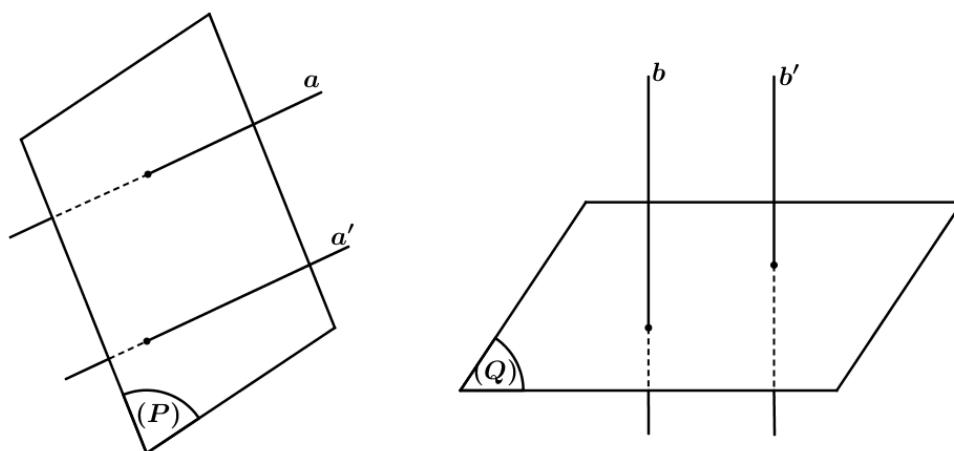


A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc

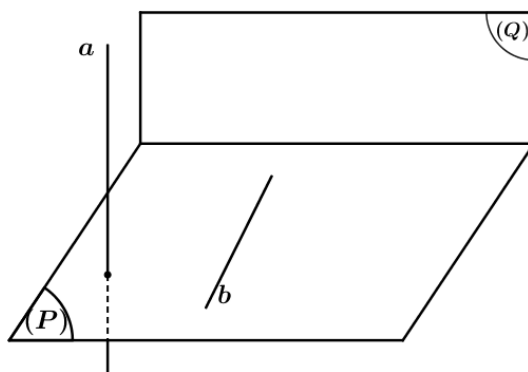


Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

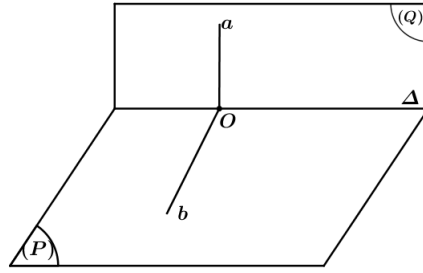
Chú ý: Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$.

2 Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

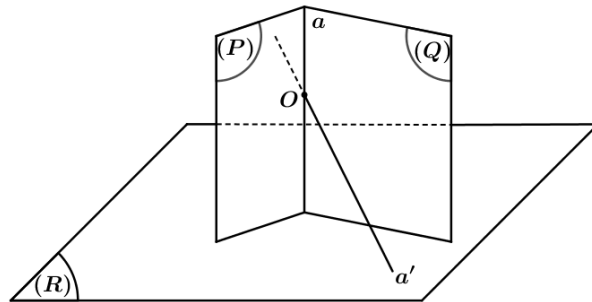


Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

3 Tính chất hai mặt phẳng vuông góc



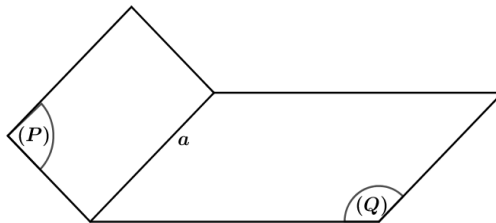
Tính chất 1: Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



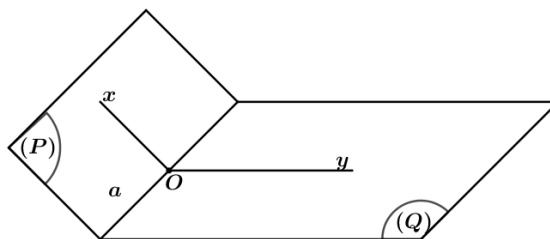
Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

4 Góc nhị diện

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P) , (Q) có chung bờ a được gọi là góc nhị diện., kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P) , (Q) tương ứng được gọi là các cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.



Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$ vẽ các tia Ox , Oy tương ứng thuộc (P) , (Q) và vuông góc với a . Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P, a, Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a , được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.



Mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện xOy của $[P, a, Q]$ vuông góc với cạnh a .

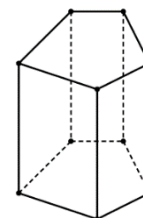
Chú ý:

- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180° . Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90° .
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a , ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N .
- Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5 Một số hình lăng trụ đặc biệt

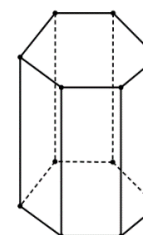
a) Hình lăng trụ đứng

- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.



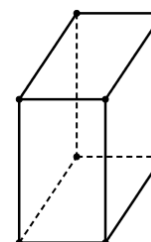
b) Hình lăng trụ đều

- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ có đáy là đa giác đều.
- Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.



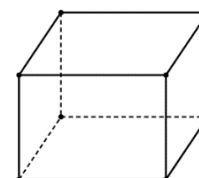
c) Hình hộp đứng

- Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng, có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.



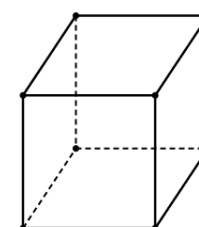
d) Hình hộp chữ nhật

- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là các hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại chung điểm của mỗi đường.

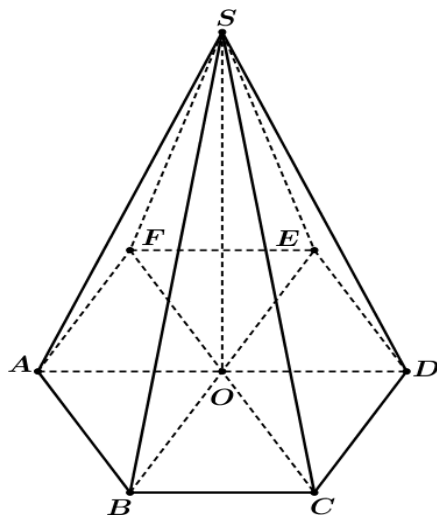


d) Hình lập phương

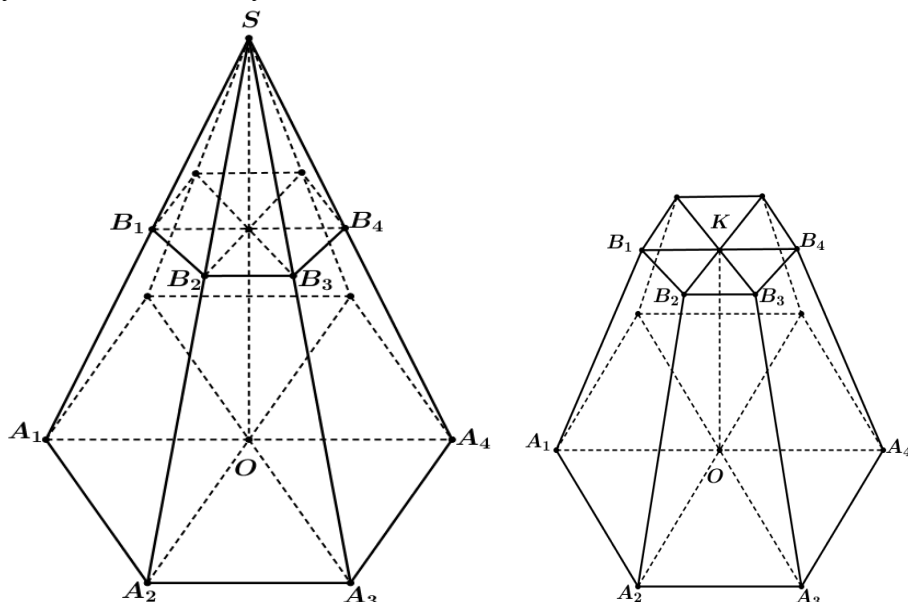
- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.
- Hình lập phương có tất cả các mặt là hình vuông.



6 Hình chóp đều và hình chóp cụt đều



- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh lên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.



- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3$, ..., $A_nA_1B_nB_1$ là một hình chóp cắt đều (nói đơn giản là hình chóp cắt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2...B_n$), kí hiệu là $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_2B_3$, ..., $A_nA_1B_nB_1$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cắt. Các đoạn thẳng A_1B_1 , A_2B_2 , ..., A_nB_n được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cắt.
- Đoạn thẳng KO nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cắt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cắt.

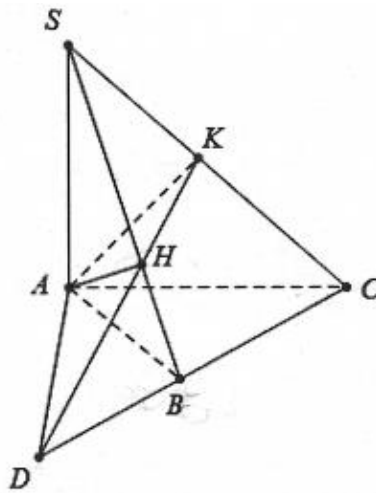
Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

- Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P) .
- Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° .

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

- Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.
- Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC . Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.
- Gọi D là giao điểm của HK và BC . Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAC)$.

Lời giải

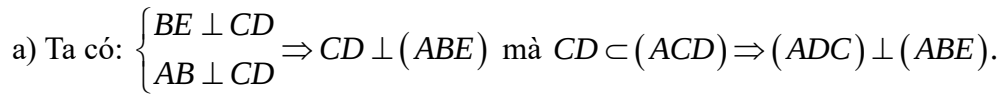


- Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$. Tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$.
Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.
- Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$.
- Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$
Mặt khác $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AKD)$.
Suy ra $AD \perp SC$ mà $SA \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAC)$. Do vậy $(SAD) \perp (SAC)$.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K . Gọi H là trực tâm của tam giác ACD .

- Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK) .
- Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ACD) .

Lời giải



Mặt khác: $DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (ACD) \perp (ABE) \\ (ACD) \perp (DFK) \\ OH = (ABE) \cap (DFK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD).$$

$SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

b) $(SCD) \perp (SBC)$.

Như vậy DHB là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

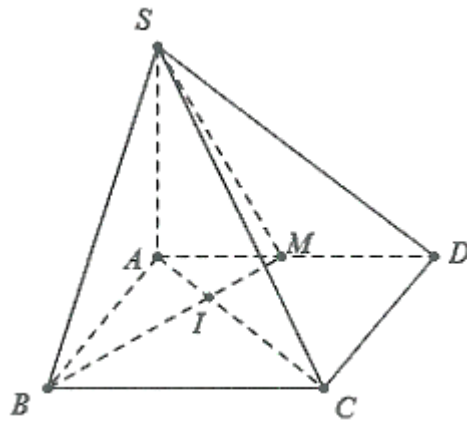
Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot OC}{\sqrt{SA^2 + OC^2}} = a \Rightarrow OH = \frac{AK}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta DHB$ vuông tại H hay $DHB = 90^\circ$.

Do đó $(SCD) \perp (SBC)$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD , I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải



Ta có: $\tan \hat{CAD} = \frac{CD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mặt khác $\tan \hat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$.

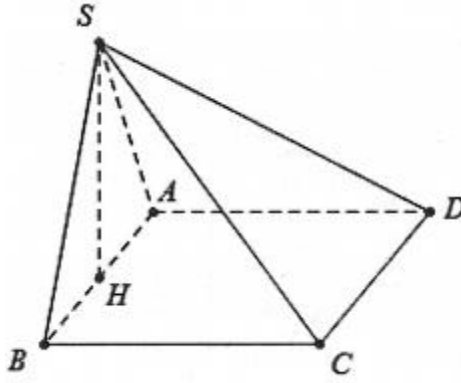
Do $\tan \hat{CAD} = \cot \hat{AMB} \Rightarrow \hat{CAD} + \hat{AMB} = 90^\circ$ suy ra $\hat{AIM} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BM$ tại I .

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$. Do đó $BM \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Biết $SA = SB = a\sqrt{2}$.

- Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.
- Chứng minh tam giác SBC vuông.
- Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$; $(SAD) \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Do ΔSAB cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

b) Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$.

Mặt khác $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B .

c) Tương tự câu b ta chứng minh được $AD \perp (SAB)$ suy ra $(SAD) \perp (SAB)$.

Mặt khác: $SA^2 + SB^2 = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S \Rightarrow SA \perp SB$.

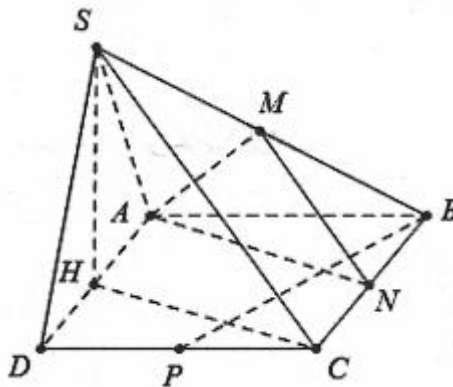
Lại có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB \Rightarrow SB \perp (SAD) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD).$

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC và CD .

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB)$.

b) Chứng minh $AM \perp BP$ và $(SBP) \perp (AMN)$.

✍ **Lời giải**



a) Gọi H là trung điểm của AD .

Do ΔSAD cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AD$.

Mặt khác $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ AD = (SAD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

Khi đó $\begin{cases} SH \perp AB \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD).$

b) Ta có: $\begin{cases} MN // SC \\ AN // HC \end{cases} \Rightarrow (AMN) // (SHC).$

Để thấy $\tan \hat{BPC} = 2$; $\tan \hat{HCD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{BPC} + \hat{HCD} = 90^\circ \Rightarrow HC \perp BP.$

Mặt khác $SH \perp BP \Rightarrow BP \perp (SHC)$

Mà $(AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} (SBP) \perp (AMN) \\ BP \perp AM \end{cases}.$

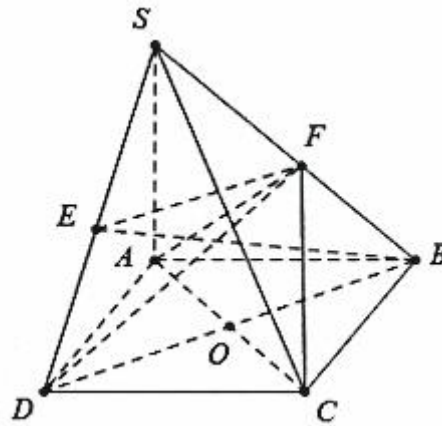
Ví dụ 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD).$

a) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD).$

b) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD).$

c) Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác SBD . Chứng minh rằng $(ACF) \perp (SBC);$
 $(AEF) \perp (SAC).$

Lời giải



a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$. Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$

b) Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Do đó $(SAD) \perp (SAB).$

c) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB.$

Mặt khác: $DF \perp SB \Rightarrow (ADF) \perp SB \Rightarrow AF \perp SB$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF.$

Do đó $AF \perp (SBC) \Rightarrow (ACF) \perp (SBC).$

Để thấy tam giác SBD cân tại S có 2 đường cao BE và DF nên $EF // BD$

Mặt khác $BD \perp (SAC)$ (Chứng minh ở câu a) suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC).$

Cách khác: Ta có $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp SC$

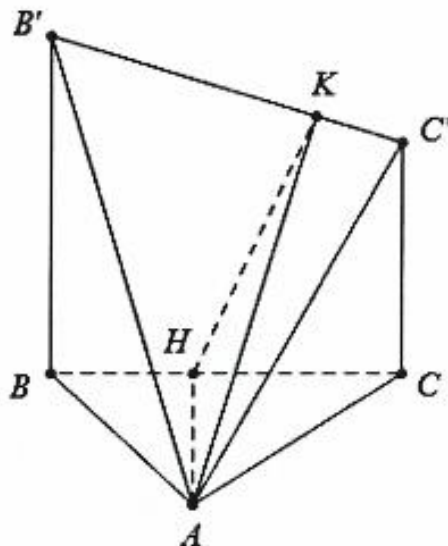
Chứng minh tương tự ta cũng có: $AE \perp SC$ suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$.

Ví dụ 8: Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC) .

a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.

b) Gọi AH , AK là các đường cao của $\triangle ABC$ và $\triangle AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B') \perp (AHK)$ và $(AB'C') \perp (AHK)$.

Lời giải



a) Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AB$

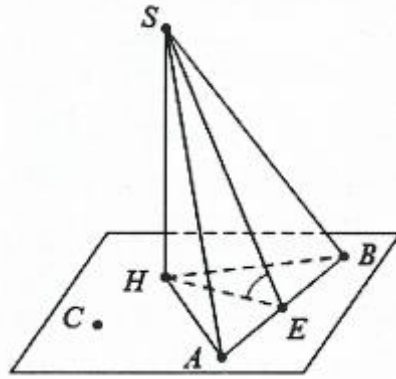
Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ACC') \Rightarrow (ABB') \perp (ACC')$.

b) Do $AH \perp BC$, $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Suy ra $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow (AHK) \perp (BCC'B')$.

Mặt khác $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH \perp B'C'$

Lại có: $AK \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AHK) \Rightarrow (AHK) \perp (AB'C')$.



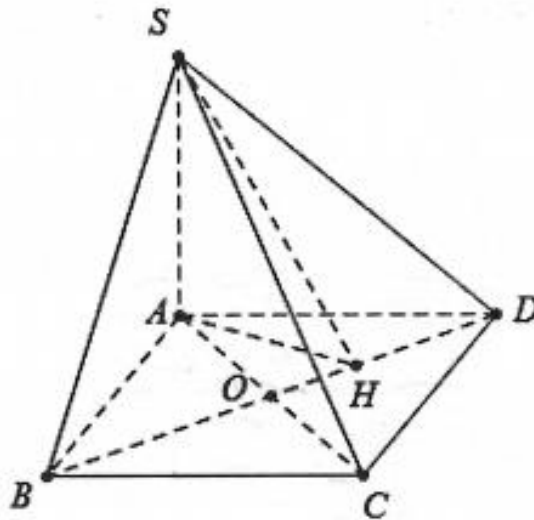
Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) .

- Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$, dựng $HE \perp AB$.
- Khi đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow ((SAB); (ABC)) = \widehat{SEH}$.

Ví dụ 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60° .

- Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$.
- Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AD \tan 60^\circ = 3a$.

Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = \widehat{SBA}$

Mặt khác $\cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $\cos((\widehat{SBC}); (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

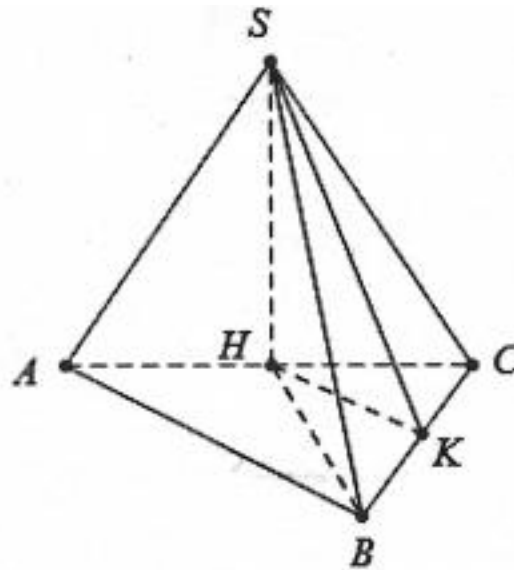
b) Dùng $AH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHA) \Rightarrow ((\overline{SBD}); (ABC)) = SHA$.

$$\text{Lại có: } AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \tan((\overline{SBD}); (ABCD)) = \tan SHA = \frac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}.$$

Ví dụ 10: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60° . Tính góc $((\overline{SBC}); (ABC))$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AC , do tam giác SAC cân nên ta có: $SH \perp AC$. Mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABC)$. Khi đó: $(\overline{SB}; (ABC)) = \angle SBH = 60^\circ$.

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AC = a.$$

$$\text{Khi đó: } SH = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

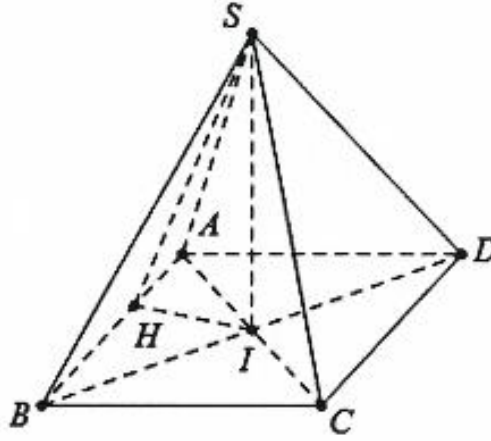
$$\text{Dùng } HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow \angle SKH = ((\overline{SBC}); (ABC))$$

$$\text{Ta có: } HK = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SH = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos \angle SKH = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } ((\overline{SBC}); (ABC)) = \varphi \text{ với } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\angle BAD = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \frac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông

góc của I trên AB . Ta có: $\begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI)$.

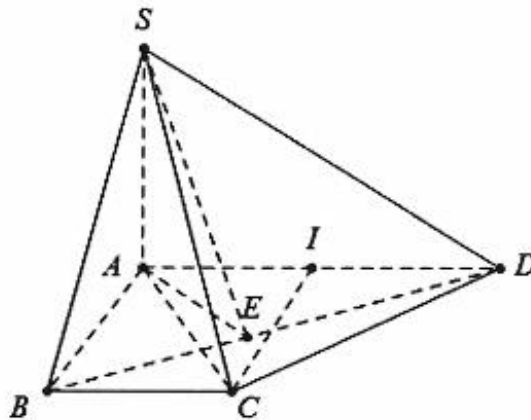
Do đó $\varphi = (\overline{SH}; \overline{IH}) = \widehat{SHI}$.

Do $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAI} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều cạnh $2a$

Suy ra: $IA = a \Rightarrow IH = IA \sin \widehat{IAB} = IA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\tan \varphi = \frac{SI}{IH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$.

Ví dụ 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA)$.

Khi đó: $((\overline{SBC}); (\overline{ABCD})) = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C .

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCA).$

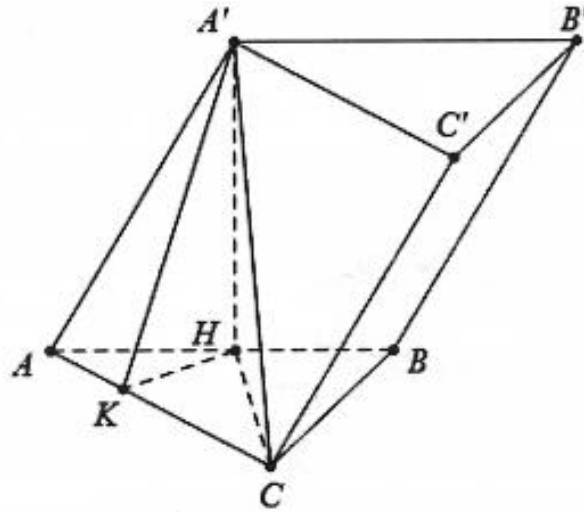
Do đó $((\overline{SCD}); (ABCD)) = (\overline{SC}; AC) = \angle SCA$ và $\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Dựng $AE \perp BD$, lại có $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SEA) \Rightarrow ((\overline{SBD}); (ABCD)) = \angle SEA.$

Ta có: $AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \angle SEA = \frac{SA}{AE} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$

Ví dụ 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng 60° . Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC) .

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có: $A'H \perp (ABC)$

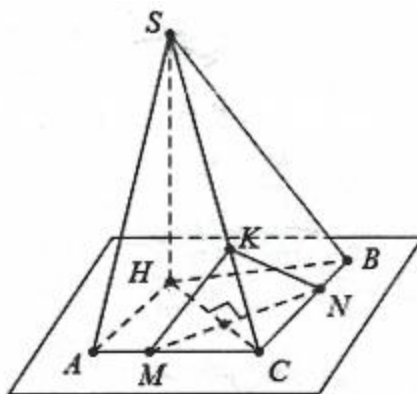
Do đó $\angle A'CH = 60^\circ$. Lại có: $CH = AC \sin 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow A'H = CH \tan 60^\circ = 3a.$

Dựng $HK \perp AC$ ta có $A'H \perp AC \Rightarrow (A'HK) \perp AC$

Khi đó $HK = HA \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Ta có: $\cos \angle A'KH = \frac{HK}{\sqrt{HK^2 + A'H^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} > 0.$ Do vậy $\cos((\overline{A'AC}); (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{13}}.$

Định dạng 3: Xác định góc giữa hai mặt bên



Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC) .

- **Cách 1:** Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC) .
- **Cách 2:** Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC , dựng $MN \perp HC$.

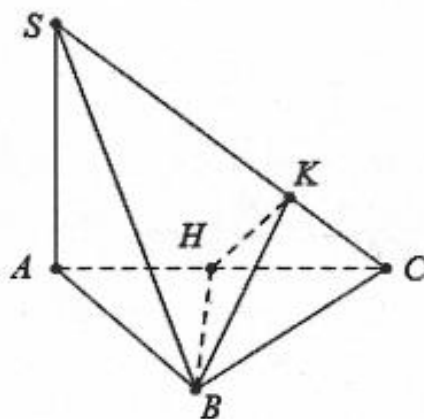
Lại có: $MN \perp SH \Rightarrow MN \perp (SHC) \Rightarrow MN \perp SC$.

Dựng $MK \perp SC \Rightarrow SC \perp (MKN) \Rightarrow ((SAC); (SBC)) = (\overline{MK}, \overline{KN})$.

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC tam giác vuông tại

B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) .

Lời giải



Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Dựng $HK \perp SC \Rightarrow (HKB) \perp SC \Rightarrow ((SBC); (SAC)) = \angle HKB$.

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.

Khi đó $\sin \angle KCH = \frac{HK}{HC} = \frac{SA}{SC} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

$$\text{Mặt khác: } BH = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan HKB = \frac{BH}{HK} = \sqrt{3}$$

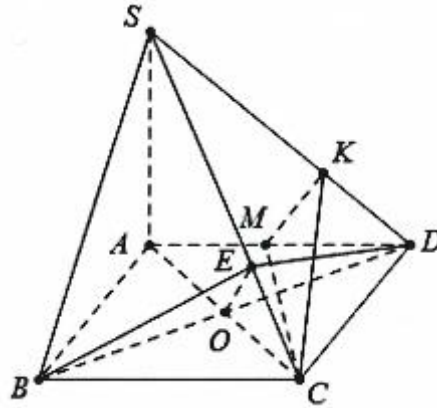
$\Rightarrow HKB = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .

Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\angle ABC = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD) .

b) (SAD) và (SCD) .

Lời giải



a) Nhận xét $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a vì $AB = BC = a$ và $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Dựng $BE \perp SC \Rightarrow SC \perp (BED)$.

Mặt khác: $SA = AC = a \Rightarrow \triangle SAC$ vuông cân tại A suy ra

$$\angle ECO = 45^\circ. \text{ Khi đó } OE = OC \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Lại có: } OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \angle BEO = \frac{OB}{OE} = \sqrt{6}.$$

Do $\angle BED = 2\angle BEO$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy tính **CASIO** ta tính được

$$\cos \angle BED = \frac{-5}{7}$$

$$\text{Cách khác: Ta có: } BE = DE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \cos \angle BED = \frac{EB^2 + ED^2 - BD^2}{2 \cdot EB \cdot ED} = \frac{-5}{7}.$$

$$\text{Suy ra } \cos((\overline{SBC}); (\overline{SCD})) = \frac{5}{7}.$$

b) Dựng $CM \perp AD$ ta có: $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \Rightarrow CM \perp SD$.

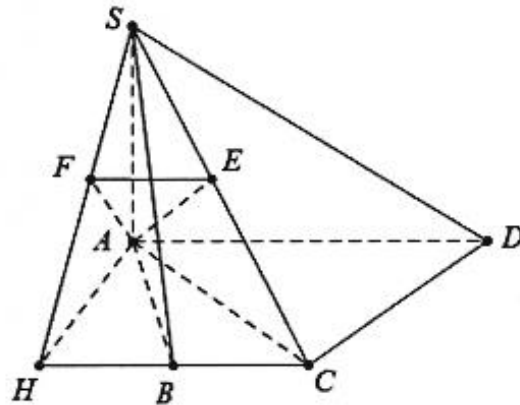
Dựng $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (MKC)$.

Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA = AD = a \Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A suy ra $\angle SDM = 45^\circ$. Do đó $MK = MD \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $\tan MKC = \frac{CM}{MK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos MKC = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Vậy $\cos((\overline{SCD});(\overline{SAD})) = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AD = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 45° . Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

Lời giải



Do $AD = 2a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Suy ra $((\overline{SCD});(\overline{ABCD})) = \angle SCA = 45^\circ$

$$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

Dựng $AE \perp SC \Rightarrow AE \perp (SCD)$

Dựng $\begin{cases} AH \perp BC \\ AF \perp SH \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC)$, góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc giữa AE và AF .

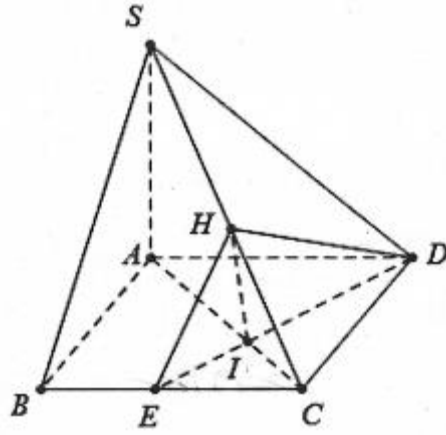
$$\text{Ta có: } AE = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}; \quad AH = AC \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $AF = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, do $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp FE$. Do đó

$$\cos \angle FAE = \frac{AF}{AE} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Do đó $(\widehat{SBC}); (\widehat{ABC}) = \widehat{SBA} = 60^\circ$; $AC = 2a \Rightarrow SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dựng $DE \perp AC$ ($E \in BC$) tại I , mặt khác $DE \perp SA \Rightarrow DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp SC$.

Dựng $IH \perp SC \Rightarrow SC \perp (EHD)$. Ta có: $DI = DC \sin \angle ICD$ trong đó

$$\tan \angle ICD = \sqrt{3} \Rightarrow \angle ICD = 60^\circ.$$

$$\text{Suy ra } DI = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; DE = \frac{DC^2}{DI} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

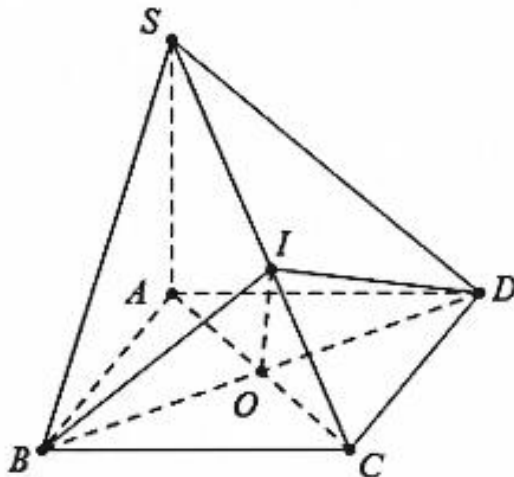
$$\Rightarrow IE = DE - DI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow CI = \sqrt{EI \cdot DI} = \frac{a}{2}; \sin \angle ICH = \frac{SA}{SC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow IH = IC \sin \angle IHC = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\text{Suy ra } EH = \sqrt{EI^2 + IH^2} = \frac{2a}{\sqrt{21}}; ED = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

$$\text{Do đó } \cos \angle EHD = \frac{EH^2 + HD^2 - ED^2}{2 \cdot EH \cdot HD} = \frac{-\sqrt{2}}{4} < 0 \Rightarrow \cos((\widehat{SBC}); (\widehat{SCD})) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC. \text{ Kẻ } BI \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID).$

Vậy $((\tilde{S}BC); (\tilde{S}CD)) = (\tilde{BI}; ID) = 60^\circ$ Dễ thấy $\begin{cases} OI \perp SC \\ BIO = \frac{1}{2} BID \end{cases}$

Trường hợp 1: $BID = 60^\circ \Rightarrow BIO = 30^\circ.$

Ta có: $\tan BIO = \frac{BO}{IO} = \tan 30^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý).

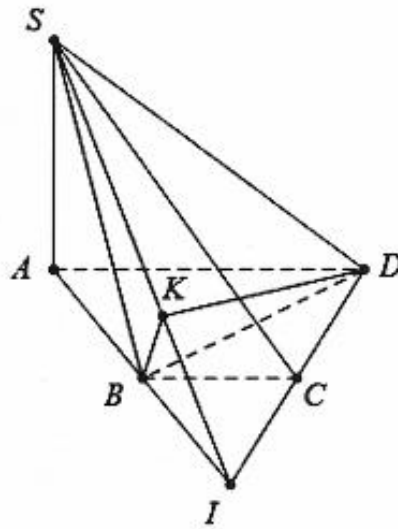
Trường hợp 2: $BID = 120^\circ \Rightarrow BIO = 60^\circ.$

Ta có: $\tan BIO = \frac{BO}{IO} = \tan 60^\circ \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$

Mặt khác: $\sin ICO = \frac{OI}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan ICO = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC \tan ICO = a.$

Ví dụ 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải



Do $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB . Do đó $\angle ABD = 90^\circ$.

Gọi $I = AB \cap CD \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD).$

Do $\begin{cases} AI \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp SI.$

Dựng $BK \perp SI \Rightarrow SI \perp (BKD).$

Khi đó $((\tilde{S}AB); (\tilde{S}CD)) = (\tilde{BK}, KD) = \angle BKD.$

Do $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp BK \Rightarrow \triangle KBD$ vuông tại B có

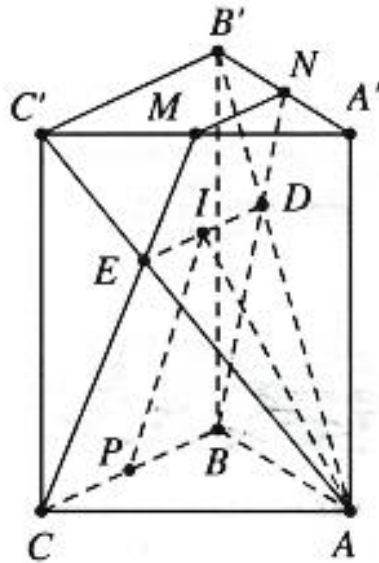
$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} BC // AD \\ BC = \frac{1}{2} AD \end{cases} \Rightarrow BC \text{ là đường trung bình trong tam giác } AID \Rightarrow AB = BI \text{ và } AI = 2a$$

$$\Rightarrow BK = \frac{1}{2} d(A; SI) = \frac{1}{2} \cdot \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan \angle BKD = \frac{BD}{BK} = \sqrt{7}.$$

Ví dụ 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và $A'B'$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BCMN)$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm BC . Đặt $AB' \cap BN = D$, $AC' \cap CM = E$

Suy ra DE là giao tuyến của $(AB'C')$ và $(BCMN)$

Gọi I là trung điểm DE , do tính đối xứng $\Rightarrow IA \perp DE$, $IP \perp DE$

Do đó $DE \perp (AIP) \Rightarrow (\bar{AB'C'}); (BCMN) = (\bar{IA}; IP) = \angle AIP$

Ta có $AP = 3$ và $\frac{DE}{B'C'} = \frac{AD}{AB'} = \frac{AB}{AB + B'N} = \frac{2}{3}$ nên I là trọng tâm tam giác

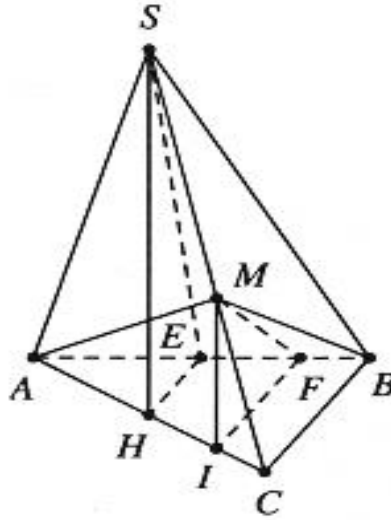
$$AB'C' \Rightarrow AI = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2(AB'^2 + AC'^2) - B'C'^2}{4}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

Tương tự thì I là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow PI = \frac{5}{3}$

$$\text{Xét tam giác } IAP \text{ có } \cos \angle AIP = \frac{IP^2 + IA^2 - AP^2}{2IP \cdot IA} = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Ví dụ 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $\angle ACB = 30^\circ$. Tam giác SAC là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Xét điểm M thuộc cạnh SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với hai mặt phẳng $(SAB); (ABC)$ góc bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{MS}{MC}$.

