CHƯƠNG 9

ĐẠO HÀM

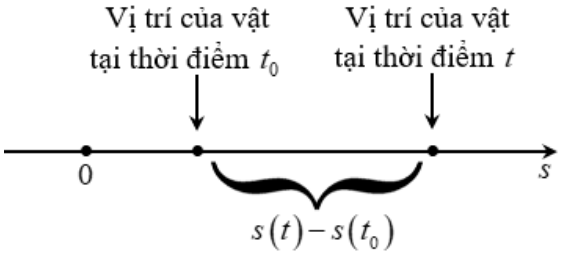
BÀI 01 ĐẠO HÀM VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm

a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng

HĐ1. Một vật di chuyển trên một đường thẳng. Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t, $s=s(t)$ (được gọi là phương trình của chuyển động).



a) Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t là: $v_{av}=\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

b) Giới hạn $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ cho ta biết $v=\lim\limits_{t-t_0}\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

b) Cường độ tức thời

HĐ2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t, có dạng $Q=Q(t)$.

a) Tính cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t_0 đến t.

b) Giới hạn $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$ cho ta biết điều gì?

Lời giải

a) Cường độ trung bình $I=\dfrac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}$

b) Giới hạn này cho biết cường độ dòng điện tại thời điểm t_0.

Nhận xét: Nhiều bài toán trong Vật lí, Hóa học, Sinh học,... đưa đến việc tìm giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ở đó $y=f(x)$ là một hàm số đã cho.

Giới hạn trên dẫn đến một khái niệm quan trọng trong Toán học, đó là khái niệm đạo hàm.

2 Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$) tức là $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Chú ý: Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x)-f(x_0)$.

2. Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b), x\neq x_0$.

3. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Chú ý: Đặt $h=x-x_0$ khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0=1$ có thể tính như sau:

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left[(1+h)^2+2(1+h)\right]-(1^2+2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(h^2+4h+3)-3}{h}=\lim_{h\to0}(h+4)=4.$$

Chú ý: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

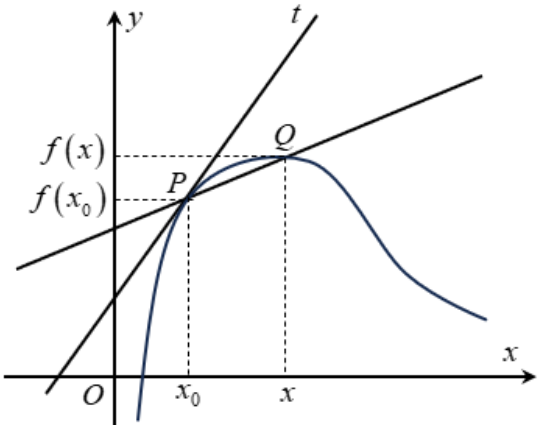
3 Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Chú ý: Nếu phương trình chuyển động của vật là $s=f(t)$ thì $v(t)=f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t.

4 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$, với $x_1\neq x_2$ là $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $P(x_0;f(x_0))$ là đường thẳng đi qua p với hệ số góc $k=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k=f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

Nhận xét: Hệ số góc tiếp tuyến của đò thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $P(x_0;f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x)$

b) Phương trình tiếp tuyến

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0;y_0)$ là $y-y_0=f'(x)(x-x_0)$, trong đó $y_0=f(x_0)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tính $f(x)-f(x_0)$.
- **Bước 2:** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b),x\neq x_0$.
- **Bước 3:** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y=2x^2+x+1$ tại $x_0=2$.

✍ Lời giải

Ta có: $f(x)-f(x_0)=f(x)-f(2)=2x^2+x+1-11=2x^2+x-10$

Khi đó: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{2x^2+x-10}{x-2}=\dfrac{2(x-2)\left(x+\dfrac{5}{2}\right)}{x-2}=2x+5$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(2x+5)=9$. Vậy $f'(2)=9$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y=\sqrt{x^2+3}$ tại $x;\forall x\in\square$

✍ Lời giải

Với x_0 bất kì

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{{x_0}^2+3}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)\left[\sqrt{x^2+3}+\sqrt{{x_0}^2+3}\right]}=\frac{2x_0}{2\sqrt{{x_0}^2+3}}=\frac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2+3}}$$

Vậy $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

Lời giải

Ta có : $f(0)=0$, do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & \text{khi } x\le 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

Lời giải

Điều kiện cần: $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+b=2$

Điều kiện đủ: $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f'(1^+)=f'(1^-)\Leftrightarrow a=3\Rightarrow b=-1$.

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số số $y=x(x-1)(x-2)...(x-2021)$ tại điểm $x=0$.

Lời giải

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)(x-2)...(x-2021)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)...(x-2021)=(-1).(-2)...(-2021)=-2021!$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{x^2\left(\sqrt{4x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\sqrt{4x^2+1}+1}=2$

Vậy $f'(0)=2$.

Dạng 2: Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa

Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

Ví dụ 7: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0.

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{t^2 + 4t + 6 - (t_0^2 + 4t_0 + 6)}{t - t_0} == \lim\limits_{t \to t_0} (t + t_0 + 4) = 2t_0 + 4.$

Vậy $f'(t_0) = 2t_0 + 4$.

b) Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$ là $v_{tt} = f'(5) = 2.5 + 4 = 14$ (m/s).

