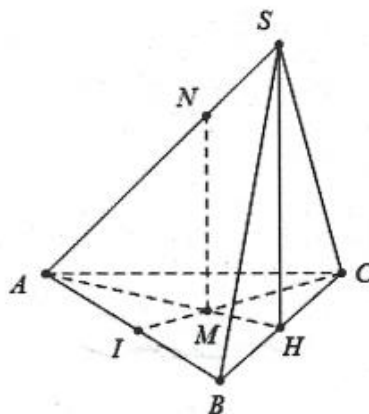
c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$. Chứng minh $MN \perp (ABC)$.

Lời giải



Do điểm M thuộc đường trung tuyến CI và $MC = 2MI \Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow M = AH \cap CI$. Ta có: $\frac{NA}{NS} = \frac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \parallel SH$.

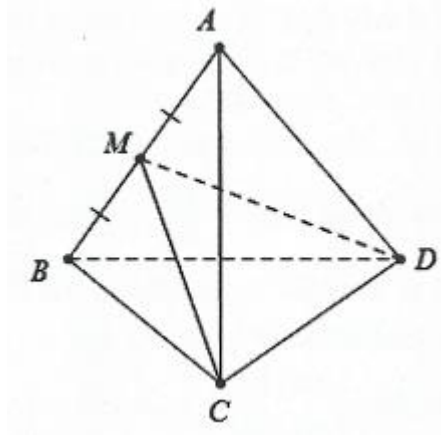
Mặt khác: $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.

Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b , ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.

Ví dụ 8: Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB .

Tứ diện $ABCD$ đều nên $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ là các tam giác đều $\Rightarrow \begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$

Do đó $AB \perp CD$.

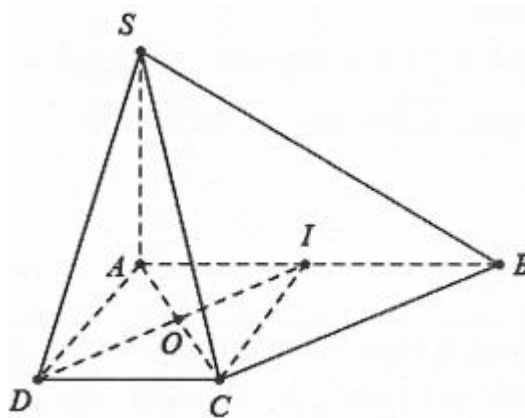
Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$.

Ví dụ 9: Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD = CD = \frac{AB}{2}$.

a) Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải



a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$.

Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a .

Do $CI \perp AB$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC.$$

b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle SAD, \triangle SAB$ vuông tại S .

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \text{ nên } \triangle SCD \text{ vuông tại } D.$$

Xét $\triangle ACD$ có trung tuyến $CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \triangle SCB$ vuông tại C .

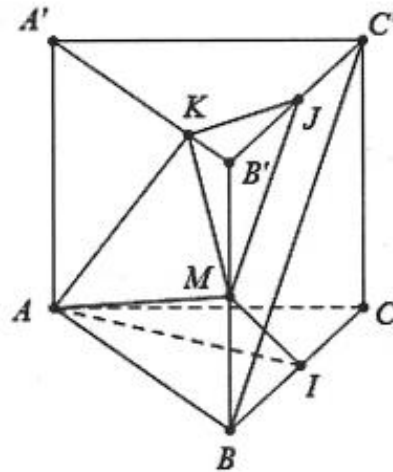
Ví dụ 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng: $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải



a) Do $\triangle ABC$ là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.

b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI \parallel B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

$$\text{c) Ta có: } \tan KMB' = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}; \tan AMB = \frac{AB}{BM} = 2$$

Suy ra $\tan KMB' = \cot AMB \Rightarrow KMB' + AMB = 90^\circ$.

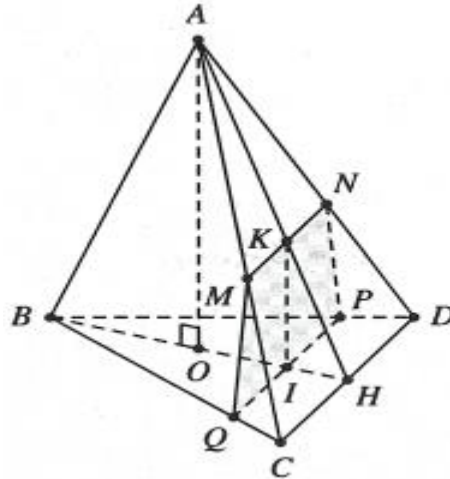
Do đó $AMK = 90^\circ \Rightarrow AM \perp MK$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \parallel BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ. \text{ Suy ra } AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ.$$

Giả sử thiết diện là một phần của mặt phẳng (P) và $(P) \perp d$. Khi đó ta tìm mặt trung gian (α) để thấy và $(\alpha) \perp d \rightarrow (\alpha) \parallel (P)$ và quy về thiết diện có yếu tố song song đã biết.

Ví dụ 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $\triangle BCD$ đều, gọi BH là đường cao của $\triangle BCD$, O là trung điểm của BH và $AO \perp (BCD)$, $AO = BH = 2a$, trên OH lấy điểm I sao cho $BI = x$ ($a < x < 2a$), mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc OH . Dựng và tính diện tích thiết diện của tứ diện tạo bởi (α) .

Lời giải



Vì $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp OH$

Qua I kẻ $IK \parallel AH$ ($K \in AH$).

Tam giác BCD đều $\Rightarrow BH \perp CD$, qua K kẻ đường thẳng d song song với đường thẳng CD cắt SC, SD lần lượt tại M, N .

Qua I kẻ đường thẳng Δ song song với đường thẳng CD cắt BC, BD lần lượt tại Q, P .

Suy ra mặt phẳng (α) cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} IK \cdot (MN + PQ)$.

Tam giác BCD có: $\frac{PQ}{CD} = \frac{BI}{BH} \Rightarrow PQ = \frac{x}{2a} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ACD có: $\frac{MN}{CD} = \frac{AK}{AH} = \frac{OI}{OH} \Rightarrow MN = \frac{OI \cdot CD}{OH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(x - a)$.

Tam giác AHO có: $\frac{IK}{AO} = \frac{IH}{OH} \Rightarrow IK = \frac{IH \cdot AO}{OH} = 2(2a - x)$.

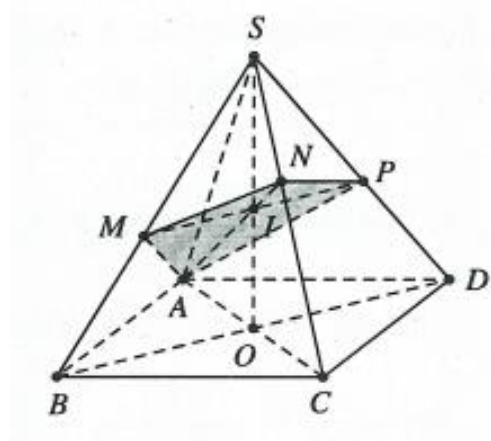
Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2(2a - x) \left(\frac{2x\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}(x - a) \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2a - x)(3x - 2a).$$

Ví dụ 12: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , $SO \perp (ABCD)$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC . Xác định và tính diện tích thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải



Kẻ $AN \perp SC (N \in SC)$ và $AN \cap SO = I$

Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$, qua I kẻ đường thẳng d song song với BD cắt SB, SC lần lượt tại $M, P \Rightarrow mp(P) \equiv (AMNP)$.

Suy ra $mp(P)$ cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $AMNP$.

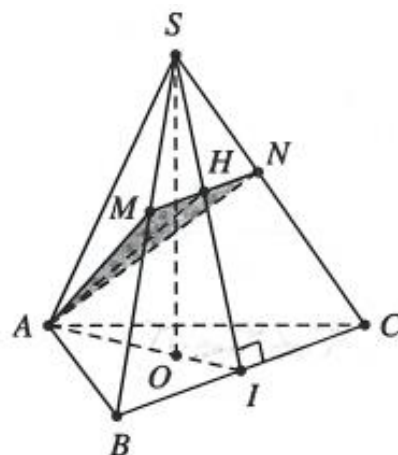
Tam giác SAO có $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = a\sqrt{2} = AC \Rightarrow$ Tam giác SAC đều $\Rightarrow N$ là trung điểm của $SC \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác $SAC \Rightarrow \frac{MP}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow MP = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy diện tích tứ giác $AMNP$ là $S_{AMNP} = \frac{1}{2} MP \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi

I là trung điểm của BC , (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SI . Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

Lời giải



Gọi O là tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với SI tại H .

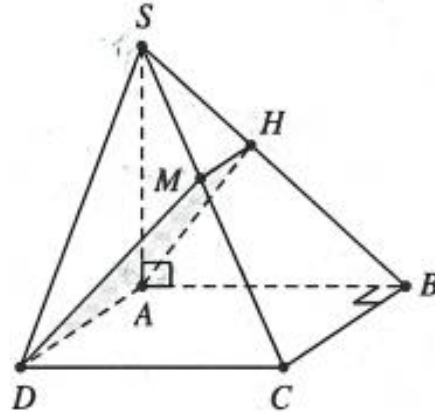
Ta có $SI \perp BC \Rightarrow BC \parallel mp(\alpha)$, qua H kẻ đường thẳng d song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại $M, N \Rightarrow mp(\alpha)$ cắt khối chóp theo thiết diện là tam giác cân AMN .