Lời giải



Chuẩn hoá $AB = 2 \Rightarrow AC = 4; BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{3}$

Bước 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (ABC)$

Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi E là trung điểm $AB \Rightarrow HE \parallel BC \Rightarrow HE \perp AB$

Mà $SH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow (\tilde{SAB}); (ABC) = \angle SEH$

Ta có $\tan \angle SEH = \frac{SH}{HE} = \frac{2SH}{BC} = \frac{8\sqrt{3}}{2} : 2\sqrt{3} = 2$

Bước 2. Ta có $(\tilde{MAB}); (SAB) = (\tilde{MAB}); (ABC)$

Suy ra $\Rightarrow (\tilde{MAB}); (ABC) = \frac{1}{2} \cdot ((\tilde{SAB}); (ABC)) = \frac{\angle SEH}{2}$

Gọi I là hình chiếu của M trên $AC \Rightarrow MI \perp (ABC)$

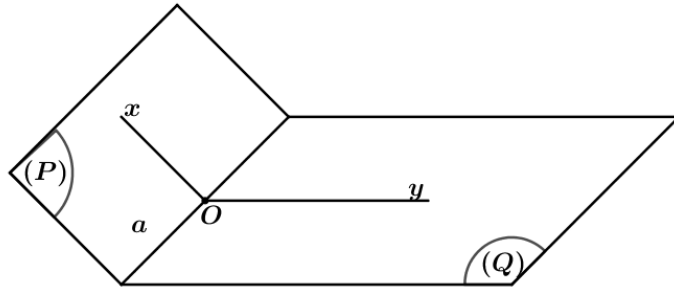
Kẻ $IF \perp AB (F \in AB)$ nên $AB \perp (MIF) \Rightarrow (\tilde{MAB}); (ABC) = \angle MFI$

Đặt $MC = x \Rightarrow \frac{MC}{SC} = \frac{MI}{SH} = \frac{IC}{HC} \Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{MI}{2\sqrt{3}} = \frac{IC}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{3}x}{2}; IC = \frac{x}{2}$

Lại có $\frac{HE}{IF} = \frac{AH}{AI} \Leftrightarrow IF = \frac{HE \cdot AI}{AH} = \frac{\sqrt{3} \cdot \left(4 - \frac{x}{2}\right)}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{4}$

Tam giác MIF vuông tại $I \longrightarrow \tan \angle MFI = \frac{MI}{IF} = \frac{2}{3}$

Do đó $2IF = 3MI \Leftrightarrow 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{3\sqrt{3}x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \longrightarrow \frac{MC}{MS} = 1.$



Ta xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) theo 3 bước:

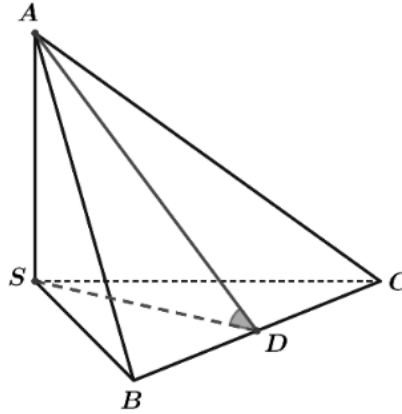
Bước 1: Tìm giao tuyến $a = (P) \cap (Q)$.

Bước 2: Tìm $x \subset (P): x \perp a$ và $y \subset (Q): y \perp a$.

Bước 3: Kết luận $[P, a, Q]$

Ví dụ 22: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Tính $\cos \alpha$?

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC suy ra $SD \perp BC$ (vì tam giác SBC cân tại S).

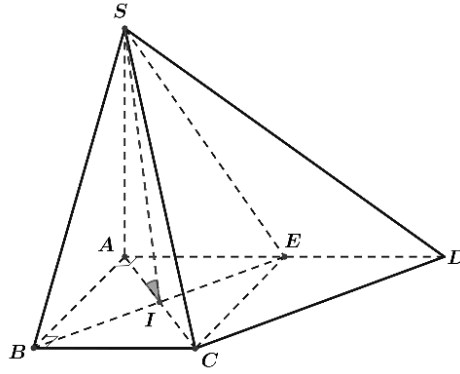
Suy ra $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$ và $SD \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SD \perp BC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = SDA = \alpha$.

Xét $\triangle SAD$ vuông tại S ta có: $\cos \alpha = \cos SDA = \frac{SD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD . Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BE, A]$.

Lời giải



Nhận xét: $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi $I = AC \cap BE$.

Ta có: $\begin{cases} BE \perp AI \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAI) \Rightarrow BE \perp SI$.

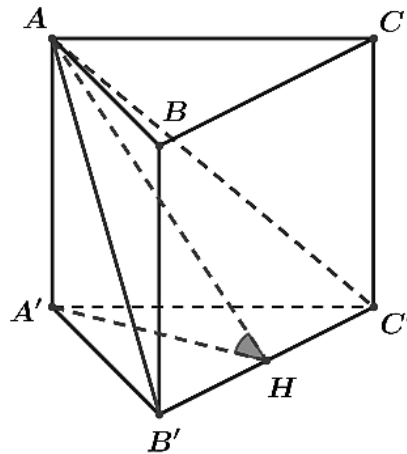
Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABE) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases} \Rightarrow [S, BE, A] = SIA$

Xét $\triangle SIA$ vuông tại A , ta có: $\tan SIA = \frac{SA}{IA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow SIA = 60^\circ$.

Ví dụ 24: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ ?

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh $B'C'$. Suy ra $A'H \perp B'C'$.



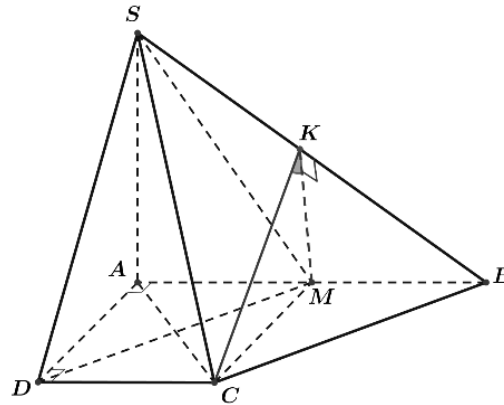
Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'AH) \Rightarrow B'C' \perp AH$.

$\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ A'H \perp B'C' \\ AH \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = (A'H, AH) = A'HA$.

Xét $\triangle A'AH$ vuông tại A , ta có: $\tan A'HA = \frac{AA'}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'HA = \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[C, SB, A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

Trong mặt phẳng (SAB) , từ M kẻ $MK \perp SB$ tại K .

Khi đó: $\begin{cases} SB \perp MK \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMK) \Rightarrow SB \perp CK$.

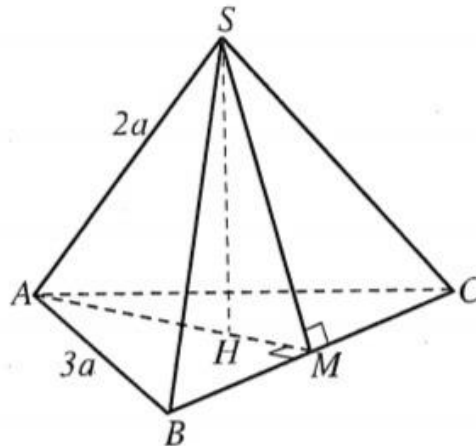
Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ MK \perp SB \\ CK \perp SB \end{cases} \Rightarrow [C, SB, A] = CKM$.

$\triangle BKM \sim \triangle BAS$ nên $\frac{KM}{SA} = \frac{BM}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow KM = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Xét $\triangle CKM$ vuông tại M ta có: $\tan CKM = \frac{CM}{MK} = \sqrt{3} \Rightarrow CKM = 60^\circ$.

Ví dụ 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$ và cạnh bên $2a$. Tính số đo nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC thì $(SAM) \perp BC$ nên SMA là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Ta có: $AM = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông SMB có: $SM^2 = SB^2 - BM^2 = 4a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$, từ đó $SM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Vậy $\cos SMH = \frac{HM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

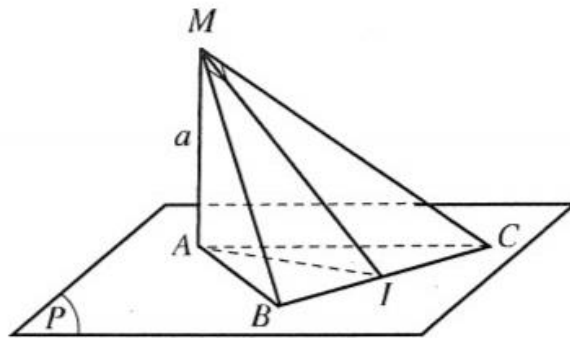
Số đo nhị diện $[S, BC, A]$ là φ được xác định bởi $\cos \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}, 0^\circ < \varphi < 180^\circ$

Ví dụ 27: Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P) . Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P) . Cho biết $MA = a$; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

a) Tính độ dài BC

b) Tính số đo nhị diện $[M, BC, A]$.

Lời giải



a) Vì $MA \perp (P)$ nên MBA và MCA là góc giữa MB và MC với (P) .

Theo giả thiết. $MBA = MCA = 30^\circ$.

Từ đó: $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}$.

b. Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp (MIA)$

Từ đó MIA là góc phẳng nhị diện $[M, BC, A]$.

Đặt $MIA = \varphi$. Ta có $MI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$; $\sin \varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

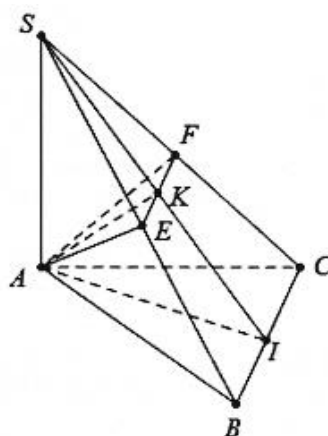
Vậy góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng 45°

Dạng 5: Bài toán dựng thiết diện có yếu tố vuông góc.

Ví dụ 28: Cho tứ diện $SABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) và tính diện tích thiết diện trong các trường hợp sau:

- (α) qua S và vuông góc với BC .
- (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của ΔSBC .

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$

Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAI)$

Thiết diện của khối chóp qua S và vuông góc với BC là tam giác SAI vuông tại A có

$$SA = a; AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } S_{SAI} = \frac{1}{2} SA \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

b) Dựng $AK \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$

Suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SI$.

Qua K dựng đường thẳng vuông góc với SI cắt SB, SC lần lượt tại E và $F \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AEF .

Ta có: $AK = \frac{SA \cdot AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH nên:

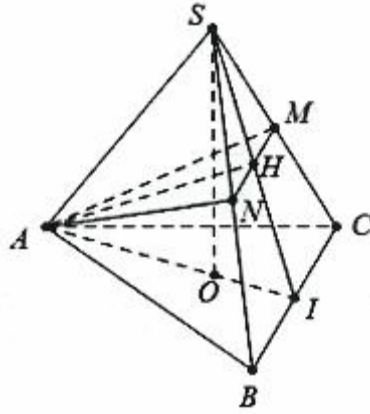
$$SA^2 = SK \cdot SI \Rightarrow \frac{SA^2}{SI^2} = \frac{SK}{SI} = \frac{EF}{BC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \frac{4}{7}$$

$$\text{Do đó } EF = \frac{4}{7}a \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2} AK \cdot EF = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}.$$

Ví dụ 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt

phẳng (α) đi qua A , song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) , xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp và tính diện tích thiết diện.

Lời giải



Gọi O là trọng tâm tam giác ABC thì $SO \perp (ABC)$ (Do $S.ABC$ là khối chóp đều).

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ mà $BC \perp SO$ suy ra $BC \perp (SAI)$.

Dựng $AH \perp SI$, lại có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Suy ra $AH \perp (SBC)$. Qua K dựng đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại N và $M \Rightarrow$ thiết diện là tam giác AMN .

Ta có: $SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow H$ là trung điểm của SI .

Suy ra $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$. Lại có: $SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

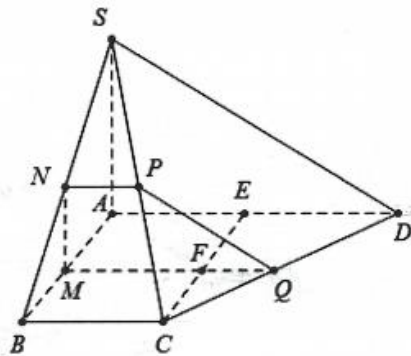
Khi đó $AH = \sqrt{AI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Ví dụ 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB , (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Đặt $x = AM$ ($0 < x < a$).

a) Tìm thiết diện của hình chóp với (α) . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại Q .

Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$

Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là $NP (P \in SC)$ thì $NP \parallel BC$.

Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp MQ$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$ vuông tại M và N .

Trong mp $(ABCD)$, dựng $CE \perp AD$ và cắt MQ tại F

$$\text{b) Ta có: } MF = AE = BC = a \Rightarrow DE = a; \frac{FQ}{ED} = \frac{CF}{CE} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow FQ = a-x.$$

$$\text{Suy ra } MQ = 2a-x, \text{ mặt khác } \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{NP}{a} \Rightarrow NP = x$$

$$\text{Lại có: } \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow MN = 2a-2x$$

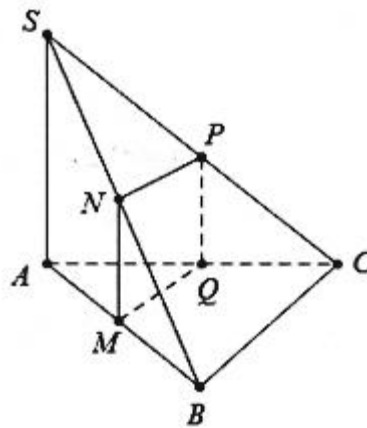
$$\text{Diện tích thiết diện là: } S_{MNPQ} = \frac{MQ+NP}{2} \cdot MN = 2a(a-x).$$

Ví dụ 31: Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Điểm M là một điểm tùy ý trên cạnh AB , đặt $AM = x, (0 < x < a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB .

a) Tìm thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α) .

b) Tính diện tích của thiết diện theo a và x . Tìm x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt AC tại Q .

Trong mặt phẳng (SAB) , qua M dựng đường thẳng vuông góc với AB cắt SB tại N .

Do $MQ \perp AB \Rightarrow MQ \parallel BC$

Do đó (α) cắt (SBC) theo giao tuyến là $NP (P \in SC)$ thì $NP \parallel BC$. Lại có: $MN \parallel SA \Rightarrow (\alpha)$ cắt (SAC) theo giao tuyến là $PQ \Rightarrow PQ \parallel SA \parallel MN \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Do $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp AB$

Vậy thiết diện của chóp với (α) là hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có: $AB = BC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Mặt khác } \frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BC} = \frac{x}{a} \Rightarrow MQ = x, \frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \sqrt{3}(a-x).$$

$$\text{Diện tích thiết diện là } S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{3}.x(a-x).$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ ta có: } S_{MNPQ} = MN.MQ = \sqrt{3}.x(a-x) \leq \sqrt{3}.\left(\frac{x+a-x}{2}\right)^2$$

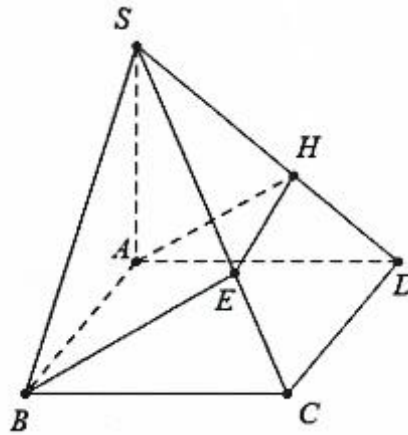
$$\text{Suy ra: } S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ đạt được khi } x = a-x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Ví dụ 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

a) (α) cắt khối chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

b) Biết $SA = a$. Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu a.

Lời giải



a) Trong mặt phẳng (SAD) dựng $AH \perp SD$ tại H .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp AD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD).$$

(α) là mặt phẳng chứa AB đồng thời chứa AH vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

Vậy $(\alpha) \perp (SCD)$ và $(\alpha) \equiv (AB, AH)$.

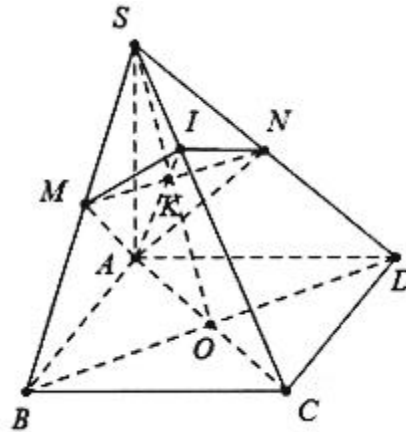
Ta có: $AB \parallel CD$ nên $CD \parallel (\alpha)$ và H là điểm chung của (α) và (SCD) nên giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua H và song song với CD cắt SC tại E . Ta có thiết diện của (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vuông $AHEB$ vuông tại A và H vì $AB \perp (SAD)$.

$$\text{b) Do } SA = AD = a \Rightarrow H \text{ là trung điểm của } AD \Rightarrow AH = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; EH = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Diện tích hình thang vuông } AHEB \text{ là: } S_{AHEB} = \frac{AB+EH}{2} \cdot AH = \frac{a+\frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{8}.$$

- Ví dụ 33:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O và có $SA \perp (ABCD)$. Giả sử (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC , (α) cắt SC tại I .
- Xác định giao điểm K của SO với mặt phẳng (α) .
 - Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC) và $BD // (\alpha)$.
 - Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (α) . Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α) .
 - Biết rằng $AB = a$; $SA = a\sqrt{2}$ Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu c.

Lời giải



a) Gọi $I = (\alpha) \cap SC$.

Ta có: $(\alpha) \perp SC$, $AI \subset (\alpha) \Rightarrow SC \perp AI$.

Vậy AI là đường cao của tam giác vuông SAC . Trong mặt phẳng (SAC) , đường cao AI cắt SO tại K và $AI \subset (\alpha)$ nên K là giao điểm của SO với (α) .

b) Ta có:
$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Mặt khác $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

Do $BD \perp SC$ và $(\alpha) \perp SC$ nhưng BD không chứa trong (α) nên $BD // (\alpha)$.

c) Ta có: $K = SO \cap (\alpha)$ và SO thuộc mặt phẳng (SBD) nên K là một điểm chung của (α) và (SBD) . Mặt phẳng (SBD) chứa $BD // (\alpha)$ nên cắt (α) theo giao tuyến $d // BD$. Giao tuyến này đi qua K là điểm chung của (α) và (SBD) . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của d với SB và SD . Thiết diện là tứ giác $AMIN$ có

$$\begin{cases} AI \perp SC \\ MN // BD \end{cases}.$$

d) Ta có: $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AI$ mà $BD // MN \Rightarrow AI \perp MN$.

Tứ giác $AMIN$ có hai đường chéo vuông góc với nhau nên $S_{AMIN} = \frac{1}{2} AI.MN$

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC cân tại A suy ra AI là đường cao đồng thời là đường trung tuyến. Khi đó $K = AI \cap SO$ là trọng tâm tam giác SAC .

Lại có: $\frac{SK}{SO} = \frac{MN}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Mặt khác $AI = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

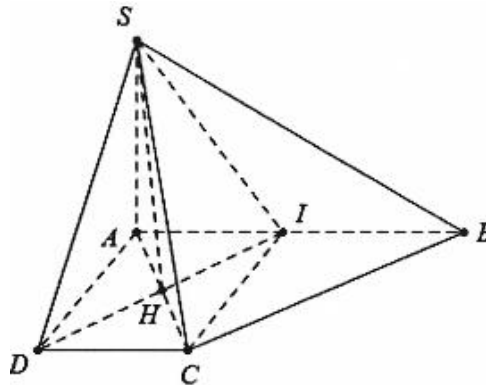
Do đó $S_{AMN} = \frac{1}{2}AI.MN = \frac{a^2}{3}$.

Ví dụ 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, và có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$.

a) Chứng minh $(SAD) \perp (SCD)$, $(SAC) \perp (SBC)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện.

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$ suy ra $(SCD) \perp (SAD)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Ta có: $AICD$ là hình vuông và $IBCD$ là hình bình hành. Do $DI \parallel BC$ và $DI \perp AC \Rightarrow AC \perp CB$.

Do đó $CB \perp (SAC)$. Vậy $(SBC) \perp (SAC)$.

c) Ta có: $\begin{cases} DI \perp AC \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC)$.

Vậy mặt phẳng (α) chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC) chính là mặt phẳng (SDI) .

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là tam giác đều SDI có

$$SD = DI = AI = a\sqrt{2}.$$

Diện tích tam giác SDI là: $S_{SDI} = \frac{SD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

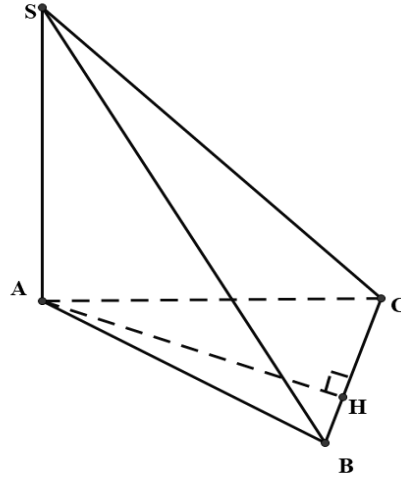
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A , $ABC = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



a) $SA \perp (ABC)$; $SA \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ SA \perp BC \quad (SA \perp (ABC)) \\ AH \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH); BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAH) \perp (SBC)$$

b) Ta có $AH \perp BC$, $BC \perp SH$ ($BC \perp (SAH)$) $\Rightarrow [S, BC, A] = (SH, AH) = SHA$

Xét tam giác ABC vuông tại A có $ABC = 30^\circ \Rightarrow ACH = 60^\circ$

Xét tam giác ACH vuông tại H có $\sin ACH = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SHA vuông tại A có $\tan SHA = \frac{SA}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow SHA = 45^\circ$

Vậy $[S, BC, A] = 45^\circ$

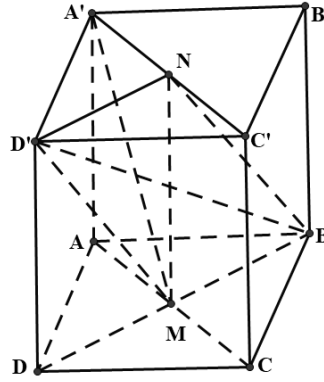
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng COC' là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C']$, $[A, BD, C']$

Lời giải



a) Độ dài đường chéo của hình lập phương có thể tính từ công thức cạnh đường chéo của hình lập phương như sau: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$

b) Ta có $AC^2 + CA'^2 = AA'^2$ do tam giác vuông ACA' nên ta có $AC = CA' = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Tương tự $BD^2 = DB'^2 = BC^2 = CB'^2 = AD^2 = DA'^2 = a^2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $BD, A'C'$ thì $MN \parallel AC \parallel A'C'$ và $MN = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2a^2$

Do AMD' và $D'BN$ là hai tam giác vuông cân tại M, N . Suy ra $(ACC'A') \perp (BDD'B')$

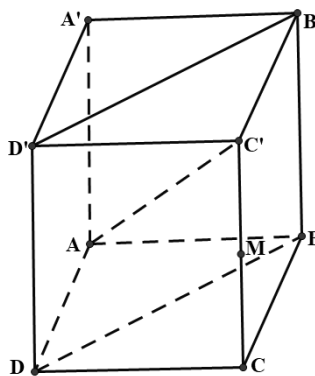
Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC' .

Lời giải



a) Ta có $BB' \perp (ABCD); BB' \subset (BDD'B') \Rightarrow (BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) A là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$

C là hình chiếu của C' trên $(ABCD)$ do $CC' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$

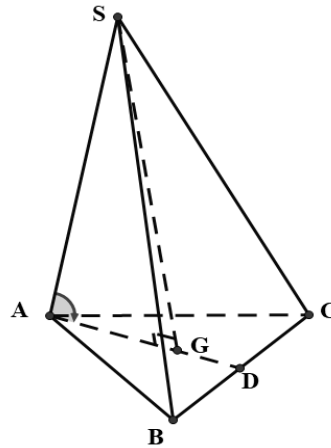
c) Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

Xét tam giác $AC'C$ vuông tại C có $AC'^2 = CC'^2 + AC^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b .

- a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.
b) Tính tan của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

Lời giải



Vì hình chóp $S.ABC$ đều Gọi G là hình chiếu của S trên (ABC) nên G là tâm của đáy ABC là tam giác đều do đó G cũng là trọng tâm hay trực tâm của tam giác ABC .

Gọi AG cắt BC tại D

a) Ta có A là hình chiếu của A trên (ABC) ; G là hình chiếu của S trên (ABC)

$\Rightarrow AG$ là hình chiếu của SA trên $(ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, AG) = SAG$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà G là trọng tâm nên $AG = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G có: $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$

$$\text{Khi đó: } \sin SAG = \frac{SG}{SA} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{b} : b = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3b^2}}$$

b) Ta có $AG \perp BC, SG \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD); SD \subset (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$

Suy ra: $BC \perp AD$ (G là trọng tâm)

Mặt khác: $(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (AD, SD) = SDA$

Mà G là trọng tâm nên $GD = \frac{1}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Xét tam giác SGD vuông tại G có: $\tan SGD = \frac{SG}{GD} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{6}{a\sqrt{3}} \cdot \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$

Câu 5: Hai mái nhà trong hình là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8$ m; $OA = 2,8$ m; $OB = 4$ m.

a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng.

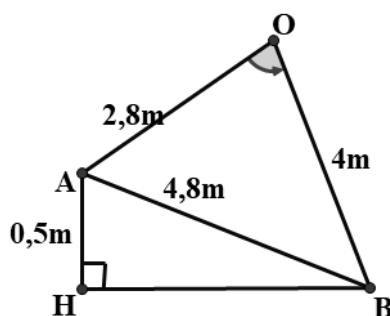
Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.

c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5\text{ m}$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.



Hình 7.72

Lời giải



a) Vì hai mái nhà trong hình là hai hình chữ nhật nên góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà là góc giữa hai đường thẳng OA và OB .

$$\text{Xét tam giác } OAB \text{ có: } \cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{2,8^2 + 4^2 - 4,8^2}{2 \cdot 2,8 \cdot 4} = \frac{1}{28} \Rightarrow AOB \approx 88^\circ$$

b) Mặt phẳng (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng đất.

c) Đường thẳng qua B song song với mặt đất cắt đường thẳng qua A vuông góc với mặt đất tại H

$$\text{Ta có: } \sin ABH = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow ABH \approx 6^\circ; \cos OBA = \frac{13}{16} \Rightarrow OBA \approx 36^\circ$$

$$\text{Do đó } OBH = ABH + OBA \approx 42^\circ.$$

Vậy góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất khoảng 42°

Câu 6: Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tan của góc tạo bởi mái nhà mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Giả sử góc tạo bởi đường thẳng dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang là α

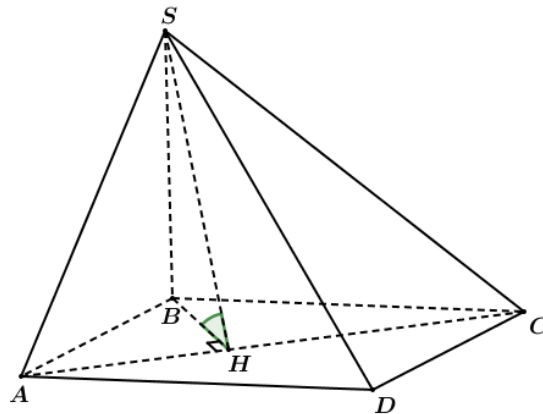
Vì độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$ nên ta có

$$\tan \alpha \leq \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \leq 4,76^\circ.$$

Vậy góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá $4,76^\circ$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB = 2a, AB = 3a, BC = 4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Lời giải

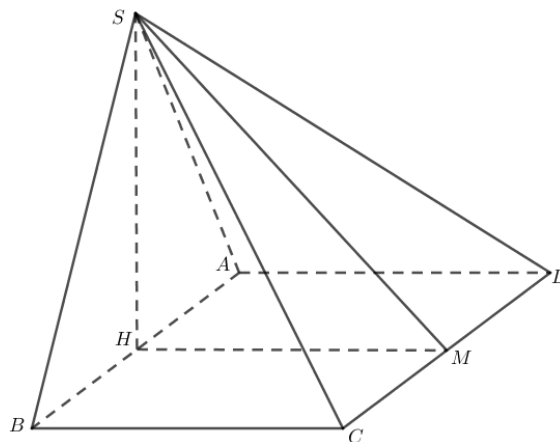


Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow \alpha = SHB$.

$$\text{Ta có } HB = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{3a \cdot 4a}{5a} = \frac{12a}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SB}{BH} = \frac{2a}{\frac{12a}{5}} = \frac{5}{6}.$$

Câu 8: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Ta có: $SH \perp AB$, $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

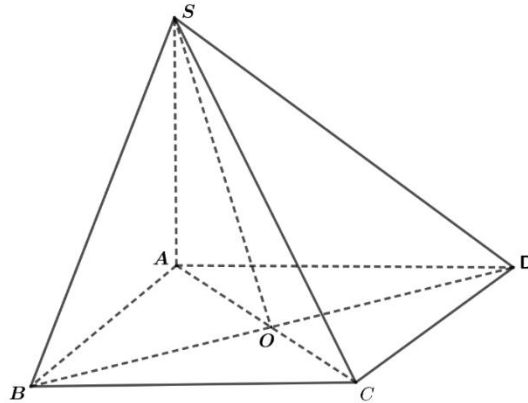
Do đó: $AB \perp SH, MN$. Suy ra $AB \perp (SHM)$, mà $AB \parallel CD$ nên $(SHM) \perp (SAB), (SCD)$.

Vậy $\alpha = MSH$.

Xét tam giác SMH vuông tại H có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = a$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{HM}{HS} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$

Lời giải



Gọi O là tâm của $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \end{cases}$

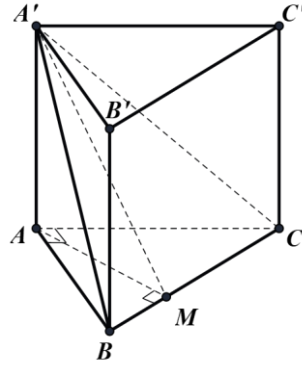
Suy ra $((SBD), (ABCD)) = (SO, AC) = SOA$

Tam giác SAO vuông tại A : $\tan SOA = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow SOA = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$.

Lời giải



Kẻ $AM \perp BC$ tại M . Lại có $AA' \perp BC$. Suy ra $BC \perp (AMA') \Rightarrow BC \perp A'M$.

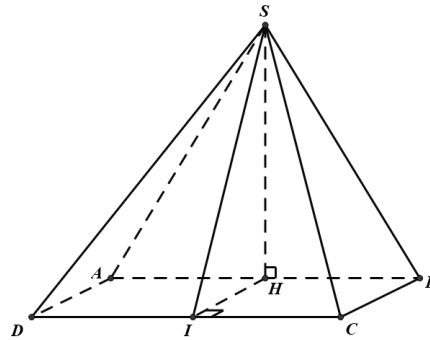
Suy ra $((A'BC), (BB'C'C)) = (A'M, AM) = A'MA = \varphi$.

Xét ΔABC vuông tại A có AM là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\tan \varphi = \frac{A'A}{AM} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Tính $\tan \varphi$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB từ giả thiết ta có được $SH \perp (ABCD)$.

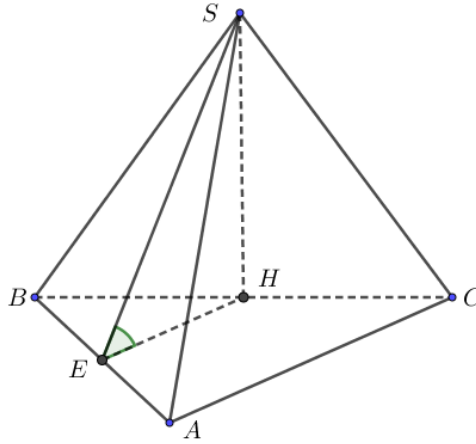
Gọi I là trung điểm của cạnh CD ta có $\begin{cases} HI \perp CD \\ HI \perp AB \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} CD \perp (SHI) \\ AB \perp (SHI) \end{cases}$, từ đây ta được $\begin{cases} (SIH) \perp (SCD) \\ (SIH) \perp (SAB) \end{cases}$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc $\varphi = HSI \Rightarrow \tan \varphi = \frac{HI}{SH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A , cạnh $BC = 3a, AC = a\sqrt{6}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) .

Lời giải



Gọi H, E lần lượt là trung điểm $BC, AC \Rightarrow HE = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

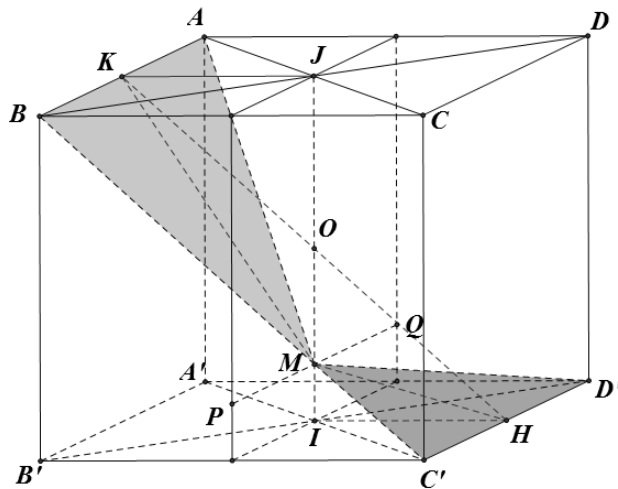
Do $SA = SB = SC$ và đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh $A \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SH^2 - BH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $\begin{cases} HE \perp AB \\ SE \perp AB \end{cases} \Rightarrow (SAB), (ABC) = SEH = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SH}{EH} = \sqrt{3} \Rightarrow (SAB), (ABC) = 60^\circ$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB)

Lời giải



Giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng $PQ // AB // C'D'$ như hình vẽ.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB . Ta có: $MH \perp PQ; MK \perp PQ$.

Suy ra $((MC'D'); (MAB)) = (MH; MK)$.