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Kẻ AH vuông góc với SB .

a) Chứng minh $\frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SB cắt SC tại M . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) và tính thiết diện đó.

Lời giải



a) Tam giác SAB vuông tại A , có $AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác SAH vuông tại H có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SH}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$.

b) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow BC \parallel mp(P)$.

Kẻ HK song song với BC ($M \in SC$) $\Rightarrow mp(P)$ cắt khối chóp đã cho theo thiết diện là tứ giác $AHMD$.

Dễ thấy $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp MH$ và $MH \parallel AD \Rightarrow AHMD$ là hình thang vuông.

Lại có $\triangle SHM \sim \triangle SBC \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{MH}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MH = \frac{2}{3}BC = \frac{2a}{3}$.

Diện tích hình thang vuông $AHMD$ là $S = \frac{1}{2}AH(HM + AD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \left(\frac{2a}{3} + a \right) = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}$.

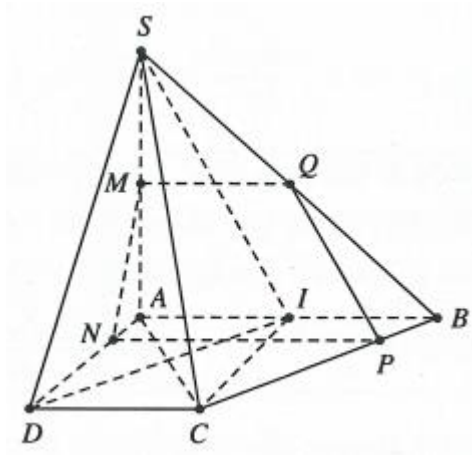
Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D . Cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAC)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) . Tính diện tích thiết diện ấy.

c) Mặt phẳng (β) đi qua trung điểm M của SA và $N \in AD$, $AN = x$ ($0 < x < a$), vuông góc với (SAD) . Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (β) theo a và x .

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow IC = \frac{1}{2} AB$

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BC$ mà $SA \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBC) \Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

b) Vì $ADCI$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp DI$ nên thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác SDI .

Tam giác SDI có $SD = SI = DI = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle SDI} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

c) Dễ thấy $AB \parallel CD$ và $AB \perp mp(SAD)$.

Qua M, N lần lượt kẻ đường thẳng d_1, d_2 song song với AB và cắt SB, BC tại P, Q suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.

Do đó, $MNPQ$ là thiết diện cắt bởi mặt phẳng (β) và hình chóp $S.ABCD$.

Tam giác AMN vuông tại A có: $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$.

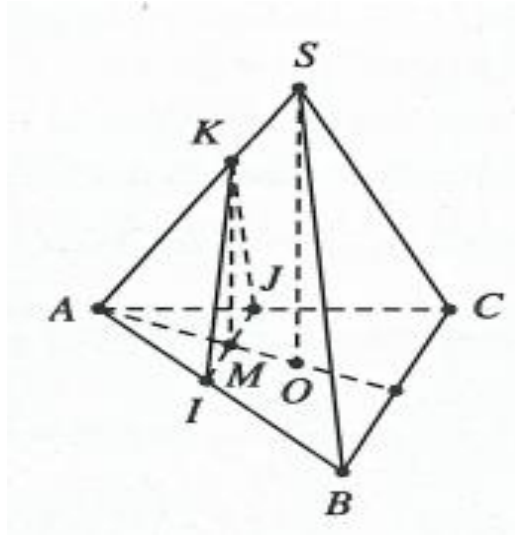
Vì $MQ \parallel AB \Rightarrow \frac{MQ}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ = \frac{AB}{2} = a$;

$NP \parallel AB \Rightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{DN}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow NP = 2(a-x)$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là $S = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot (MQ + NP) = \frac{3a-2x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Ví dụ 16: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a tâm O và $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO ($M \neq A; M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO . Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$;

Kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác KIJ .

Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} IJ \cdot MK$.

Trong tam giác ABC ta có: $\frac{IJ}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO ta có: $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$

Suy ra $MK = \frac{AM \cdot SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$. Vậy $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x\sqrt{3}}{3} \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2$.

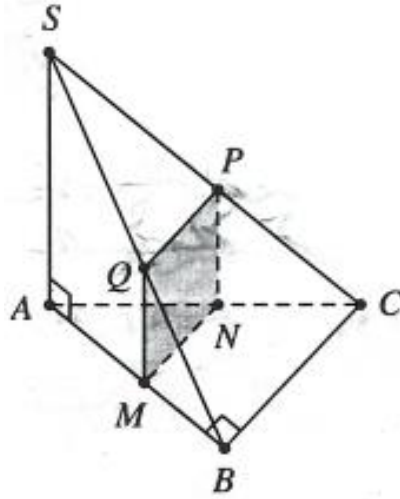
Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$ và $AB = BC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

. Điểm $M \in AB, AM = x (0 < x < a)$, mặt phẳng (α) đi qua M vuông góc với AB .

a) Vẽ thiết diện được tạo bởi hình chóp với mặt phẳng (α) .

b) Tính thiết diện của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại Q .

Vì $AB \perp BC \Rightarrow BC \parallel mp(\alpha)$ kẻ MN song song với BC ($N \in BC$).

Vì $SA \perp AB \Rightarrow SA \parallel mp(\alpha)$ kẻ NP song song với SA ($P \in SC$).

Suy ra mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow S_{MNPQ} = MN \cdot MQ$

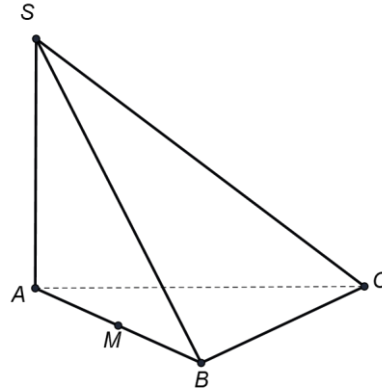
$$\triangle BMQ \sim \triangle BAS \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{AB} = 1 - \frac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x).$$

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = x \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - x^2).$$

$$\text{Mà } x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \text{ Vậy } S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB và cắt AC , SC , SB lần lượt tại N , P , Q . Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

Lời giải

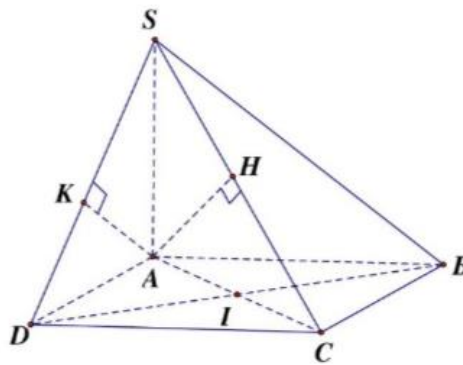


Vì $SA \perp (ABC)$ và $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ \text{Ta có } BC \perp SA \\ SA, AB \subset (SAB); SA \cap AB = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC , SD . Chứng minh rằng $AK \perp (SCD)$?

Lời giải

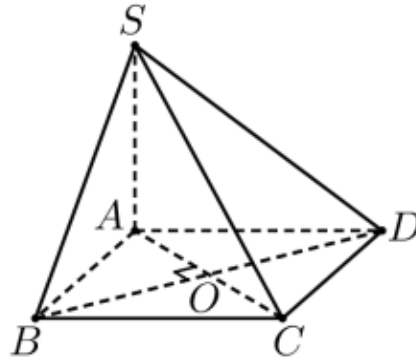


$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{array} \right. \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK.$$

Lại có $SD \perp AK$ suy ra $AK \perp (SCD)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Chứng minh rằng $BD \perp SC$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow BD \perp SA \quad (1)$

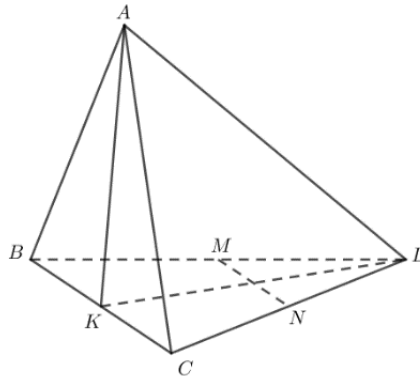
Ta lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC \quad (2)$

Từ (1), (2) và $SA \cap AC = \{A\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BC = BD = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, CD . Chứng minh rằng $MN \perp AD$