Chuẩn hóa cạnh hình lập phương bằng 1 ta tính được: $MH = \frac{\sqrt{10}}{6}$, $MK = \frac{\sqrt{34}}{6}$, $HK = \sqrt{2}$.

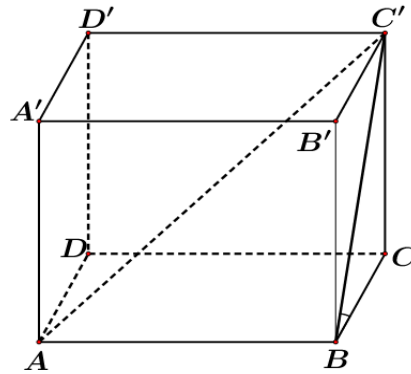
Xét tam giác HMK ta có: $\cos HMK = \frac{MH^2 + MK^2 - HK^2}{2MH.MK} = \frac{-7\sqrt{85}}{85}$.

Suy ra cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ bằng $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') .

- A. 30° . B. $\frac{1}{2}$. C. 60° . D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên nó là hình hộp chữ nhật có hai đáy là hình vuông $\Rightarrow AB \perp (BCC'B') \Rightarrow AB \perp BC'$.

Ta có $\begin{cases} BC' \perp AB \\ CB \perp AB \\ C'C \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABCD); (ABC')) = (BC'; BC) = C'BC$.

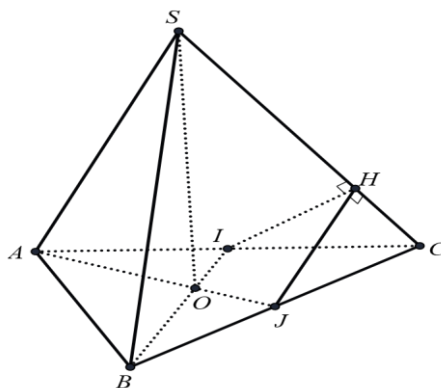
Xét tam giác $C'BC$ vuông tại C có $BC' = \sqrt{CC'^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

$\Rightarrow \cos C'BC = \frac{BC}{BC'} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

Vậy cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 15: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết $SA = SB = SC = a$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Tính $\cos \varphi$

Lời giải



Gọi O là tâm của $\triangle ABC$. Vì $SA = SB = SC$ nên $SO \perp (ABC)$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của $AC, BC \Rightarrow IJ$ là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow IJ \parallel AB$

Mà $CO \perp AB$ nên $IJ \perp CO$

Ta lại có : $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp IJ$.

Như vậy : $\begin{cases} IJ \perp CO \\ IJ \perp SO \end{cases} \Rightarrow IJ \perp (SOC) \Rightarrow IJ \perp SC$ (1).

Trong $\triangle SAC$ kẻ $IH \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có : $(IJH) \perp SC \Rightarrow JH \perp SC$.

Suy ra $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ SC \perp IH \subset (SAC) \\ SC \perp JH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow ((SAC), (SBC)) = (IH, JH)$.

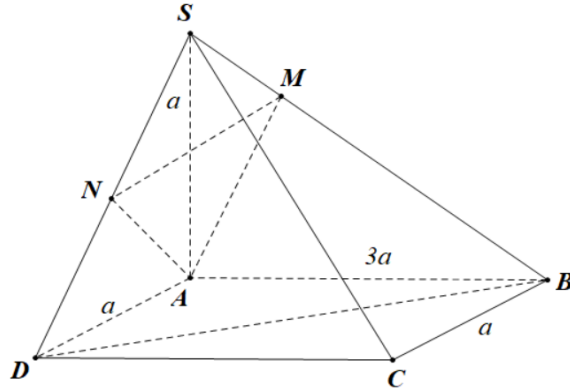
Khi đó: $\frac{SI}{SC} = \frac{IH}{IC} \Rightarrow IH = \frac{SI \cdot IC}{SC} = \frac{\sqrt{SC^2 - IC^2} \cdot IC}{SC} = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{39}}{16} = HJ$.

Vậy $\cos \varphi = \frac{IH^2 + HJ^2 - IJ^2}{2IH \cdot HJ} = \frac{\frac{39a^2}{256} + \frac{39a^2}{256} - \frac{3a^2}{16}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{39}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{39}}{16}} = \frac{5}{13}$.

Câu 16: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a; AD = a; \angle BAD = 120^\circ$.

$SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{10}SB$, N là trung điểm của SD . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lại có: $SB \cdot SM = a^2 = SA^2 \Rightarrow AM \perp SB$. Do $SA = AD = a \Rightarrow AN \perp SD$.

Mặt khác: Xét $\triangle ABD$ có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = 9a^2 + a^2 + 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 13a^2$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{13}$.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có đường kính AK

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BK \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAB) \Rightarrow BK \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBK) \Rightarrow AM \perp SK$.

Lý luận tương tự: $AN \perp SK$. Suy ra $SK \perp (AMN)$.

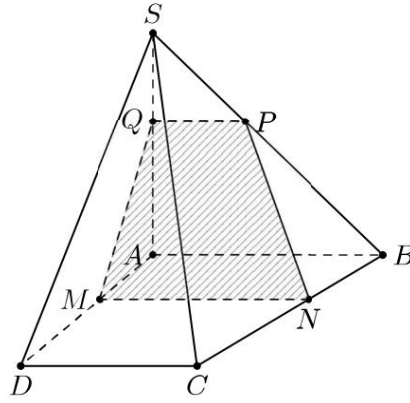
Theo giả thiết: $SA \perp (ABCD)$, suy ra $((AMN)(ABCD)) = (SA; SK) = ASK$.

Áp dụng định lý sin vào $\triangle ABD \Rightarrow AK = 2R = \frac{BD}{\sin BAD} = \frac{a\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Xét $\triangle SAK$ có: $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{55}}{\sqrt{3}}$ và $\cos ASK = \frac{SA}{SK} = \frac{\sqrt{165}}{55}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D , đáy lớn AB , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi Q là điểm trên cạnh SA và $Q \neq A, Q \neq S$, M là một điểm trên đoạn AD và $M \neq A$. Mặt phẳng (α) qua QM và vuông góc với mặt phẳng (SAD) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

Lời giải



Ta có $\left. \begin{array}{l} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (SAD)$ mà $(\alpha) \perp (SAD)$ nên $AB \parallel (\alpha)$.

Qua M dựng đường thẳng song song với AB cắt BC tại N .

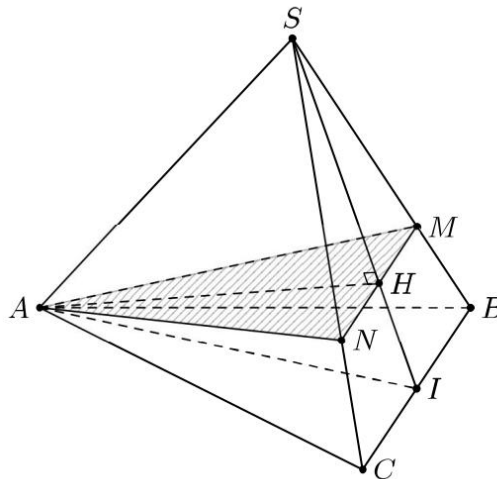
Qua Q dựng đường thẳng song song với AB cắt SB tại P .

Thiết diện là hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel AB \parallel QP$).

Do $AB \perp (SAD)$ suy ra $MN \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang vuông tại Q, M

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABC$. Mặt phẳng (α) qua A , song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho.

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC . Trong tam giác SAI kẻ $AH \perp SI$ ($H \in SI$).

Trong tam giác SBC , qua H kẻ đường song song với BC cắt SB tại N , cắt SC tại M .

Qua cách dựng có $BC \parallel (AMN)$ (1).

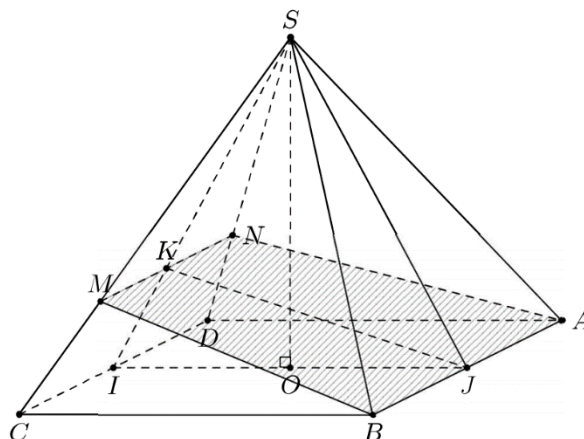
Mà $\left. \begin{array}{l} SI \perp AH \\ SI \perp MN \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp (AMN) \Rightarrow (SBC) \perp (AMN)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là tam giác AMN .

Dễ thấy H là trung điểm của MN mà $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp MN$. Tam giác AMN có đường cao AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên nó là tam giác cân đỉnh A .

Câu 19: Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .
Tìm thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho là

Lời giải



Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của $CD; AB$.

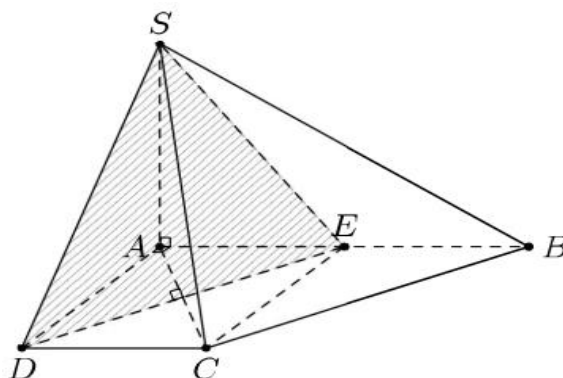
Trong tam giác SIJ kẻ $JK \perp SI$, qua K kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC tại M cắt SD tại N .

Ta dễ dàng chứng minh được $(ABMN) \perp (SCD)$.

Khi đó thiết diện cần tìm là hình thang $ABMN$. Vì hình chóp đã cho là hình chóp đều nên suy ra $AN = BM$. Vậy thiết diện là hình thang cân.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = 2a$; $AD = DC = a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua vuông góc với mặt phẳng (SAC) .
Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow AECD$ là hình vuông nên $DE \perp AC$ (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp DE$ (2)

Từ (1); (2) suy ra $DE \perp (SAC) \Rightarrow (SAD) \perp (SAC)$.

$$\text{Từ đó } \begin{cases} (SDE) \supset SD \\ (SDE) \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \equiv (SDE)$$

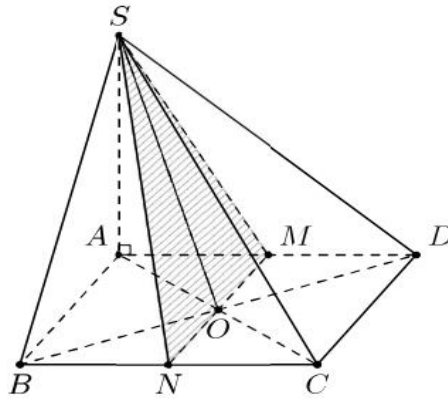
Vậy thiết diện là tam giác SDE .

$$\text{Ta có } SD = \sqrt{SA^2 + DA^2} = a\sqrt{2}; SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{2}; DE = AC = DC\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó tam giác } SDE \text{ đều có cạnh } a\sqrt{2} \text{ nên } S_{\Delta SDE} = \frac{SD^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a$; $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD) . Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho

Lời giải



Gọi $M; N$ lần lượt là trung điểm $AD; BC$. Khi đó MN đi qua O và

$$\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$$

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN .

$$\text{Tam giác } SMN \text{ vuông tại } M \text{ nên } S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} SM \cdot MN = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} \cdot AB = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}.$$

- Câu 1:** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) mà (P) và (Q) song song với nhau nên cũng sẽ có vô số mặt phẳng vuông góc với cả (P) và (Q) .

- Câu 2:** Mệnh đề nào sau đây **sai**?
- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Một đường thẳng và một mặt phẳng không chứa đường thẳng đó cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề ở đáp án A chỉ đúng trong hình học phẳng, không đúng trong không gian.

- Câu 3:** Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) . Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây.
- A. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .
B. Không tồn tại mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .
C. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) vuông góc với (P) .
D. Tồn tại duy nhất một đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và Δ vuông góc với d .

Lời giải

Chọn C

A sai. Vì trong trường hợp d cắt mặt phẳng (P) nhưng không vuông góc (P) hoặc d nằm trên (P) thì không tồn tại mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .

B sai. Vì trong trường hợp d song song (P) tồn tại một mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và (α) song song với (P) .

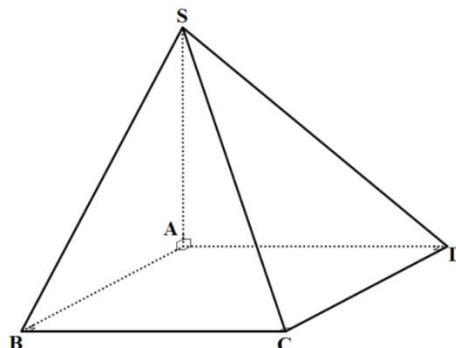
D sai. Vì tồn tại vô số đường thẳng Δ nằm trên mặt phẳng (P) và Δ vuông góc với d trong các trường hợp: d cắt (P) nhưng không vuông góc (P) hoặc d nằm trên (P) hoặc d song song (P) .

- Câu 4:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với hình vuông đáy $ABCD$. Nhận xét **sai** là:
- A. Tam giác SBC vuông tại B .

- B.** Tam giác SDC vuông tại C .
C. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAB) .
D. Mặt phẳng (SCD) vuông góc với mặt phẳng (SAD) .

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại B .

Vậy nhận xét **A** đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Vậy nhận xét **C** đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow$ tam giác SCD vuông tại D .

Vậy nhận xét **B** sai.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$. Vậy nhận xét **D** đúng.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Theo nội dung định lí về hai mặt phẳng vuông góc.

Câu 6: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q) . Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q) ?

- A.** 2 . **B.** 3 . **C.** 1 . **D.** vô số

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng qua M và Δ vuông góc với (P) . Suy ra Δ vuông góc với (Q) . Khi đó mọi mặt phẳng chứa Δ đều vuông góc với (P) và (Q) . Vậy có vô số mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

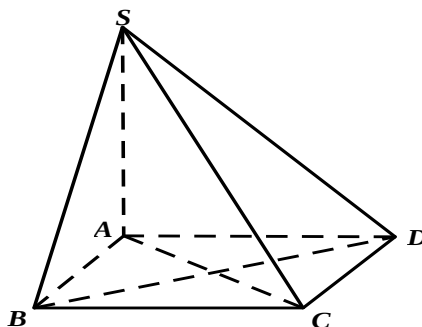
- A.** Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.
B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.
C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

Lời giải**Chọn A**

Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** $(SBC) \perp (SAB)$. **B.** $(SAB) \perp (ABCD)$. **C.** $(SAC) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (SAD)$.

Lời giải**Chọn D**

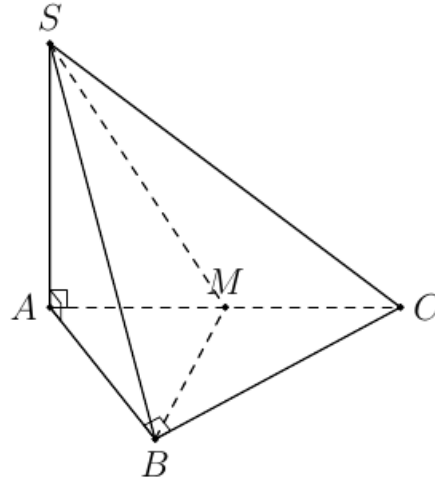
$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB).$$

$$\text{Ta có } SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD) \text{ và } (SAC) \perp (ABCD).$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải**Chọn D**



Xét phương án A: $\triangle ABC$ cân tại B, M là trung điểm AC $\Rightarrow BM \perp AC$ nên phương án A đúng.

Xét phương án B: $\begin{cases} BM \perp SA \\ BM \perp AC \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$ nên phương án B đúng.

Xét phương án C: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ nên phương án C đúng.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ AC \perp SA (SA \perp (ABC)) \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = BAC = 45^\circ \\ AB \perp SA (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = BAC = 45^\circ$ nên phương án D sai.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây

A. $(ABCD) \perp (SBD)$.

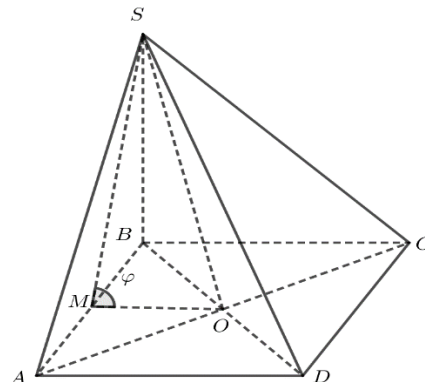
B. $(SAB) \perp (ABCD)$.

C. $(SAC) \perp (SBD)$.

D. $(SAC) \perp (ABCD)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB. Suy ra $\begin{cases} MO \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = SMO = \varphi$.

Tam giác SMO vuông tại O nên $\varphi \neq 90^\circ$.

góc với (P) ?

A. 1.

B. 2.

C. Vô số.

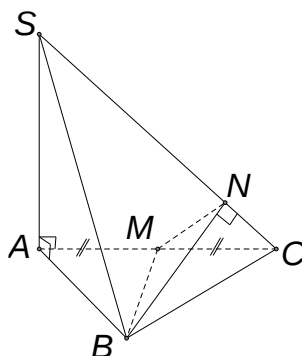
D. 3.

Lời giải

Chọn C

Theo lý thuyết có vô số mặt phẳng qua M và vuông góc với (P) .

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC , N là hình chiếu của B lên SC (như hình minh họa bên dưới). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $(BMN) \perp (SBC)$. B. $(SAC) \perp (SAB)$. C. $(BMN) \perp (ABC)$. D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow BM \perp SA$

Mà $BM \perp AC$ (Tính chất đường trung tuyến trong tam giác đều)

$\Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow SC \Rightarrow SC \perp BM$ (1).