Lời giải



Gọi K là trung điểm của BC

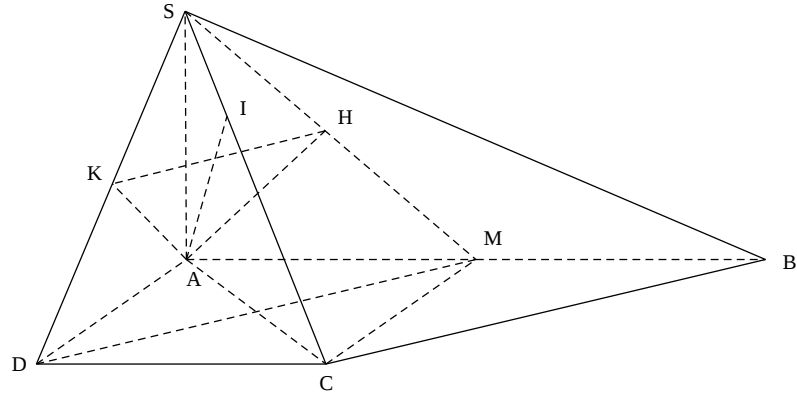
Vì $\triangle ABC$ và $\triangle DCB$ là tam giác đều nên $\begin{cases} AK \perp BC \\ DK \perp BC \\ DK, AK \subset (AKD) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AKD)$

Ta có M, N lần lượt là trung điểm của BD, CD nên $MN \parallel BC$

Mặt khác $\begin{cases} MN \parallel BC \\ BC \perp (AKD) \end{cases} \Rightarrow (AKD) \perp MN \Rightarrow MN \perp AD$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AB và H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SM, SC, SD . Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải



Ta có hình chóp $S.AMCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (AMCD)$ nên $\Delta SAM = \Delta SAD$.

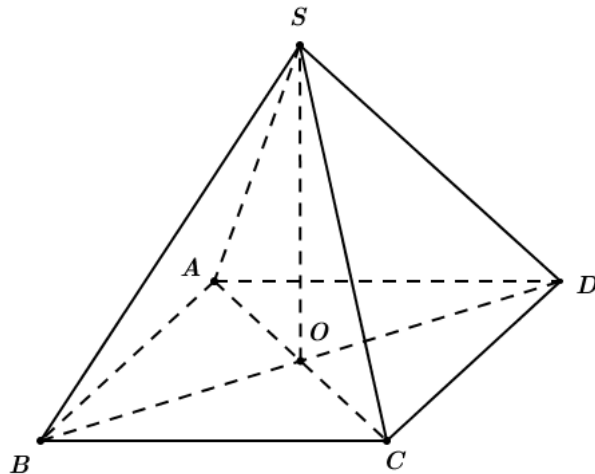
Do AH và AK lần lượt là hai đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh huyền của hai tam giác vuông nói trên nên $AH = AK$, từ đó suy ra $SH = SK \Rightarrow HK \parallel MD$ (1).

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} MD \perp AC \\ MD \perp SA \\ SA \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAC) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} HK \perp (SAC) \\ AI \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp AI.$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$?

Lời giải



Theo giả thiết ta có: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau do đó: $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại A

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow O$ là trung điểm của AC

$\Rightarrow SO$ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của $\Delta SAC \Rightarrow SO \perp AC$ (1)

Tương tự SO vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của $\Delta SBD \Rightarrow SO \perp BD$ (2)

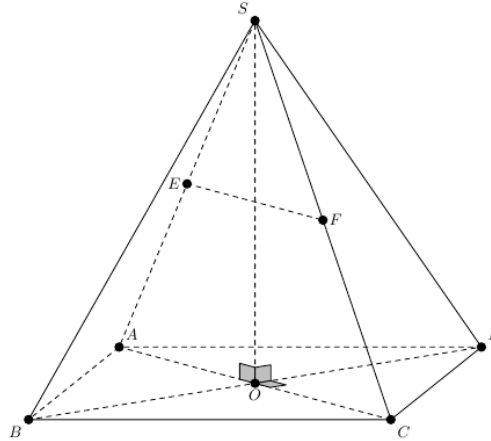
Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} SO \perp AC \subset (ABCD) \\ SO \perp BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi E , F lần lượt là trung điểm của SA , SC . Chứng minh rằng $EF \perp SD$.

Lời giải



a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

Từ giả thiết $SA = SC$, $SB = SD$ suy ra $\triangle SAC, \triangle SBD$ là các tam giác cân tại đỉnh S .

Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC \cap BD = \{O\} \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi E , F lần lượt là trung điểm của SA , SC . Chứng minh rằng $EF \perp SD$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp SO \\ AC \perp BD \\ SO \cap BD = \{O\} \\ SO, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

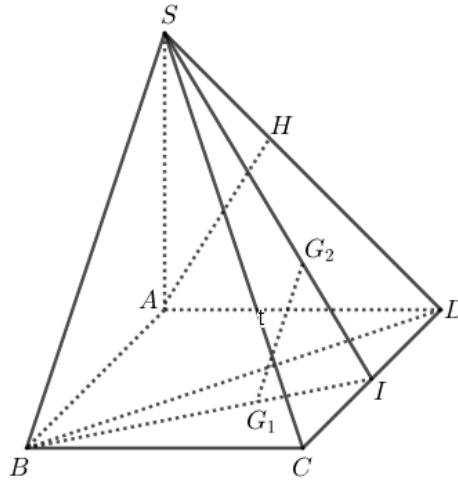
Mà $SD \subset (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$ (1).

Mặt khác $EF \parallel AC$ (2) do EF là đường trung bình của $\triangle SAC$.

Từ và suy ra $EF \perp SD$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD . Chứng minh: $AH \perp SC$.

Lời giải



Trước hết ta chứng minh $CD \perp (SAD)$. Do $ABCD$ là hình vuông nên $CD \perp AD$ (1)

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp CD \quad (2)$$

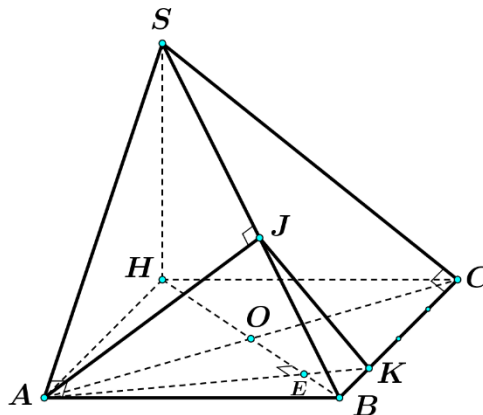
Từ (1) và (2) ta suy ra: $CD \perp (SAD)$, mà $AH \subset (SAD)$ nên $CD \perp AH$ (3)

Mặt khác theo giả thiết ta có: $SD \perp AH$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra: $AH \perp (SCD)$, mà $SC \subset (SCD)$ nên $AH \perp SC$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết $AB = a, BC = 2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{5}, SAB = SCB = 90^\circ$. (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (α)

Lời giải



Dựng hình chữ nhật $ABCH$ thì $SH \perp (ABCH)$, do $SAB = SCB = 90^\circ$

Kẻ AK vuông góc với HB tại E và $K \in BC$ thì $AK \perp (SHB) \Rightarrow AK \perp SB$

Trong mp(SAB), kẻ $AJ \perp SB$ thì $SB \perp (JAK)$.

Suy ra ΔJAK chính là thiết diện cần tìm

$$\Delta SAB \text{ vuông tại } A \text{ có } \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow AJ = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \text{ và } JB = \frac{AB^2}{SB} = \frac{AB^2}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Tam giác } ABH \text{ vuông tại } A \text{ có } BE.BH = AB^2 \Rightarrow \frac{BE}{BH} = \frac{AB^2}{BH^2} = \frac{a^2}{5a^2} = \frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{EH} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BK}{AH} = \frac{1}{4} \Rightarrow BK = \frac{1}{4}AH = \frac{a}{2}$$

$$\text{Tam giác } ABK \text{ vuông tại } B \text{ có } AK^2 = AB^2 + BK^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

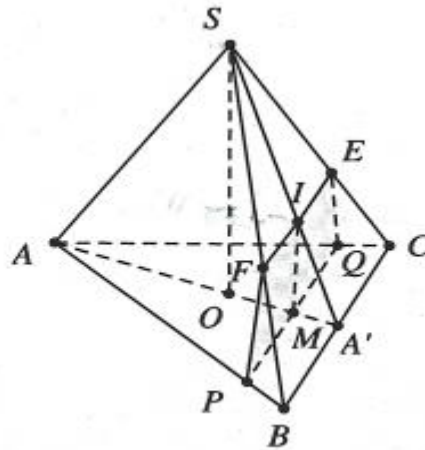
$$\text{Tam giác } SBC \text{ vuông tại } C \text{ có } \cos JBK = \frac{BC}{SB} = \frac{BC}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow JK = \sqrt{BJ^2 + BK^2 - 2BJ.BK.\cos JBK} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó thiết diện } AKJ \text{ có } AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}, AJ = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, JK = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ nên có } S_{AKJ} = \frac{a^2\sqrt{6}}{24}.$$

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tâm O , đường cao AA' ; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' ($M \neq A'$; $M \neq O$). Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA' . Đặt $AM = x$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



Dựng $MI \parallel SO$ ($I \in SA'$), qua M dựng đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P và Q .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MI \perp AA' \\ PQ \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (PQI)$$

Qua I dựng đường thẳng song song với BC cắt các cạnh SB, SC tại F, E .

Thiết diện là hình thang $PQEF$.

Lại có: $\frac{PQ}{BC} = \frac{AM}{AA'} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow PQ = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

$$OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$\frac{IM}{SO} = \frac{A'M}{A'O} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow IM = \sqrt{3}(a\sqrt{3} - 2x), \frac{EF}{BC} = \frac{SI}{SA'} = \frac{OM}{OA'} = \frac{x - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

Do đó $EF = \frac{1}{\sqrt{3}}(6x - 2a\sqrt{3})$, diện tích thiết diện là:

$$S = \frac{PQ + EF}{2} MI = (a\sqrt{3} - 2x)(8x - 2a\sqrt{3}) = -2(8x^2 - 6\sqrt{3}ax + 3a^2).$$

Câu 1: Cho điểm M và mặt phẳng (α) có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

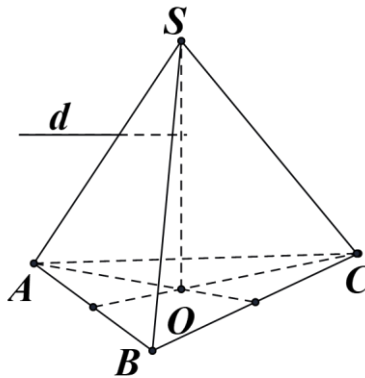
Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 2: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi O là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đường thẳng $d \perp SO$ ($d \not\subset (ABC)$). Khi đó

- A. $d \parallel (ABC)$. B. $d \perp (SBC)$. C. $SO \parallel AC$. D. $SA \parallel OC$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} SO \perp (ABC) \\ d \perp SO \end{cases} \Rightarrow d \parallel (ABC).$

Câu 3: Cho điểm M và đường thẳng a có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

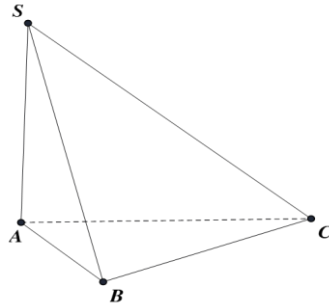
Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC) . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $SA \perp SB$. B. $SA \perp SC$. C. $SA \perp AB$. D. $SB \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp AB.$$

Câu 5: Cho tam giác ABC có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng AB ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng cho trước.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

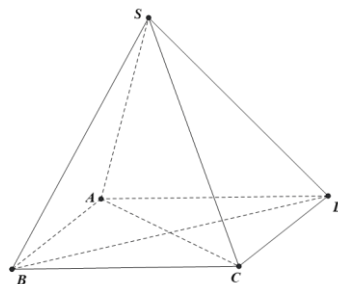
Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SB \perp BC$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SB \perp (ABCD)$. C. $BC \perp (SAC)$. D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



$$\left. \begin{array}{l} BC \perp SB, BC \perp AB \\ \text{Ta có: } SB \cap AB = \{B\} \\ SB, AB \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Câu 8: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lý ta có: **D** sai vì đường thẳng b có thể nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$

B. $SO \perp (ABCD)$

C. $AB \perp (SBC)$

D. $AC \perp (SBC)$

Lời giải

Chọn B

Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau suy ra $SO \perp (ABCD)$

Câu 10: Cho hình chóp tam giác $SABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây **ĐÚNG**?

A. $BC \perp (SBC)$.

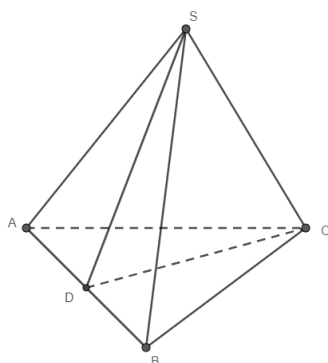
B. $SB \perp AB$.

C. $SA \perp (ABC)$.

D. $AB \perp SC$.

Lời giải

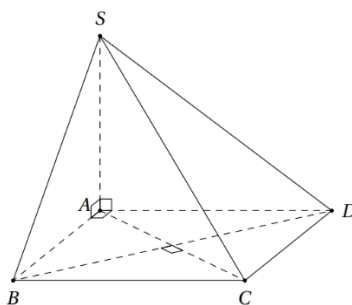
Chọn D



Gọi D là trung điểm của AB , vì tam giác SAB cân tại S và tam giác ABC cân tại C nên suy

$$\text{ra } \begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp SC.$$

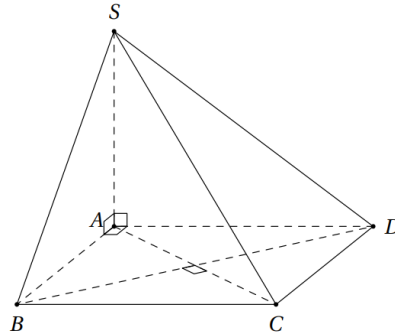
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $AC \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAD)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ và $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$.

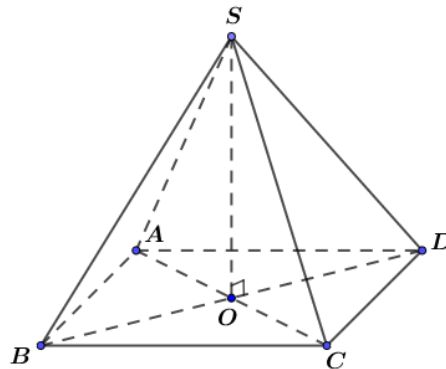
Vậy $BD \perp (SAC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) . B. (SAD) . C. (SCD) . D. (SBD) .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO, SO \subset (SBD)$.

Mặt khác: $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD, BD \subset (SBD)$.

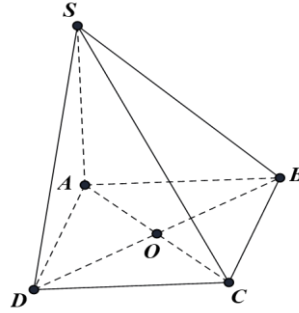
Suy ra: $SO \cap BD = O \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $BC \perp (SAB)$ B. $CD \perp (SAD)$ C. $BD \perp (SAC)$. D. $AC \perp (SBD)$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mặt khác: $CD \perp DA, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Từ đó suy ra $BD \perp SO, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $SA \perp SB$.

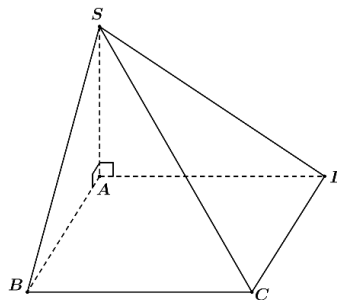
B. $SA \perp CD$.

C. $AB \perp AC$.

D. $AC \perp BD$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp CD$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $BA \perp (SAC)$.

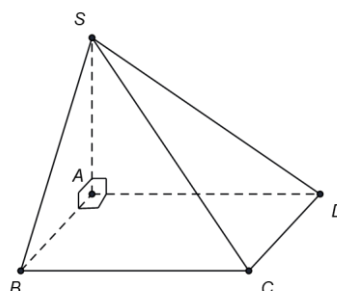
B. $BA \perp (SBC)$.

C. $BA \perp (SAD)$.

D. $BA \perp (SCD)$.

Lời giải

Chọn C



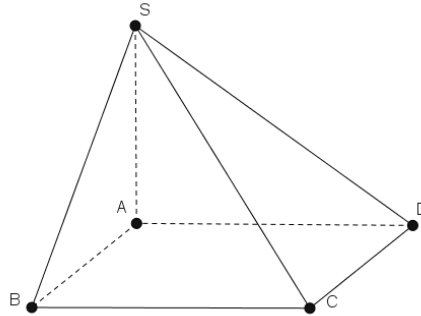
Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ DA \perp AB \end{cases} \rightarrow BA \perp (SAD).$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AB \perp (SAD).$ B. $AB \perp (SAC).$ C. $AB \perp (SBC).$ D. $AB \perp (SCD).$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AB \perp AD$ và $AB \perp SA$ ($SA \perp (ABCD)$).