Theo giả thiết: $SC \perp BN$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BMN)$.

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BMN) \perp (SBC)$.

Câu 15: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC ; kẻ IH vuông góc SA ($H \in SA$). Khẳng định nào sau đây sai?

A. $SA \perp BH$.

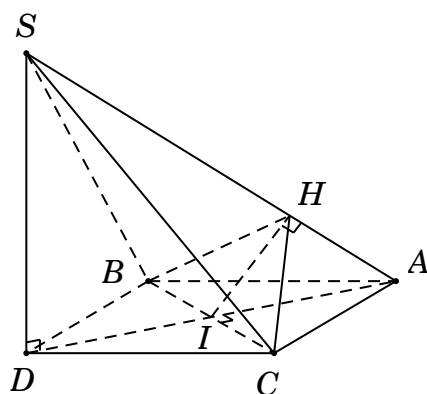
B. $(SDB) \perp (SDC)$.

C. $(SAB) \perp (SAC)$.

D. $BH \perp HC$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA.$$

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$ (1).

$$\text{Tính được } AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}, SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $\triangle AHI \sim \triangle ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI \cdot SD}{AS} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\angle BHC = 90^\circ$ hay $BH \perp HC$ (2)

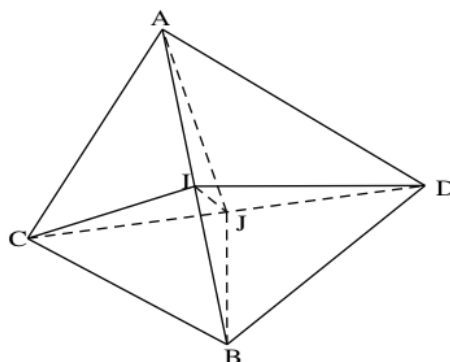
Từ (1), (2) suy ra $BH \perp (SAC) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$.

Câu 16: Cho tam giác ACD và tam giác BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau và $AC = AD = BC = BD = a; CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$.

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD .

Suy ra $CI \perp AB; DI \perp AB$ mà $(ABC) \cap (ABD) = AB$.

Do đó $(ABC) \wedge (ABD) \hat{=} CID = 90^\circ \hat{=} IJ = \frac{1}{2}CD$.

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ AJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp JB$.

Mặt khác $JA = JB$ ($\triangle ACD = \triangle BCD$) nên tam giác JAB vuông cân tại J .

Do đó $IJ = \frac{\sqrt{2}}{2}JA = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{AC^2 - JC^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Vậy $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 - x^2} = x \Leftrightarrow a^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B ; $SA \perp (ABC)$. Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc nào?

A. SBC .

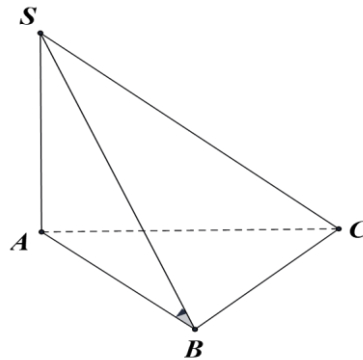
B. SBA .

C. SCB .

D. SCA .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $((SBC); (ABC)) = SBA$

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha = \sqrt{6}$.

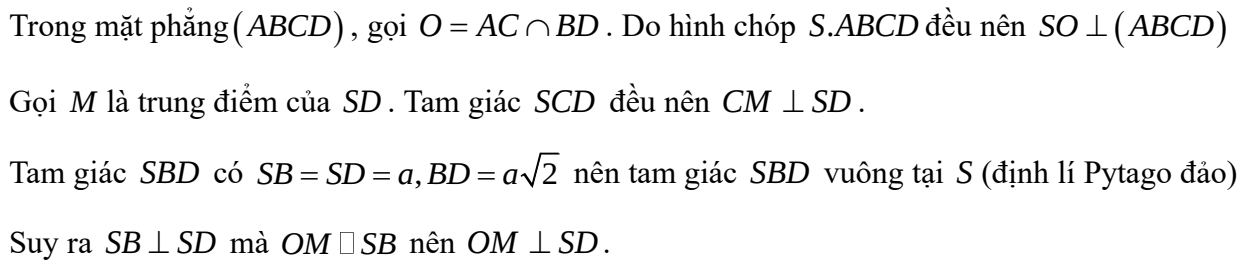
B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của SD . Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a, BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông tại S (định lí Pytago đảo)

Suy ra $SB \perp SD$ mà $OM \parallel SB$ nên $OM \perp SD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ (SBD) \supset OM \perp SD \\ (SCD) \supset CM \perp SD \end{cases} \Rightarrow ((SBD)(SCD)) = OMC.$$

Lại có: $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM.$

Xét tam giác vuông MOC, có $\tan CMO = \frac{OC}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{2}$.

A. 30^0 .

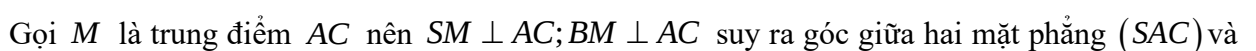
B. 45^0 .

C. 60⁰.

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



(ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng $(SM; BM)$ bằng SMB

Tính được $AC = a\sqrt{2}; SM = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác SBM vuông cân tại S nên góc $SMB = 45^\circ$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

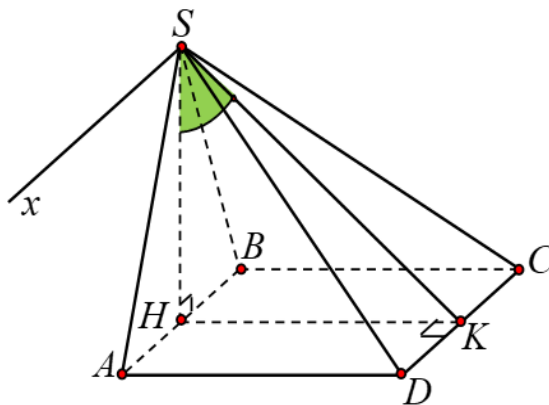
B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm AB

Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$$

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ (SAB) \supset SH \perp Sx \\ (SCD) \supset SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SCD)) = HSK, \text{ với } K \text{ là trung điểm } CD.$$

$$\text{Xét tam giác } HSK \text{ vuông tại } H \text{ có: } \tan HSK = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan((SAB), (SCD)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a$, $AC = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30° .

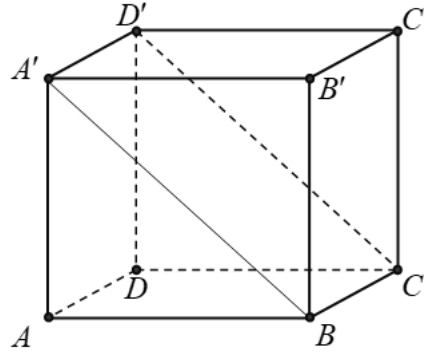
B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có: $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ BA' \perp BC \\ (ABCD) \cap (A'D'CB) = BC \end{cases}$

Góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc ABA' .

$$\tan A'BA = \frac{A'A}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AC^2 - BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow A'BA = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 45° .

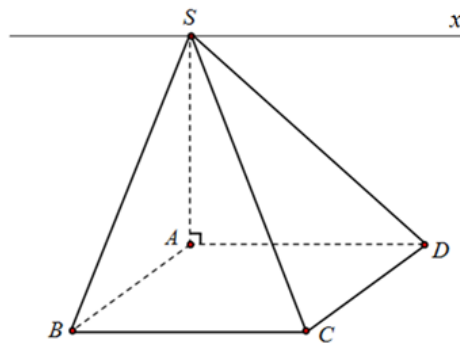
B. 30° .

C. 60° .

D. 90°

Lời giải

Chọn A



Ta có: $(SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD$

Ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow Sx \perp SB$

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow SA \perp Sx$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $BSA = 45^\circ$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$, $BC = a$, tam giác ABC vuông tại B . Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , (α) là mặt phẳng chứa CG và song song với AB . Giá trị của

côsin góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (SAB) là

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

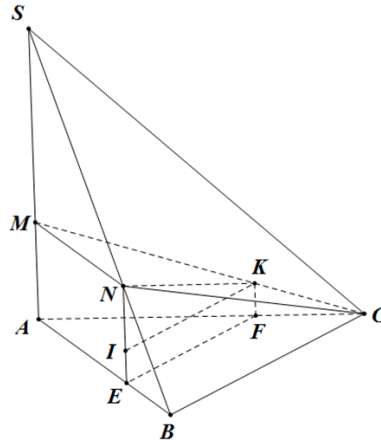
B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (α) với SA, SB ta có giao tuyến của (α) và (SAB) là MN

Ta có MN đi qua G và song song với AB

Kẻ NE song song với SA , $E \in AB \Rightarrow NE \perp (ABC)$, $NE = a$

Kẻ EF song song với BC , $F \in AC \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$

Kẻ FK song song với SA , $K \in CM \Rightarrow FK = \frac{a}{3}$

Dễ thấy $AB \perp (NEFK) \Rightarrow MN \perp (NEFK) \Rightarrow EN \perp MN, NK \perp MN$

Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng (α) và (SAB) là (NE, NK)

Kẻ KI song song với EF , $I \in NE \Rightarrow IN = \frac{2a}{3}$

Khi đó tam giác NIK vuông cân tại $I \Rightarrow \cos(NE, NK) = |\cos \angle INK| = |\cos 45^\circ| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

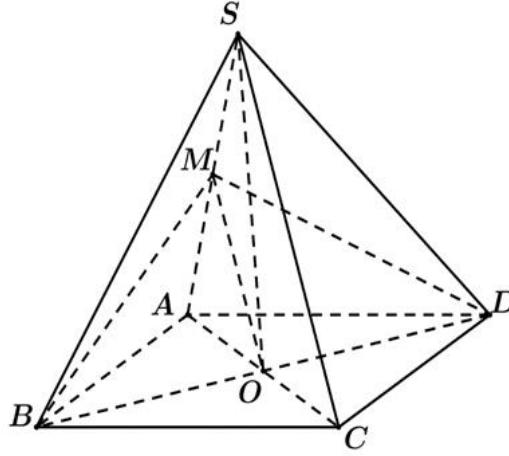
B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M trung điểm SA . Ta có $\triangle SAB$ cân tại $B \Rightarrow BM \perp SA$ (1)

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, lại có O trung điểm $BD \Rightarrow \triangle SBD$ cân tại S

nên $SD = SB = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle SAD$ cân tại D nên $DM \perp SA$ (2)

Lại có $(SAB) \cap (SAD) = SA$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow ((SAB), (SAD)) = BMD$ hoặc $((SAB), (SAD)) = 180^\circ - BMD$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại $O \Rightarrow OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a \Rightarrow BD = 2a$.

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O có $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = a \Rightarrow OA = OC = a$.

Xét $\triangle SOC \Rightarrow SC = a\sqrt{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MO$. Mặt khác $OD = OB$ nên $\triangle BDM$ cân tại M .

Xét $\triangle BOM$ vuông tại $O \Rightarrow BM = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DM = BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét $\triangle BDM \Rightarrow \cos(BMD) = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2BM \cdot DM} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \cos((SAB); (SAD)) = \frac{1}{3}$.

Vậy $\tan((SAB); (SAD)) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Tìm tỉ số độ dài $\frac{SA}{AB}$ để hai mặt phẳng $(ABPQ), (CDMN)$ vuông góc với nhau.

A. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

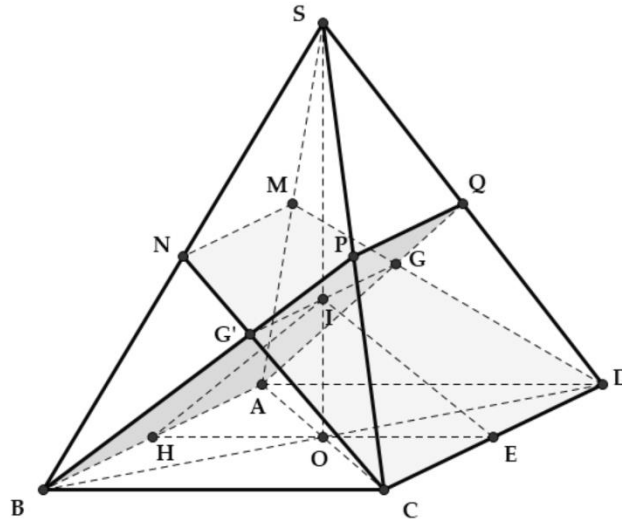
B. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

C. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{23}}{4}$.

D. $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $BC = a$. Gọi G', G lần lượt là trọng tâm của $(SBC), (SAD)$.

Đồng thời $I = GG' \cap SO$, H, E là trung điểm AB, CD

Khi đó $((ABPQ), (CDMN)) = (HI; IE)$

Theo giả thiết ta có: $IO = OE = \frac{a}{2}$

Và $SO = 3IO = \frac{3a}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$

Do đó: $\frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Đáy ABC có

$BC = a$ và $BAC = 150^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là

A. 60° .

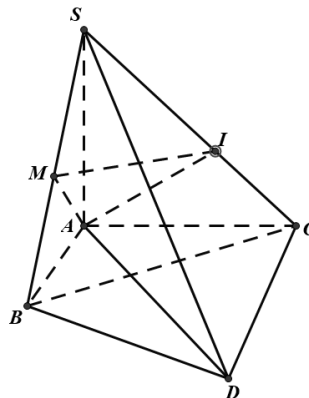
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn A



Gọi điểm $D \in (ABC)$ sao cho $DB \perp AB; DC \perp AC$

Ta chứng minh được $BD \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow SD \perp AM$

Tương tự: $SD \perp AN$

Vậy $SD \perp (AMN)$; mà $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là góc giữa SA và SD .

Xét tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp và có $AD = 2R = \frac{BC}{\sin BAC} = 2a$.

Xét tam giác vuông SAD , có $\tan ASD = \frac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow ASD = 60^\circ$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. 30° .

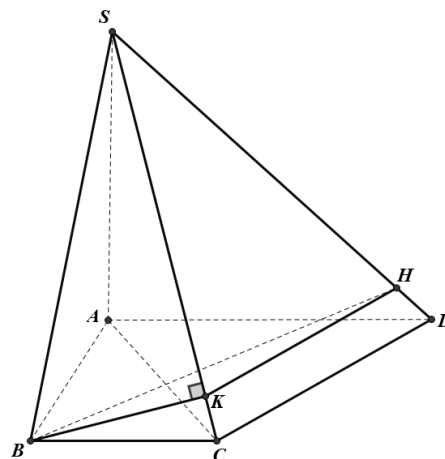
B. 150° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}; CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại C do

$SC^2 + CD^2 = SD^2 \Rightarrow SC \perp CD$

$\triangle SAB$ có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$

Ta có $\triangle SBC : SC^2 = SB^2 + BC^2 \Rightarrow \triangle SBC$ vuông

Trong $\triangle SBC$ kẻ $BK \perp SC = K$

Ta có $CD \perp (SAC)$ suy ra $CD \perp SC$

Trong $\triangle SCD$ có $CD \perp SC$, từ K kẻ $KH // CD$

Góc giữa (SBC) và (SCD) là góc giữa BK và KH

$$\text{Xét } \triangle SBC \text{ có } BK.SC = SB.BC \Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Xét } \triangle SBK \text{ có } SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Trong $\triangle SCD$ có KH song song với CD nên theo định lý Talet

$$\frac{SH}{SD} = \frac{SK}{SC} = \frac{KH}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow KH = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; SH = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

Xét $\triangle SBD$ theo định lý cosin trong tam giác: ($\triangle SBD$ có $SB = a\sqrt{2}; SD = BD = a\sqrt{5}$)

$$\cos BSD = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \text{ mà}$$

$$\cos BSH = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{SB^2 + SH^2 - BH^2}{2.SB.SH} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{26}}{3}$$

$$\cos BKH = \frac{KB^2 + KH^2 - BH^2}{2.KB.KH} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra góc BKH bằng 150° do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 30° .

Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi α là góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$ và β là góc giữa mặt phẳng $(A'BC')$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Biết

$\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{m}{n}$ (với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{m}{n}$). Khi đó giá trị của biểu thức $T = m + 2n$ bằng

A. $T = 3$.

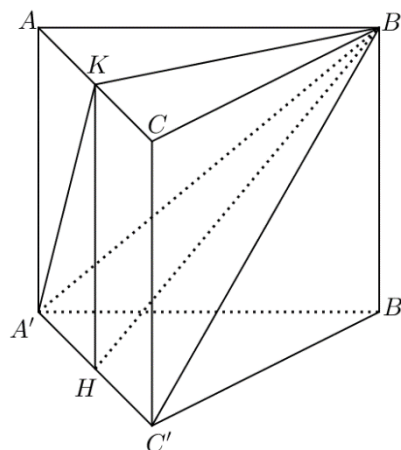
B. $T = 5$.

C. $T = 7$.

D. $T = 9$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $A'C', AC$.

Khi đó $BK \perp (ACC'A') \Rightarrow \alpha = (A'B, (ACC'A')) = BA'K \Rightarrow \cot^2 \alpha = \frac{A'K^2}{BK^2}$.

Do $HK \perp A'C', BH \perp A'C' \Rightarrow \beta = ((A'BC'), (ACC'A')) = BHK \Rightarrow \cot^2 \beta = \frac{HK^2}{BK^2}$.

Khi đó $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta = \frac{A'K^2 - HK^2}{BK^2} = \frac{A'H'^2}{BK^2} = \frac{AK^2}{BK^2} = \frac{AK^2}{AB^2 - AK^2} = \frac{AK^2}{4AK^2 - AK^2} = \frac{1}{3}$.

Vậy $m = 1; n = 3 \Rightarrow m + 2n = 7$.