Vậy $AB \perp (SAD).$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BD \perp SC.$ B. $SC \perp SB.$ C. $SD \perp SB.$ D. $CD \perp SD.$

Lời giải

Chọn D

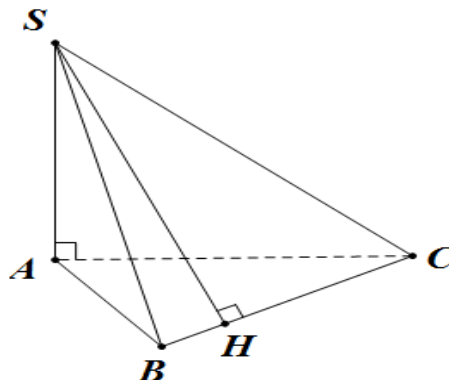
Ta có: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. $BC \perp SC.$ B. $BC \perp AC.$ C. $BC \perp AB.$ D. $BC \perp AH.$

Lời giải

Chọn D



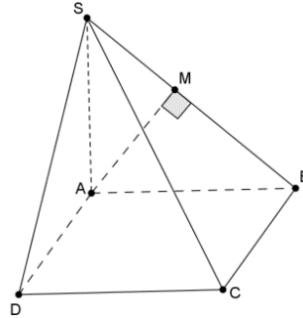
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH.$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM \perp SB$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $AM \perp (SBD)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $BC \perp (SAD)$. D. $AM \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn B



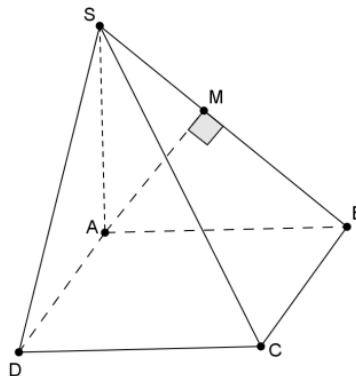
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. M là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $AM \perp (SBD)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $BC \perp (SAD)$. D. $AM \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn B



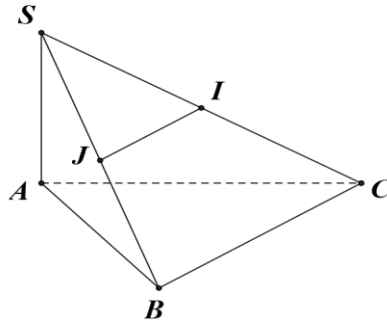
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B . Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của SC ; SB . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $AB \perp (SBC)$. B. $IJ \perp (SAC)$.
C. $IJ \perp (SAB)$. D. Tam giác SCB vuông ở C .

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (Do } \triangle ABC \text{ vuông)} \\ SA \perp BC \text{ (Do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Mà $IJ \parallel BC$ (Vì IJ là đường trung bình của $\triangle SBC$).

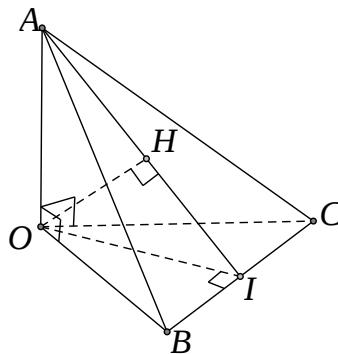
Suy ra: $IJ \perp (SAB).$

Câu 22: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $BC \perp (AHO).$ B. $OA \perp (OBC).$ C. $AH \perp BC.$ D. $AH \perp (OBC).$

Lời giải

Chọn D



Theo đề bài ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \text{ (1).}$ Vậy B đúng.

Ta lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC \text{ (2).}$ Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AHO) \Rightarrow AH \perp BC.$

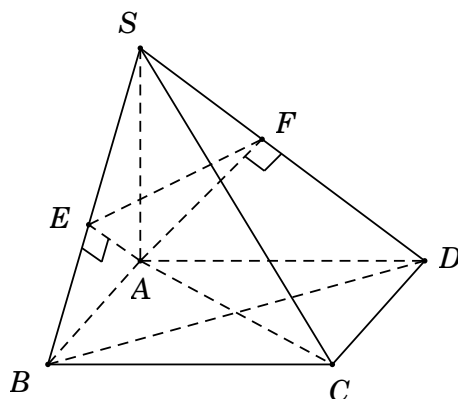
Giả sử $AH \perp (OBC)$ mà $OA \perp (OBC)$ suy ra $A; H; O$ thẳng hàng (vô lý)

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $SC \perp (AFB).$ B. $SC \perp (AEF).$ C. $SC \perp (AEC).$ D. $SC \perp (AED).$

Lời giải

Chọn B



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $SA \perp SB$.

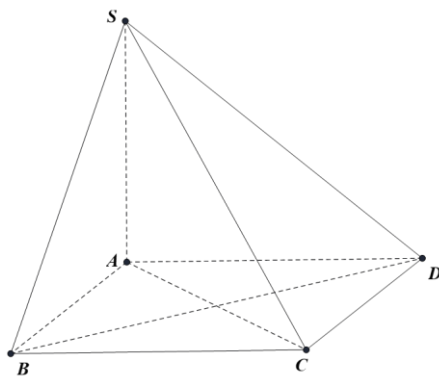
B. $SA \perp SC$.

C. $SA \perp AC$.

D. $SB \perp SD$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp AC$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $SB \perp (ABCD)$.

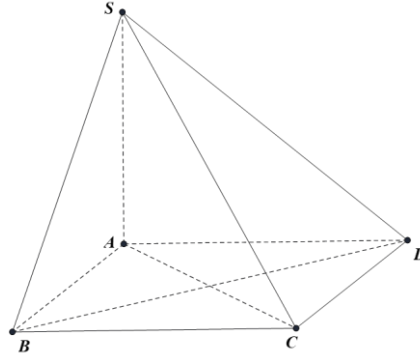
B. $SC \perp (ABCD)$.

C. $BC \perp (SAC)$.

D. $BD \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BD \perp AC$ (do $ABCD$ là hình vuông), $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$. Suy ra

$$\left. \begin{array}{l} BD \perp AC, BD \perp SA \\ SA \cap AC = \{A\} \\ SA, AC \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Câu 26: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
- B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- C. Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng Δ thì cũng vuông góc với mặt phẳng (α) .
- D. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

Lời giải

Chọn C

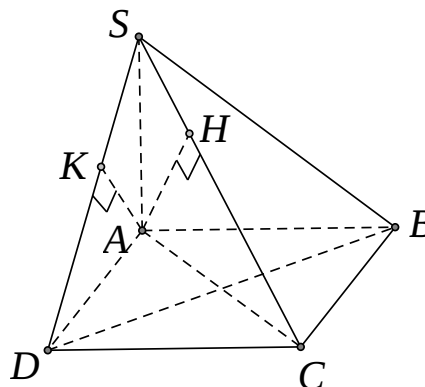
C có thể sai vì: Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng vuông góc với Δ có thể song song với (α) nếu nó nằm trong cùng một mặt phẳng với đường thẳng Δ .

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AH \perp (SCD)$.
- B. $AK \perp (SBD)$.
- C. $SC \perp (AHK)$.
- D. $SD \perp (AHK)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\left. \begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Ta lại có $AK \perp SD$

Suy ra $AK \perp (SCD)$ (*) $\Rightarrow AK \perp SC$ mà $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$ (**) nên C đúng.

Ta có (SBD) và (SCD) phân biệt; cắt nhau và từ (*) suy ra B sai.

Ta có AH và AH phân biệt; cắt nhau và từ (*) suy ra A sai.

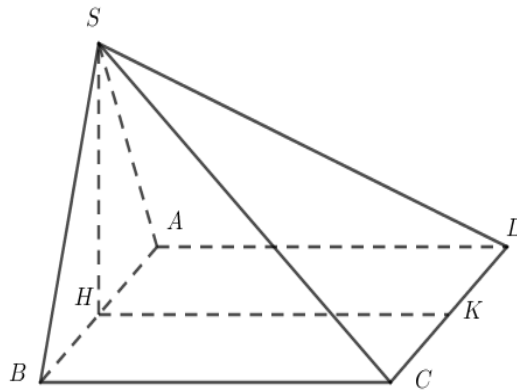
Ta có SC và SD phân biệt; cắt nhau và từ (**) suy ra D sai.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $BC \perp (SAB)$. B. $SH \perp (ABCD)$. C. $AB \perp (SAD)$. D. $CD \perp (SHK)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có tam giác SAB đều cạnh a nên $SB = AB = a$.

Mặt khác tam giác SBC có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2$.

Suy ra tam giác SBC vuông cân tại B . Hay $BC \perp SB$

Mà $BC \perp AB$. Suy ra $BC \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Từ $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$.

Tam giác SAB đều mà H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Từ và suy ra $SH \perp (ABCD)$. Do đó B đúng.

Tam giác SAB đều nên AB không vuông góc với mặt phẳng (SAD) . Do đó C sai.

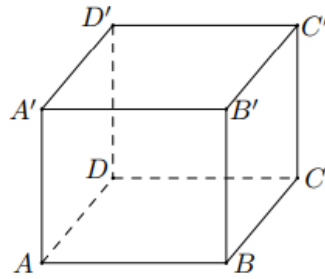
Ta có $\left\{ \begin{matrix} AB \perp HK \\ AB \perp SH \end{matrix} \right. \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp (SHK)$. Do đó D đúng

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $AC' \perp (BB'D'D)$. B. $AC' \perp (ABCD)$. C. $AC' \perp (AA'D'D)$. D. $AC' \perp (A'BD)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC' \quad (1)$

Ta có: $\begin{cases} AD' \perp A'D \text{ (do } ADD'A' \text{ là hv)} \\ D'C' \perp (ADD'A') \Rightarrow D'C' \perp A'D \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (AD'C') \Rightarrow A'D \perp AC' \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow AC' \perp (A'BD)$.

Câu 30: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

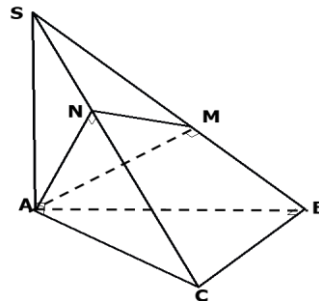
A. $AM \perp SC$.

B. $AM \perp MN$.

C. $SA \perp BC$.

D. $AN \perp SB$.

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Vì $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Vì $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ MN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp MN$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Giả sử $AN \perp SB \Rightarrow AN \perp (SBC) \Rightarrow AN \perp BC$.

Mà $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AC$

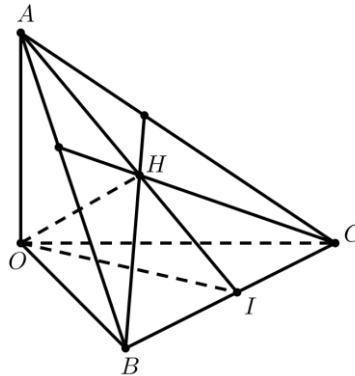
Vậy $AN \perp SB$ là sai.

Câu 31: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp OA$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB$. Vậy phương án A đúng.

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Gọi I là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $AI \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AIO)$, mà $OH \subset (AIO)$ nên $OH \perp BC$ (3)

Tương tự như trên, ta cũng có $OH \perp AC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $OH \perp (ABC)$.

Vậy các phương án B, C đúng.

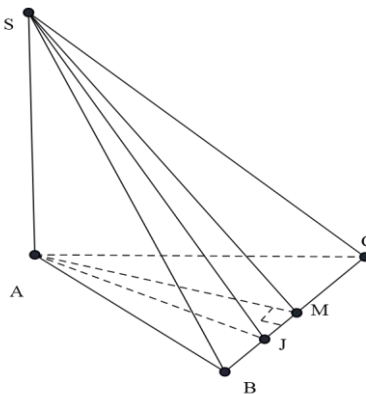
Tam giác AIO vuông tại O , $H \in AI$ và $H \neq I$ nên phương án D sai.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , SA vuông góc với đáy, M là trung điểm của BC , J là trung điểm của BM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAM)$. B. $BC \perp (SAC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. $BC \perp (SAJ)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (1).

ΔABC cân tại $A \Rightarrow AM \perp BC$ (2).

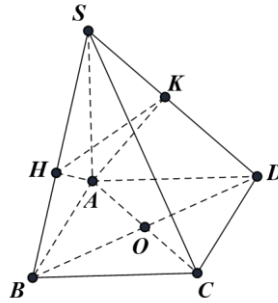
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM)$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Hỏi đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A. (AHD) B. (SBD) . C. (AKB) D. (AHK)

Lời giải

Chọn D



$$CD \perp SA, CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$$

$$AK \perp CD, AK \perp SD \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

Chứng minh tương tự $AH \perp SC$

$$AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$$

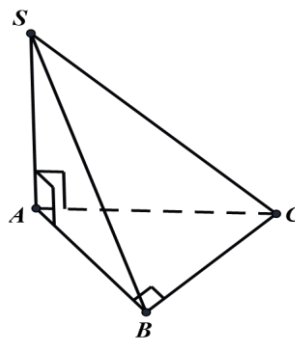
Từ đó suy ra $SC \perp (AHK)$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Hình chóp có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \\ SA \perp BC \end{cases}$ nên các tam giác SAB và tam giác SAC vuông tại A .

Ta cũng có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$ nên tam giác SBC và tam giác ABC vuông tại B .

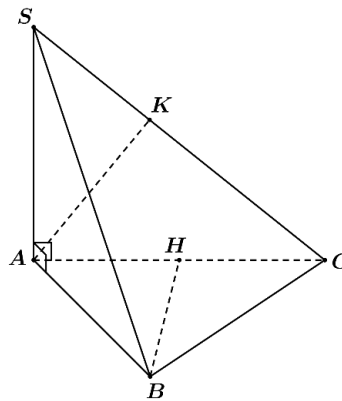
Vậy hình chóp $S.ABC$ có bốn mặt là các tam giác vuông.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy là tam giác đều ABC . Gọi H là trung điểm của AC , K là điểm nằm giữa S và C . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BH \perp AK$. B. $SA \perp BH$. C. $BC \perp AK$. D. $SC \perp BH$.

Lời giải

Chọn C



Vì $\triangle ABC$ đều nên BC không vuông góc với AC

Suy ra BC không vuông góc với (SAC)

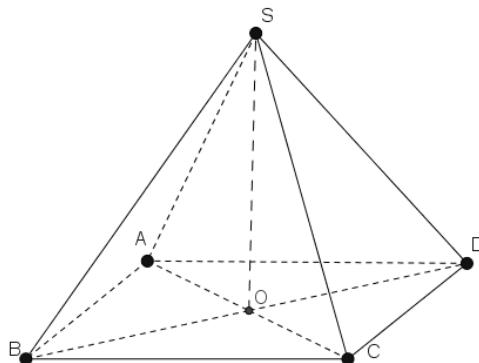
Vậy BC không vuông góc với AK

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SO \perp (ABCD)$. C. $SB \perp (ABCD)$. D. $SC \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn B



Ta có ΔSAC cân tại S ($SA = SC$).

Lại có SO là trung tuyến của ΔSAC nên $SO \perp AC$.

Tương tự $SO \perp BD$.

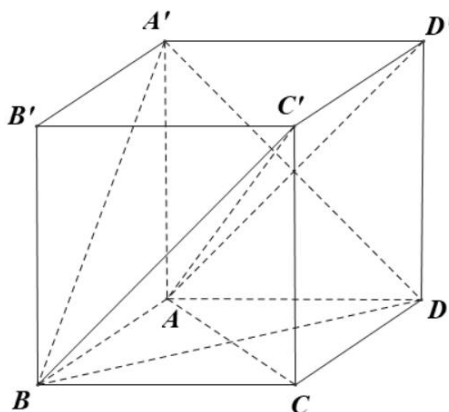
$$\text{Ta có: } \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC \cap BD = O \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$. C. $(A'CD')$. D. $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có

$$\begin{cases} AB \perp AD \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \\ AB \perp AA' \text{ (} AA' \perp (ABCD), AB \subset (ABCD) \text{)} \Rightarrow AB \perp (ADD'A') \\ AA' \cap AD = A \text{ trong } (ADD'A') \end{cases}$$

$$\begin{cases} A'D \perp AD' \text{ (} ADD'A' \text{ là hình vuông)} \\ A'D \perp AB \text{ (} AB \perp (ADD'A'), A'D \subset (ADD'A') \text{)} \Rightarrow A'D \perp (ABC'D') \\ AB \cap AD' = A \text{ trong } (ADD'A') \end{cases}$$

Mà $AC' \subset (ABC'D')$ nên $AD' \perp AC'$ (1)

$$\begin{cases} BD \perp AC \text{ (} ABCD \text{ là hình vuông)} \\ BD \perp AA' \text{ (} AA' \perp (ABCD), AC \subset (ABCD) \text{)} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \\ AC \cap AA' = A \text{ trong } (ACC'A') \end{cases}$$

Mà $AC' \subset (ACC'A')$ nên $BD \perp AC'$ (2)

Từ (1), (2) và $BD \cap A'D = D$ trong $(A'BD)$ nên $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ có đáy ABC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(SAB) \perp (ABC)$.

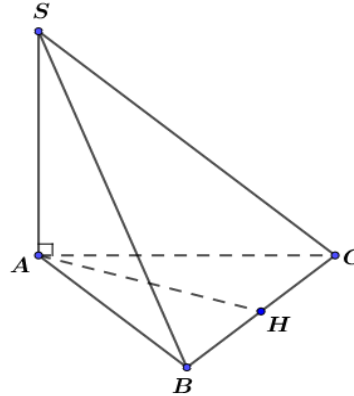
B. Gọi H là trung điểm của BC . Khi đó AHS là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là ACB .

D. $(SAC) \perp (ABC)$.

Lời giải

Chọn C



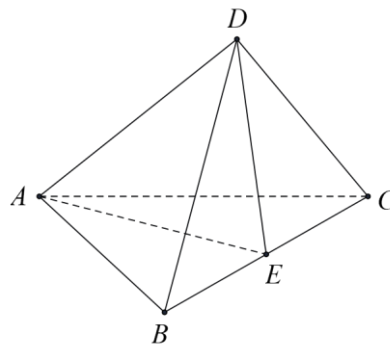
Khẳng định A đúng vì $SA \perp (ABC)$.

Khẳng định B đúng do $BC \perp (SAH)$.

Khẳng định D đúng do $SA \perp (ABC)$.

Khẳng định C sai.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Gọi E là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. $BC \perp AD$.

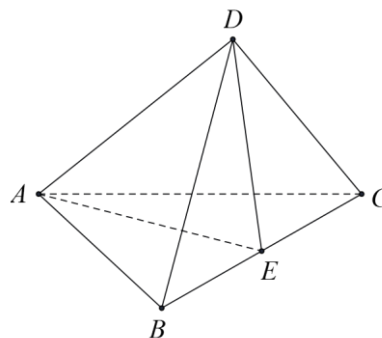
B. $BC \perp AE$.