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

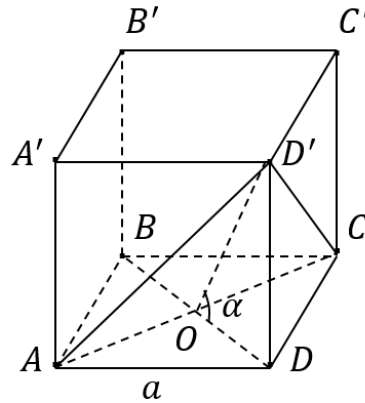
B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C



Ta có:
$$\begin{cases} (ACD') \cap (ABCD) = AC \\ OD' \subset (ACD') \\ OD \subset (ABCD) \\ OD' \perp AC, OD \perp AC \end{cases} \Rightarrow ((ACD'), (ABCD)) = (OD', OD) = \alpha.$$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ bằng (OD', OD) .

Xét tam giác ODD' vuông tại D , $\sin \alpha = \frac{DD'}{OD'} = \frac{DD'}{\sqrt{DD'^2 + OD^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 30: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAD cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và có đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC . Giá trị tang của góc giữa hai mặt phẳng (SDM) và (SAM) bằng

A. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

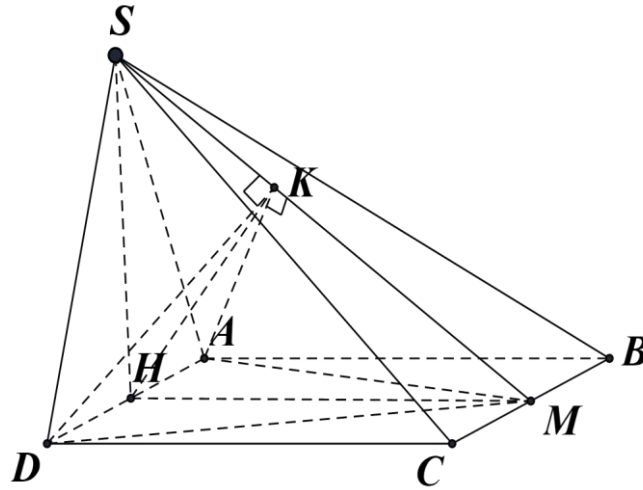
B. $\frac{4\sqrt{21}}{5}$.

C. $\frac{4\sqrt{21}}{42}$.

D. $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: Kẻ $DK \perp SM \Rightarrow AK \perp SM$ (vì $\triangle SDM = \triangle SAM$).

Suy ra: $((SDM); (SAM)) = (DK; AK) = DKA$

Trong $\triangle SHM$ vuông tại H có $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{3a^2 + 4a^2} = a\sqrt{7}$.

Suy ra: $HK \cdot SM = SH \cdot HM \Rightarrow HK = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2a}{a\sqrt{7}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Trong $\triangle DAK$ cân tại K (vì $DK = AK$) ta có $\tan DKH = \frac{DH}{HK} = a \frac{7}{2a\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{42}$.

Vậy $\tan DKA = \frac{2 \tan DKH}{1 - (\tan DKH)^2} = \frac{2 \cdot \frac{7\sqrt{21}}{42}}{1 - \left(\frac{7\sqrt{21}}{42}\right)^2} = \frac{4\sqrt{21}}{5}$.

Câu 31: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . O là giao điểm của AC và BD , I là điểm đối xứng với O qua $(A'B'C'D')$. Mặt phẳng (IAD) cắt $A'B'$ tại M . Cosin góc giữa (MAD) và (MBC) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13\sqrt{17}}{85}$.

B. $\frac{13\sqrt{5}}{85}$.

C. $\frac{15\sqrt{15}}{85}$.

D. $\frac{17\sqrt{17}}{85}$.

Lời giải

Chọn A

Trong $(A'C'AC)$, gọi $E = IA \cap A'C'$. Trong $(B'D'BD)$, gọi $F = ID \cap B'D'$.

Suy ra $(IAD) \cap (A'B'C'D') = EF$.

Trong $(A'B'C'D')$, kẻ EF cắt $A'B'$ tại M , gọi $O' = A'C' \cap B'D'$

$$E, F \text{ lần lượt là trung điểm của } IA, ID \Rightarrow \begin{cases} EF // AD \\ EF = \frac{1}{2} AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EF // A'D' \\ EF = \frac{1}{2} A'D' \end{cases}$$

Suy ra E, F lần lượt là trung điểm $O'A', O'D'$

Suy ra $EF // A'D'$. Do đó MF là giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (MAD) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (MBC) \cap (MAD) = MF \\ BM \perp MF \text{ (do } MF \perp (A'B'BA)) \\ AM \perp MF \text{ (do } MF \perp (A'B'BA)) \end{cases}$$

Suy ra $((MAD), (MBC)) = AMB$.

$$\text{Xét } \triangle AMB \text{ có: } AB = a, AM = \frac{\sqrt{17}}{4}a, BM = \frac{5}{4}a.$$

$$\text{Suy ra: } \cos AMB = \frac{BM^2 + AM^2 - AB^2}{2 \cdot BM \cdot AM} = \frac{13\sqrt{17}}{85}.$$

Câu 32: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị góc

α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Vì hình chóp $S.ABC$ đều nên $SG \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $AM \perp BC$.

Ta có: GM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) nên $SM \perp BC$.

Lại có:

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SBC) \supset SM \perp BC \\ (ABC) \supset AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC)(ABC)) = SMA = SMG.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ đều có } AM \text{ là đường trung tuyến, } G \text{ là trọng tâm nên } GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Tam giác SMB vuông tại M nên:

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow SM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên:

$$\cos SMG = \frac{GM}{SM} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow SMG = 60^\circ.$$

Câu 33: Cho hình lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng ABC là trọng tâm G , hình lăng trụ có cạnh bằng $6a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{21}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. 60° .

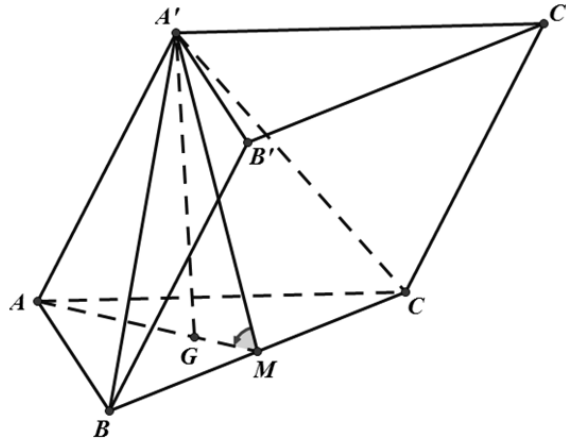
B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

Tam giác ABC đều nên ta có: $AM \perp BC$ (1).

Hình chiếu của A' là trọng tâm G nên $A'G \perp (ABC) \Rightarrow A'G \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BC \perp (A'GM) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Ta lại có $(ABC) \cap (A'BC) = BC \Rightarrow ((A'BC); (ABC)) = (GM; A'M) = A'MG = \varphi$

Ta có: $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}6a \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$; $AG = \frac{2}{3}GM = 2a\sqrt{3}$

Tam giác $A'AG$ vuông tại G nên: $A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{(a\sqrt{21})^2 - (2a\sqrt{3})^2} = 3a$

Ta có: $\tan \varphi = \frac{A'G}{GM} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Suy ra $\varphi = 60^\circ$.

Câu 34: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a$, $AD = a$, $BAD = 120^\circ$.

$SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{10}SB$, N là trung điểm

của SD . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$

A. $\frac{\sqrt{165}}{55}$.

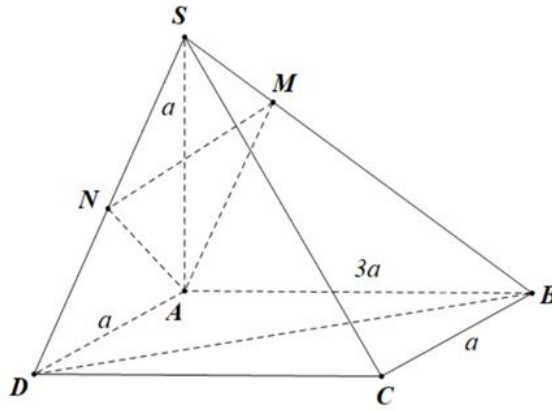
B. $\frac{2\sqrt{715}}{55}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lại có: $SB \cdot SM = a^2 = SA^2 \Rightarrow AM \perp SB$. Do $SA = AD = a \Rightarrow AN \perp SD$.

Mặt khác: Xét $\triangle ABD$ có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 120^\circ = 9a^2 + a^2 + 2 \cdot 3a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 13a^2$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{13}$.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có đường kính AK

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BK \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAB) \Rightarrow BK \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBK) \Rightarrow AM \perp SK$.

Lý luận tương tự: $AN \perp SK$. Suy ra $SK \perp (AMN)$.

Theo giả thiết: $SA \perp (ABCD)$, suy ra $((AMN)(ABCD)) = (SA; SK) = ASK$.

Áp dụng định lý sin vào $\triangle ABD \Rightarrow AK = 2R = \frac{BD}{\sin BAD} = \frac{a\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Xét $\triangle SAK$ có: $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{55}}{\sqrt{3}}$ và $\cos ASK = \frac{SA}{SK} = \frac{\sqrt{165}}{55}$.

Câu 35: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) cắt tất cả các cạnh bên của hình lập phương. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) biết (α) tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 60° .

A. $2\sqrt{3}$.

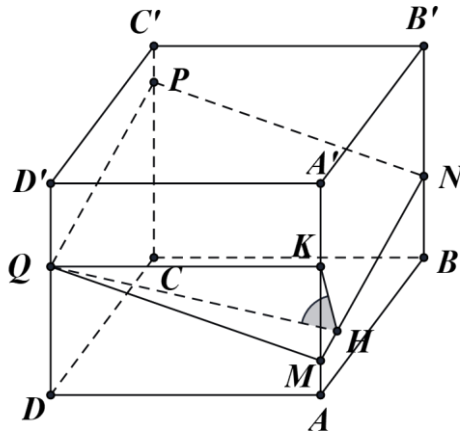
B. $\frac{3}{2}$.

C. 6.

D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh bên AA', BB', CC', DD' .

Thiết diện của (α) với hình lập phương là hình bình hành $MNPQ$. Kẻ QH vuông góc với MN , QK vuông góc với AA' . Suy ra $HK \perp MN$.

$$\begin{aligned} & \text{Vì } \begin{cases} QH \perp MN \\ HK \perp MN \end{cases} \Rightarrow (MNPQ) \perp (ABB'A') = MN \\ & \Rightarrow ((MNPQ), (ABB'A')) = (QH, HK) = QHK = 60^\circ. \end{aligned}$$

$$DQKH \text{ vuông tại } K \text{ nên } \sin 60^\circ = \frac{QK}{QH} \Rightarrow QH = \frac{QK}{\sin 60^\circ} = 2; KH = \frac{QK}{\tan 60^\circ} = 1.$$

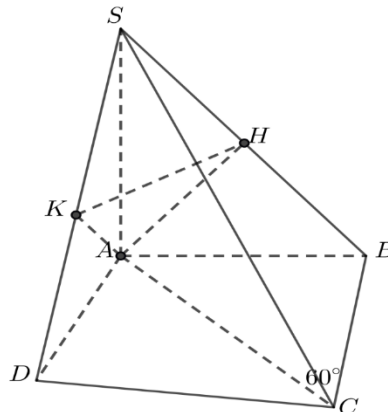
Do đó ta tìm được $MN = \sqrt{3}$. Vậy diện tích của thiết diện $S_{MNPQ} = 2\sqrt{3}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = AB\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC , $\angle ACB = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD . Tính $\tan$ của góc hợp bởi mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết: $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC nên tam giác ABC vuông

tại B và tam giác ADC vuông tại D , do đó $AB \perp BC, AD \perp DC$.

Nhận thấy: $AH \perp SB$, mà $AH \perp BC$ (do $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$)

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \quad (1)$$

Lại có: $AK \perp SD$, mà $AK \perp CD$ (do $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD)$)

$$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra $SC \perp (AHK)$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD)$

Ta được góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SA, SC .

$$\Rightarrow ((AHK), (ABCD)) = \angle ASC$$

$$\text{Ta có: } \tan \angle ASC = \frac{AC}{AS} = \frac{\frac{AB}{\sin 60^\circ}}{\frac{AB}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{AB\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

A. 90° .

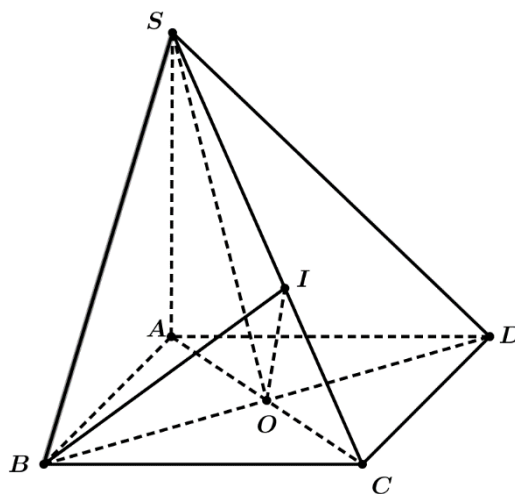
B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ AC \perp BD, AC \subset (ABCD) \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = (AO, SO) = SOA = \alpha \\ SO \perp BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan \alpha = \frac{SA}{AO} \Rightarrow SA = AO \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = a$$

Trong ΔSOC kẻ đường cao $OI, (I \in SC)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp OI \\ SC \perp BD, (BD \perp (SAC)) \Rightarrow SC \perp (BIO) \Rightarrow SC \perp BI \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ OI \perp SC, OI \subset (SAC) \Rightarrow ((SBC), (SAC)) = (OI, BI) = BIO \\ BI \perp SC, BI \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Delta ICO \sim \Delta ACS (g - g) \Rightarrow \frac{IO}{AS} = \frac{CO}{CS} \Rightarrow IO = AS \cdot \frac{CO}{\sqrt{AC^2 + AS^2}} = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Delta BOI : \tan BIO = \frac{BO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow BIO = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } ((SBC), (SAC)) = 60^\circ$$

Câu 38: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC . Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

Tính diện tích tam giác AMN theo a .

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$.

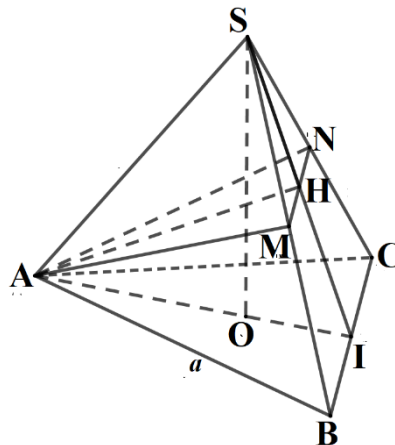
B. $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta thấy do hình chóp $S.ABC$ đỉnh S là chóp tam giác đều nên $AB = BC = AC = a$.

$$\Delta SAB = \Delta SAC (c.c.c) \Rightarrow AM = AN.$$

Do đó tam giác AMN cân tại A . Gọi H là trung điểm của MN thì $AH \perp MN$ và I là trung điểm của BC .

$$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SH; AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow \text{Xét tam giác } SAI \text{ có đường} \\ \text{Trong } (AMN): AH \perp MN$$

AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác SAI cân tại A .

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA = SB.$$

$$\text{Xét tam giác } SBI \text{ vuông tại } I \text{ nên } SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có: } SH = \frac{1}{2} SI = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Xét tam giác } ASH \text{ vuông tại } H \text{ nên } AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$, $AD = 2AB = 2BC = 2a$. Côsin của góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

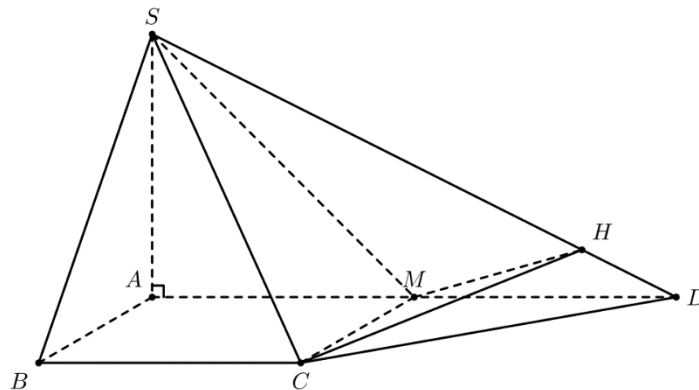
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

D. $\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AD thì $ABCM$ là hình vuông nên $CM \perp AD$ suy ra $CM \perp (SAD)$.

Kẻ $MH \perp SD$ ($H \in SD$) thì $SD \perp (CMH)$.

Ta có $\begin{cases} (SAD) \cap (SCD) = SD \\ SD \perp (CMH) \end{cases}$ nên góc giữa (SAD) và (SCD) là góc MHC .

Trong $\triangle SAD$ thì $\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin SDA = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Trong $\triangle MHD$ vuông tại H thì $\sin SDA = \frac{MH}{MD} \Rightarrow MH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\triangle MHC$ vuông tại M thì $HC = \sqrt{MC^2 + MH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: $\cos MHC = \frac{MH}{HC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A , cạnh $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{6}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC)

A. 30° .

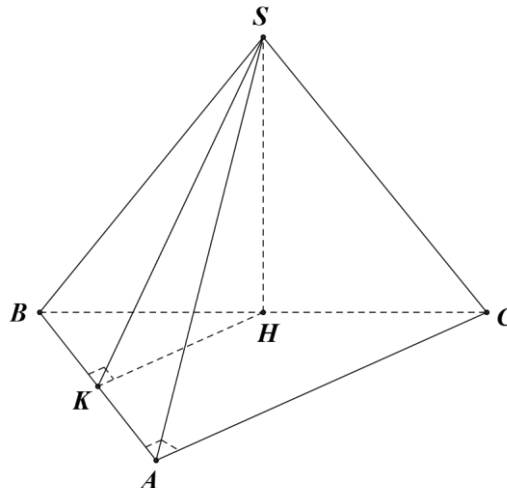
B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A nên $SH \perp (ABC)$ với H là trung điểm của BC .