C. $AB \perp DE$.

D. $BC \perp (ADE)$.

Lời giải

Chọn C



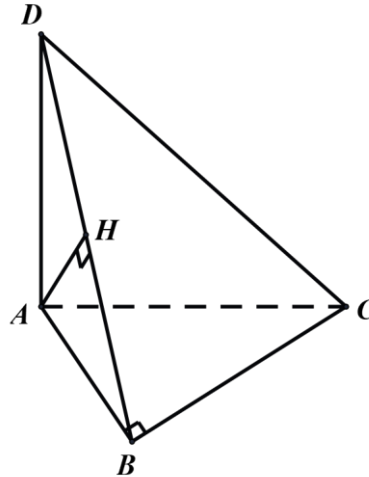
Ta có: $BC \perp AE$ (AE là đường trung tuyến của tam giác ABC cân tại A). (Câu B đúng)

Mặt khác: $BC \perp DE$ (DE là đường trung tuyến của tam giác DBC cân tại D).

Do đó $BC \perp (ADE)$. (Câu D đúng) $\Rightarrow BC \perp AD$. (Câu A đúng)

Vậy câu C là khẳng định sai.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông tại B , AH là đường cao của tam giác DAB . Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $BD \perp AC$.

B. $AB \perp DC$.

C. $AH \perp AC$.

D. $AH \perp DC$.

Lời giải

Chọn D

$DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$, mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AH$

Từ $\left. \begin{array}{l} AH \perp BD \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp DC$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC , J là trung điểm BM . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $BC \perp (SAC)$.

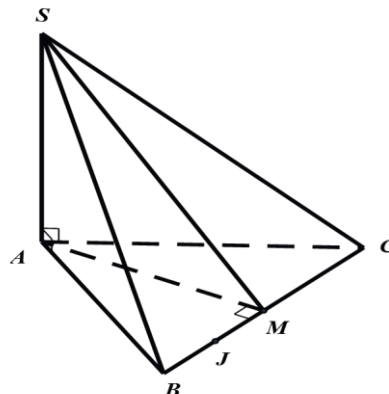
B. $BC \perp (SAM)$.

C. $BC \perp (SAJ)$.

D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Chọn B



Do tam giác ABC cân tại A , M là trung điểm của BC nên $BC \perp AM$

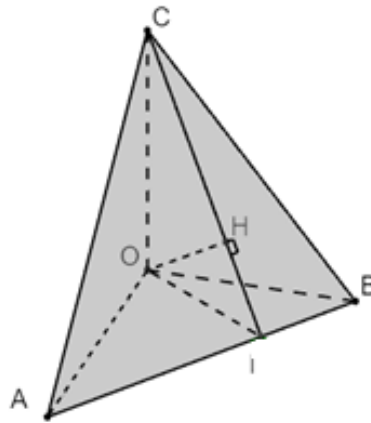
Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AM \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM).$

Câu 42: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**.

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp AO$.

Lời giải

Chọn D



Xét phương án A: Do $\begin{cases} OC \perp OB(gt) \\ OC \perp OA(gt) \end{cases}$ mà $OB \cap OA = O \in (OAB)$.

Nên $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$. Vậy A đúng. Vì thế, loại A.

Xét phương án B và C: Do $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp OC(cmt) \\ CH \cap OC = C \in (COH) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OH$.

Lại vì: $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp OA(OA \perp (COB)) \\ OA \cap AH = A \in (AOH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp OH$

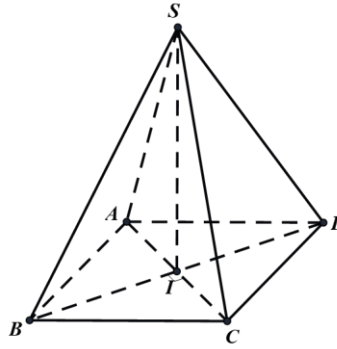
Ngoài ra $\begin{cases} OH \perp CB \\ OH \perp AB \\ CB \cap AB = B \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC).$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm I , $SA = SB = SC = SD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $SI \perp (ABCD)$. B. $AD \perp CD$. C. $BC \perp AC$. D. $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác SAD cân tại S , có I là trung điểm AD nên $SI \perp AD$

Tương tự với tam giác SBC , ta có $SI \perp BC$

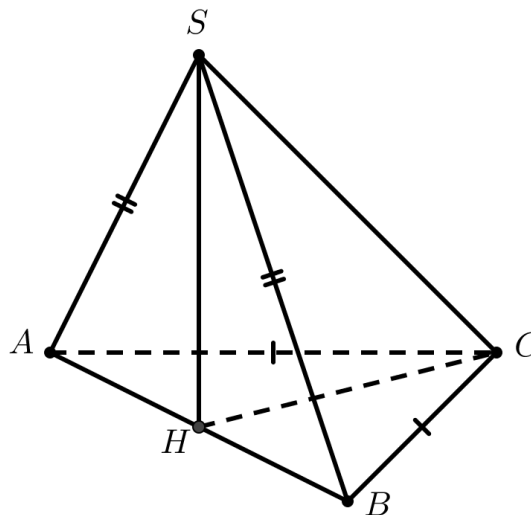
Từ và suy ra $SI \perp (ABCD)$.

Câu 44: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAC)$. B. $SB \perp AB$. C. $SA \perp (ABC)$. D. $AB \perp SC$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Gọi H là trung điểm của AB . Vì $SA = SB$ và $AC = CB$ nên $SH \perp AB$ và $CH \perp AB$. Suy ra $AB \perp (SHC)$. Do đó $AB \perp SC$.

Cách 2: Vì $SA = SB$ và $AC = CB$ nên S và C cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của AB . Do đó $AB \perp SC$.

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $DC \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $BC \perp AD$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD \subset (ADH) \\ BC \perp (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$.

Câu 46: Cho tứ diện $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại K .

Khẳng định 1 : $AK \perp SC$

Khẳng định 2 : $AM \perp SC$

Khẳng định 3 : $BD \perp SC$

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên ?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $SC \perp BD \Rightarrow AC \perp BD$. Vậy khẳng định 3 sai.

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$\begin{cases} AN \perp SD \\ AN \perp CD \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$$

Tương tự $AM \perp SC$.

Khi đó : $SC \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AM \end{cases}$. Khẳng định 1 và 2 đúng.

Vậy có 2 khẳng định đúng.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác đều, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $CM \perp SB$.

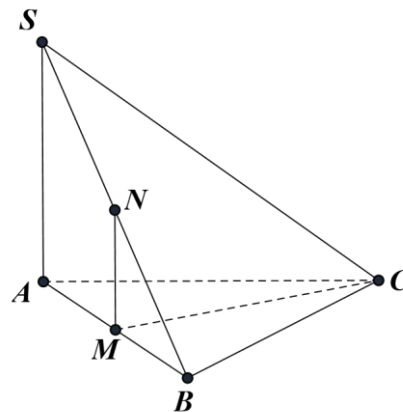
B. $NC \perp AB$.

C. $AN \perp BC$.

D. $MN \perp MC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM$ (1)

$\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AB \perp CM$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $CM \perp (SAB)$. Tức $CM \perp SB$, $CM \perp MN$.

Lại có: $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AB$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $AB \perp (CMN)$. Tức $AB \perp NC$.

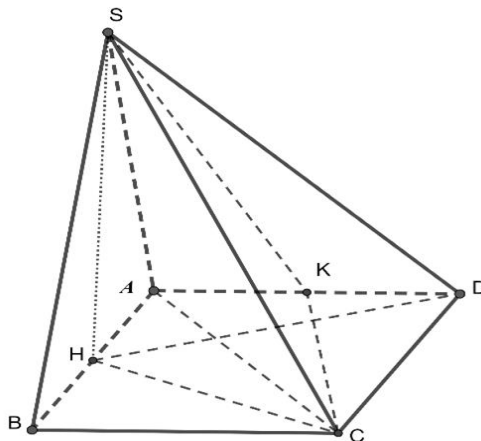
Giả sử $AN \perp BC$. Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow AS \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$, dẫn đến $BC \perp AB$, vô lý.
Do đó điều giả sử là sai.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, mặt bên SAB là tam giác đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD . Khẳng định nào sau đây **Sai**?

- A. $CK \perp (SHD)$. B. $CK \perp SD$. C. $AC \perp SK$. D. $CK \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn C



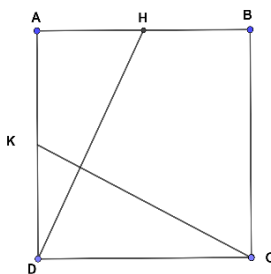
Ta có H là trung điểm AB và tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$ (1)

Mặt khác: $SH = a\sqrt{3}; SC = 2a\sqrt{2}, HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$

Dễ thấy: $SH^2 + HC^2 = 3a^2 + 5a^2 = 8a^2 = (2a\sqrt{2})^2 = SC^2 \Rightarrow \triangle SHC$ vuông tại $H \Rightarrow SH \perp HC$
(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Khi đó: $AC \perp SH, AC \perp HK \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$ (Phương án C đúng)



Mà $AHD + ADH = 90^\circ \Rightarrow DKC + ADH = 90^\circ \Rightarrow CK \perp HD$

Lại có: $SH \perp CK \Rightarrow CK \perp (SHD)$

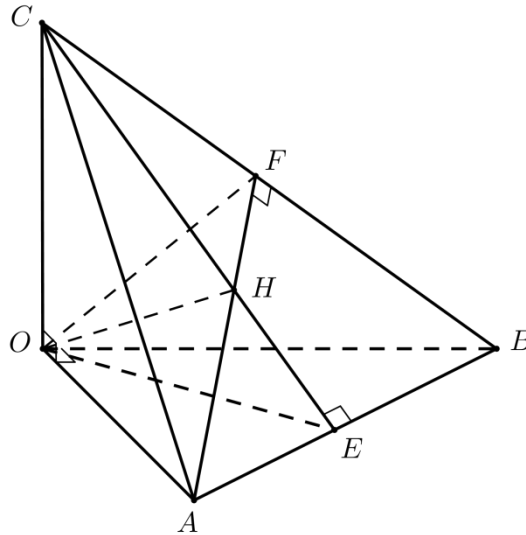
Suy ra phương án A, B đúng.

Câu 49: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp OA$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $CE \perp AB$ ($E \in AB$), $AF \perp AC$ ($F \in AC$), $CE \cap AF = H$.

Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau do đó

$OA \perp (OBC)$, $OB \perp (OAC)$, $OC \perp (OAB)$.

Ta có $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$. Do đó đáp án A đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AF \\ BC \perp OA \text{ (vì } OA \perp (OBC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAF) \Rightarrow BC \perp OH$. Do đó đáp án C đúng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CE \\ AB \perp OC \text{ (vì } OC \perp (OAB)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (COE) \Rightarrow AB \perp OH$.

Do đó $\begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$. Do đó đáp án B đúng.

Ta có $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OF \Rightarrow \triangle AOF$ vuông tại O .

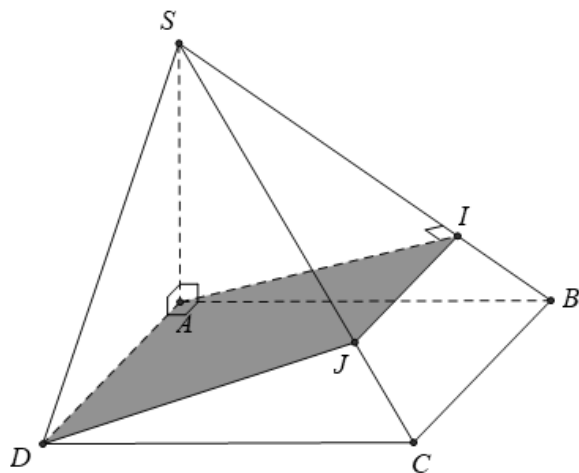
Suy ra OH không vuông góc với OA . Do đó đáp án D sai.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên SB và (P) là mặt phẳng chứa AI và song song với BC . Diện tích thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{9\sqrt{15}a^2}{25}$. B. $\frac{9\sqrt{15}a^2}{5}$. C. $\frac{9\sqrt{5}a^2}{25}$. D. $\frac{9\sqrt{3}a^2}{25}$.

Lời giải

Chọn A



Xét $\triangle SAB$ là tam giác vuông tại A và $SA = 2a$, $AB = a$. Vì I là hình chiếu vuông góc của A lên SB nên ta có: $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

+ Lại có: $\triangle AIB$ đồng dạng với $\triangle SAB \Rightarrow \frac{IB}{AB} = \frac{AB}{SB}$ hay $IB = \frac{AB^2}{SB} = \frac{a^2}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

$$\Rightarrow SI = SB - IB = a\sqrt{5} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}.$$

Vì (P) là mặt phẳng chứa AI và song song với $BC \Rightarrow AD \subset (P)$ và cắt SC tại điểm J thỏa mãn: $IJ \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{IJ}{BC} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow IJ = \frac{SI \cdot BC}{SB} = \frac{\frac{4a\sqrt{5}}{5} \cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{4a\sqrt{3}}{5}.$$

Khi đó (P) giao với hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $ADJI$ với 2 đáy là $AD = a\sqrt{3}$ và $IJ = \frac{4a\sqrt{3}}{5}$.

Lại có $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AI$ hay AI là chiều cao của hình thang $ADJI$ và $AI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là:

$$S = \frac{1}{2}(AD + IJ) \cdot AI = \frac{1}{2} \left(a\sqrt{3} + \frac{4a\sqrt{3}}{5} \right) \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{15}a^2}{25}.$$

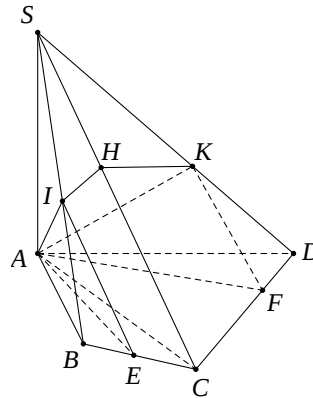
Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC tại H , cắt SB , SD lần lượt tại I và K . Mặt phẳng qua I, K song song với SC cắt các cạnh BC, CD lần lượt tại E và F . Biết SC hợp với đáy một góc 60° . Tính diện tích tứ giác $AECF$, biết diện tích tứ giác AHK bằng 10.

A. $12\sqrt{3}$.

B. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\left(SC, (ABCD) \right) = \angle SCA = 60^\circ.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SC \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \left((\alpha), (ABCD) \right) = (SA, SC) = \angle ASC = 30^\circ$$

$$IE, KF \text{ cùng song song với } SC \Rightarrow IE \perp (AIHK), KF \perp (AIHK).$$

Tứ giác $AIHK$ chính là hình chiếu của $AECF$ lên (α) .

Áp dụng công thức diện tích hình chiếu:

$$S_{AIHK} = S_{AECF} \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow S_{AECF} = \frac{S_{AIHK}}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

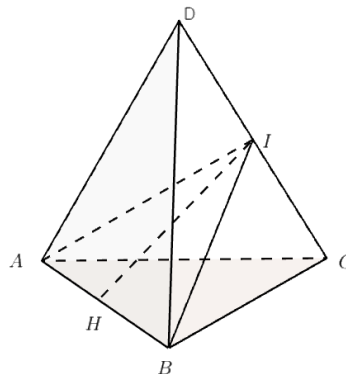
Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ ($x > 0$), các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 4. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và vuông góc với cạnh CD tại I . Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng:

A. 12

B. 6

C. $8\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{3}$

Lời giải**Chọn B**

Các $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ đều vì có các cạnh đều bằng 4.

Gọi I là trung điểm của CD thì $AI \perp CD$, $BI \perp CD \Rightarrow (ABI) \perp CD$. Mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (ABI) .

Mặt khác ta có AI và BI là các đường cao trong tam giác đều cạnh bằng 4 nên $AI = BI = 2\sqrt{3}$

Gọi H là trung điểm của AB thì IH là đường cao trong tam giác cân $ABI \Rightarrow IH = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}}$.

$$\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $S_{IAB} \leq \frac{\frac{x^2}{4} + \left(12 - \frac{x^2}{4}\right)}{2} = 6.$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x}{2} = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{6}.$

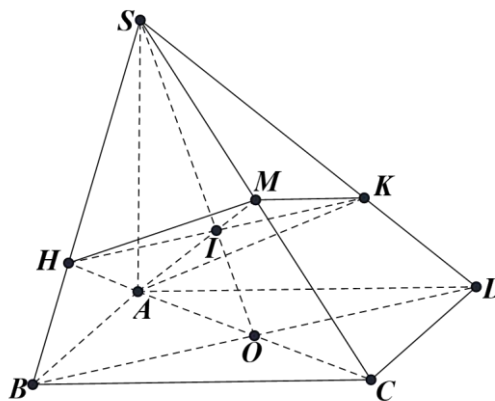
Vậy diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng 6.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC , (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) .

- A. $12\sqrt{3}a^2$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$ C. $8\sqrt{3}a^2$ D. $4\sqrt{3}a^2$

Lời giải

Chọn B



Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Trong (SAC) , gọi $I = SO \cap AM$.

Trong (SBD) kẻ đường thẳng qua I và song song với BD lần lượt cắt SB, SD tại H, K .

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AMKH$.

Ta có: $\left. \begin{array}{l} AC \perp BD \\ SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM \Rightarrow HK \perp AM .$

Ta có $AM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}a = a\sqrt{2} .$

Và I là trọng tâm tam giác SAC nên $\frac{HK}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}a .$

Vậy diện tích tứ giác $AHMK$ là $S_{AHMK} = \frac{1}{2}AM.HK = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2 .$

-----HẾT-----