Dựng $HK \perp AB$ ($K \in AB$).

Mà $AB \perp SH$ ($SH \perp (ABC)$) nên $AB \perp (SHK)$. Từ đó suy ra $AB \perp SK$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ HK \subset (ABC), HK \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABC)) = (HK, SK) = SKH. \\ SK \subset (SAB), SK \perp AB \end{cases}$$

$$HK = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \text{ (vì } HK \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC).$$

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\tan SKH = \frac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow SKH = 60^\circ.$$

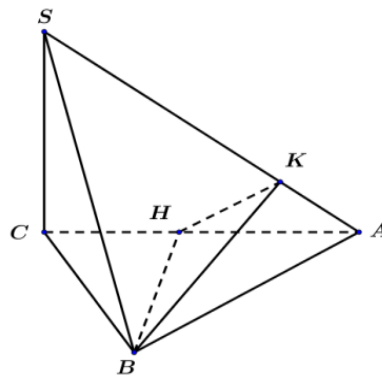
Vậy góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60° .

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAC) bằng α với $\cos \alpha = \sqrt{\frac{6}{19}}$. Tính độ dài SC theo a

A. $SC = \sqrt{6}a$. B. $SC = 2\sqrt{6}a$. C. $SC = \sqrt{7}a$. D. $SC = 6a$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Kẻ } \begin{cases} BH \perp AC \\ H \in AC \end{cases} \text{ và } \begin{cases} HK \perp SA \\ K \in SA \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} SA = (SAC) \cap (SAB) \\ HK \perp SA, HK \subset (SAC) \Rightarrow ((SAC), (SAB)) = (HK, BK) = HKB = \alpha. \\ BK \perp SA, BK \subset (SAB) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}.$$

$$BH = \frac{BA \cdot BC}{AC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{\frac{6}{19}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{13}{19}} \\ \alpha \in [0; 90^\circ] \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \sin \alpha = \frac{BH}{BK} \Rightarrow BK = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{13}{19}}} = \frac{a\sqrt{38}}{\sqrt{39}}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp SB.$$

Khi đó tam giác SAB vuông tại B .

$$\text{Do đó: } \frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SB^2} \Rightarrow SB^2 = 38a^2 \Rightarrow SB = \sqrt{38}a.$$

Tam giác SBC vuông tại A . Khi đó: $SC = \sqrt{SB^2 - BC^2} = 6a$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD . Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng

A. 90° .

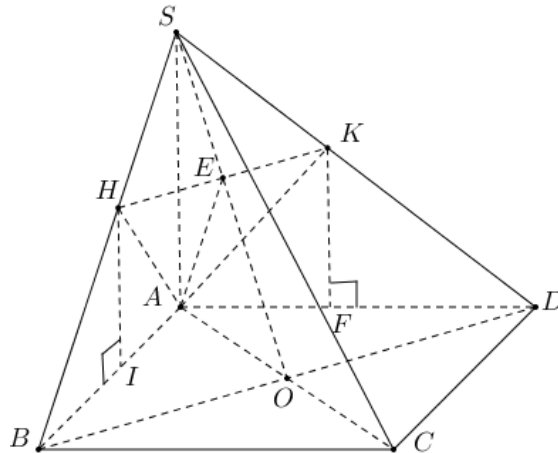
B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c - g - c)

Từ đó suy ra: $AH = AK \Rightarrow$ Tam giác AHK cân tại A . (1)

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD, \text{ mà } BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AE. (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE$ vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến.

Xét tam giác SAB vuông tại A có:

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}; AH.SB = SA.AB \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}, \text{ mà } HK // BD \text{ nên } \frac{SH}{SB} = \frac{HE}{BO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{AH^2 - HE^2} = \frac{2}{3}a \Rightarrow S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}AE.HK = \frac{1}{2}AE.2HE = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2.$$

Dựng $HI // SA$ và $KF // SA$, khi đó I, F lần lượt là hình chiếu của H, K trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow$ Tam giác AIF là hình chiếu vuông góc của tam giác AHK trên mặt phẳng đáy.

$$\text{Ta có: } AF = AI = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}a \Rightarrow S_{\Delta AIF} = \frac{1}{2}AI.AF = \frac{2}{9}a^2.$$

$$\text{Khi đó: } \cos \alpha = \frac{S'}{S} = \frac{S_{\Delta AIF}}{S_{\Delta AHK}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, có ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$ và $BB' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm G của tam giác ABC . Tang góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

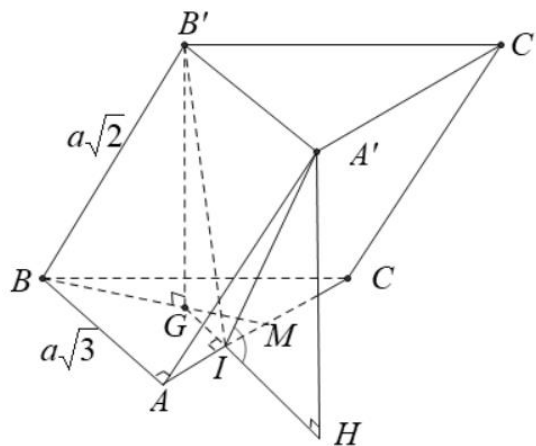
B. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

C. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

D. $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AC , ta có $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = 2a$, $BG = \frac{2}{3}BM = \frac{4a}{3}$ và

$$B'G = \sqrt{BB'^2 - BG^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Kẻ $GI \perp AC$ và $A'H \perp GI$ tại H thì tứ giác $A'B'GH$ là hình chữ nhật.

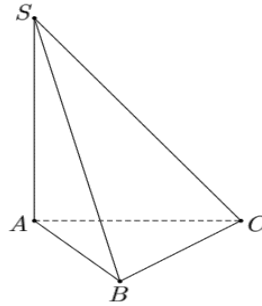
$$\text{Ta có } A'H = B'G = \frac{a\sqrt{2}}{3}, GH = A'B' = a\sqrt{3} \text{ mà } GI = \frac{1}{3}AB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AC \perp IH \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'IH)$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và (ABC) là $A'IH$

Xét tam giác $A'IH$ vuông tại H có $\tan A'IH = \frac{A'H}{IH} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác cân tại A , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .



A. 30°

B. 120°

C. 60°

D. 90°

Lời giải

Chọn C

Ta có $(SAC) \cap (SAB) = SA$

$AB \subset (SAB), AB \perp SA$ do $SA \perp (ABC)$.

$AC \subset (SAC), AC \perp SA$ do $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $((SAC), (SAB)) = (AB, AC)$.

Khi đó: $\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}$

Do đó $BAC = 120^\circ$. Do đó $((SAC), (SAB)) = (AB, AC) = 60^\circ$

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

A. 90° .

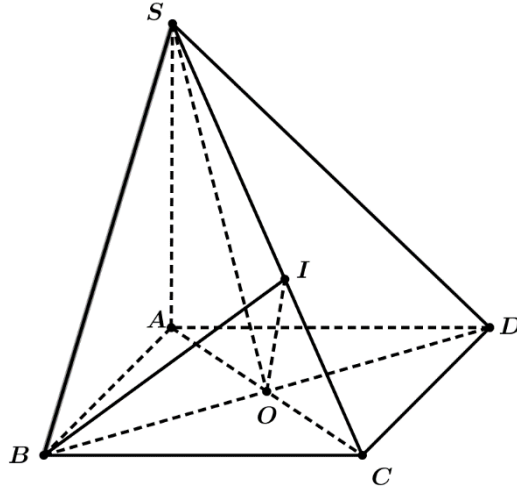
B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ AC \perp BD, AC \subset (ABCD) \Rightarrow ((SBD), (ABCD)) = (AO, SO) = SOA = \alpha \\ SO \perp BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan \alpha = \frac{SA}{AO} \Rightarrow SA = AO \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = a$$

Trong ΔSOC kẻ đường cao $OI, (I \in SC)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp OI \\ SC \perp BD, (BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BIO) \Rightarrow SC \perp BI$$

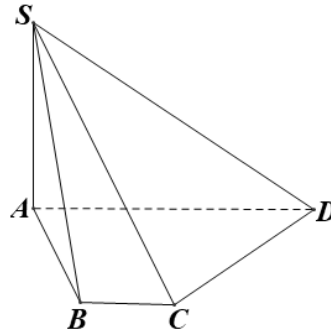
$$\text{Do đó: } \begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ OI \perp SC, OI \subset (SAC) \Rightarrow ((SBC), (SAC)) = (OI, BI) = BIO \\ BI \perp SC, BI \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Delta ICO \sim \Delta ACS (g - g) \Rightarrow \frac{IO}{AS} = \frac{CO}{CS} \Rightarrow IO = AS \cdot \frac{CO}{\sqrt{AC^2 + AS^2}} = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Delta BOI : \tan BIO = \frac{BO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow BIO = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } ((SBC), (SAC)) = 60^\circ$$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng

A. 30° .

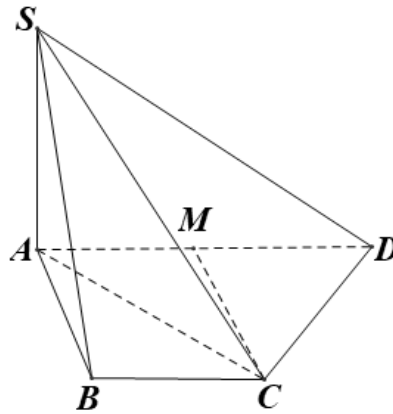
B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn A



Vì $\begin{cases} AM = BC = AB = a \\ AM \parallel BC \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a

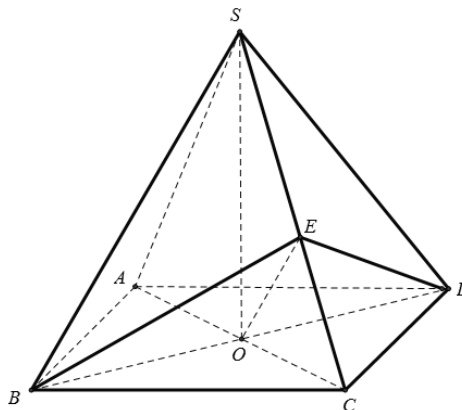
$\Rightarrow CM = AM = MD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp CD \Rightarrow SC \perp CD$.

Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (SC, AC) = SCA$.

Ta có: $SA = a$

$$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SCA = 30^\circ.$$

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA = 2a$.
Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SAC) bằng



A. $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

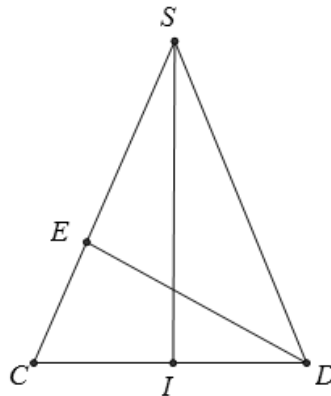
Ta có: $\left. \begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Kê $DE \perp SC$, khi đó: $SC \perp (BED)$

Lại có: $\left. \begin{array}{l} (SAC) \cap (SDC) = SC \\ SC \perp (BDE) \\ (BDE) \perp (SAC) = OE \\ (BDE) \perp (SDC) = DE \end{array} \right\} \Rightarrow ((SAC), (SDC)) = (OE, DE)$

$$BD = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2a \Rightarrow OD = a.$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong } \triangle SOC: \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



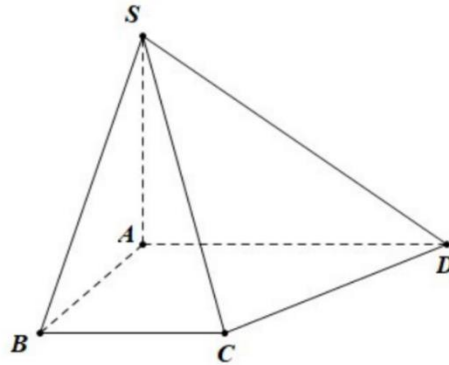
$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm } CD \text{ nên } CI = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SI = \sqrt{SD^2 - ID^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2} SI \cdot CD = \frac{1}{2} DE \cdot SC \Rightarrow \frac{a\sqrt{14}}{2} \cdot a\sqrt{2} = DE \cdot 2a \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\cos OED = \frac{OE^2 + ED^2 - OD^2}{2OE \cdot ED} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Do đó, cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SAC) bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , biết $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng



A. 30° .

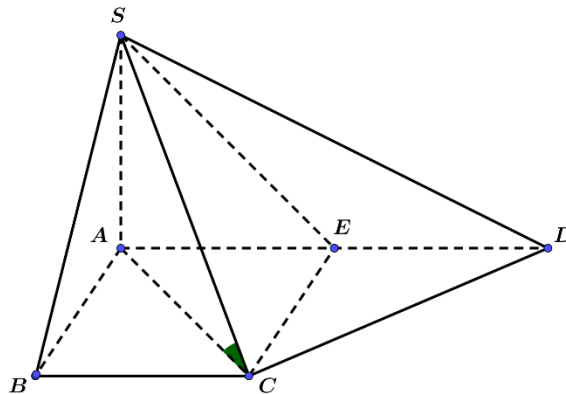
B. 45° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của AD suy ra $AECB$ là hình vuông $\Rightarrow CE = AE = \frac{AD}{2}$

Xét tam giác ACD có trung tuyến $CE = \frac{1}{2}AD$ nên $\triangle ACD$ vuông tại C

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA, (SA \perp (ABCD)) \\ AC \cap SA = \{A\} \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD \perp (SAC) \\ SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SC$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AC \perp CD; AC \subset (ABCD) \\ SC \perp CD; SC \subset (SCD) \end{cases}$$

$$((SCD); (ABCD)) = (AC; SC) = SCA$$

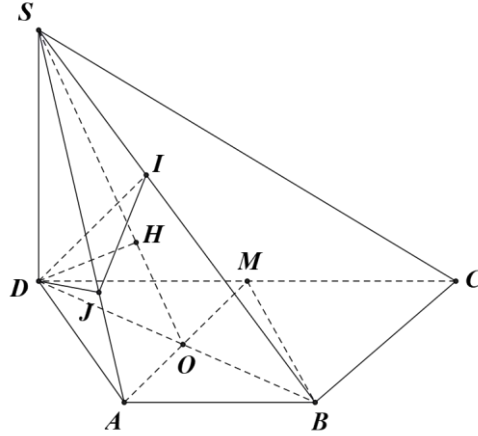
$$\triangle SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan SCA = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow SCA = 45^\circ$$

$$\text{Vậy } ((SCD); (ABCD)) = 45^\circ$$

- Câu 49:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SAB = SBC = 90^\circ$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $ABC = 135^\circ$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SBC) biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $A = D = 90^\circ$, $AB = DA = a$; $DC = 2a$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD$$

$$\begin{cases} BC \perp BD \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD$$

Do đó $SD \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow ABMD$ là hình vuông; $ABCM$ là hình bình hành

Gọi $O = AM \cap BD$

$$BC \parallel AM \Rightarrow d(SA, BC) = d(BC, (SAM)) = d(B, (SAM)) = d(D, (SAM)) = DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Với H là hình chiếu vuông góc của D lên SO .

Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên $SB, SA \Rightarrow DI \perp (SBC); DJ \perp (SAB)$

$$\Rightarrow ((SAB); (SBC)) = (DI, DJ) = IDJ.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DO^2} + \frac{1}{SD^2} \Rightarrow \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{DH^2} - \frac{1}{DO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SD = a.$$

$$\text{Xét tam giác } SIJ \text{ vuông tại } J \text{ có } SI = \frac{a\sqrt{6}}{3}; SJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos IDJ = \frac{DJ}{DI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IDJ = 30^\circ.$$

Vậy $((SAB); (SBC)) = 30^\circ$.

- Câu 50:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

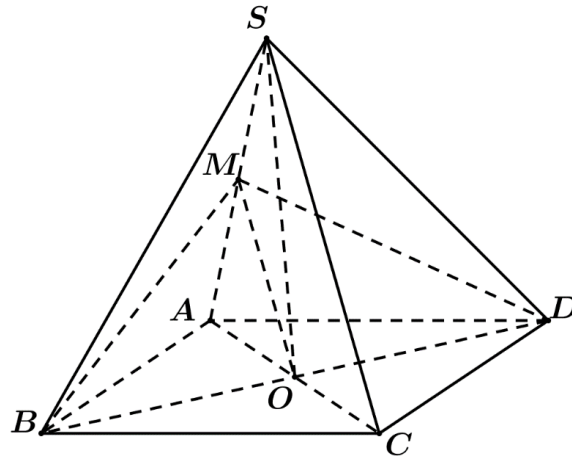
B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M trung điểm SA. Ta có $\triangle SAB$ cân tại B $\Rightarrow BM \perp SA$ (1)

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, lại có O trung điểm BD $\Rightarrow \triangle SBD$ cân tại S nên $SD = SB = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle SAD$ cân tại D nên $DM \perp SA$ (2)

Lại có $(SAB) \cap (SAD) = SA$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow ((SAB), (SAD)) = BMD$ hoặc $((SAB), (SAD)) = 180^\circ - BMD$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O $\Rightarrow OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a \Rightarrow BD = 2a$.

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O có $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = a \Rightarrow OA = OC = a$.

Xét $\triangle SOC \Rightarrow SC = a\sqrt{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MO$. Mặt khác $OD = OB$ nên $\triangle BDM$ cân tại M.

Xét $\triangle BOM$ vuông tại O $\Rightarrow BM = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DM = BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét $\triangle BDM \Rightarrow \cos(BMD) = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2BM \cdot DM} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \cos((SAB); (SAD)) = \frac{1}{3}$.

Vậy $\tan((SAB); (SAD)) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}$.

-----HẾT-----