Ví dụ 8: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

Lời giải

Vì $Q'(t) = 6 \Rightarrow$ Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$ là $I_{tt} = Q'(10) = 6$

Ví dụ 9: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:

Lời giải

Ta có $v(t) = S'(t) = 6t^2 + 12t - 1.$

Vận tốc tức thời của chuyển động khi $t = 3s$ là: $v(3) = 6.3^2 + 12.3 - 1 = 89(m/s).$

Ví dụ 10: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là : $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$. Dễ thấy: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi t.

Dấu "=" xảy ra khi $t = 1$. Khi đó, vận tốc của chuyển động là $s(1) = 13$ m.

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0)=k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y=x^3-3x+1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-3$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(x_0;y_0)\Rightarrow x_0=0\Rightarrow y_0=1$.

Gọi tiếp tuyến (d) tiếp xúc đồ thị hàm số tại điểm $A(0;1)$

$\Rightarrow$Hệ số góc $k=y'(x_0)=y'(0)=-3$

$\Rightarrow$Phương trình tiếp tuyến (d): $y=-3(x-0)+1\Leftrightarrow y=-3x+1$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=x^4+2x^2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;3)$ là

Lời giải

Ta có: $y'=4x^3+4x\Rightarrow y'(1)=8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;3)$ là $y=8(x-1)+3\Leftrightarrow y=8x-5$.

Ví dụ 13: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C):y=x^3-3x+1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-3$.

Giao điểm M của đồ thị hàm số (C) với trục Oy là $x_0=0\Rightarrow y_0=1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0;1)$ là: $k=y'(0)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ là: $y=k(x-x_0)+y_0\Leftrightarrow y=-3x+1$.

Ví dụ 14: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ tại điểm có hoành độ $x=1$.

Lời giải

Ta có $y'=12x^2-12x\Rightarrow y'(1)=0$.

Ta có $x_0=1\Rightarrow y_0=-1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

$y=-1$.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=2$ có phương trình là.

✍ Lời giải

Ta có: $y'=-3x^2+3;\ y'(2)=-3.2^2+3=-9;\ y(2)=-2^3+3.2-2=-4$

Tiếp tuyến có dạng: $y=-9(x-2)+4=-9x+22$.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$.

✍ Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$.

Ta có: $y'=3x^2-6\mathrm{x}$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$ nên

$f'(x_0)=9\Leftrightarrow 3x_0^2-6\mathrm{x}_0=9\Leftrightarrow 3x_0^2-6\mathrm{x}_0-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2$. Phương trình tiếp tuyến là $y=9(x+1)-2\Leftrightarrow y=9x+7$ (Loại)

Với $x_0=3\Rightarrow y_0=2$. Phương trình tiếp tuyến là $y=9(x-3)+2\Leftrightarrow y=9x-25$ (thỏa mãn).

Ví dụ 17: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+4x+1$ có đồ thị là (C). Số tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=4x+5$ của đồ thị hàm số là

✍ Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y'=3x^2+6x+4$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến $y(x_0)=3x_0^2+6x_0+4$.

Theo đề bài, ta có $3x_0^2+6x_0+4=4\Leftrightarrow x_0^2+2x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\Rightarrow y_0=1\\x_0=-2\Rightarrow y_0=-3\end{array}\right.$.

Với $M(0;1)$, phương tình tiếp tuyến là $y=4x+1$ (nhận).

Với $M(-2;-3)$, phương trình tiếp tuyến là $y=4x+5$ (loại).

Vậy có một tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) song song với đường thẳng $d: y=4x+5$.

Ví dụ 18: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm với trục tung.

✍ Lời giải

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ với trục tung là điểm $M(0;2)$.

$y=x^3-3x^2+2\Rightarrow y'=3x^2-6x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0;2)$ là $y'(0)=0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0;2)$ là: $y=y'(0).(x-0)+2 \Leftrightarrow y=2$.

Ví dụ 19: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x-1$ tại điểm $M(1;0)$ là

Lời giải

Ta có $y'(1)=-1$ nên phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;0)$ có dạng

$y=(-1)(x-1)+0 \Leftrightarrow y=-x+1.$

Ví dụ 20: Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$ và hoành độ tiếp điểm là số thực âm.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm (điều kiện : $x_0<0$)

Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng: $y=(3x_0^2+6x_0-6)(x-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có:

$$1=(3x_0^2+6x_0-6)(-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1 \Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \ (loaïi) \\ x_0=-\frac{3}{2} (thoûa\ maõn) \end{array}\right.$$

Với $x_0=-\frac{3}{2} \Rightarrow y_0=\frac{107}{8}, y'(x_0)=-\frac{33}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{33}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{107}{8}=-\frac{33}{4}x+1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\frac{33}{4}x+1$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(x_0)}{x_0}\right)$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$.

D. $f'(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Câu 2: Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu

A. $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0\in(a;b)$.

B. $y=f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x\in(a;b)$.

C. $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=a$ và $x=b$.

D. $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x=a$ hoặc $x=b$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm $x\in(a;b)$.

Câu 3: Nếu hàm số $s=f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị điều gì?

A. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t_0.

B. Vị trí của chuyển động tại thời điểm t_0.

C. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.

D. Quãng đường đã di chuyển của vật tại thời điểm t_0.

Lời giải

Theo định nghĩa chọn C

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $f'(2)=5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(2;1)$ là

A. $y=5x+11$. **B.** $y=5x-9$. **C.** $y=5x-11$. **D.** $y=5x+3$.

Lời giải

Ta có: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=5.(x-2)+1=5x-9$.

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $(c)'=0$ (với c là hằng số). **B.** $(2x)'=2$.

C. $\left(x^6\right)'=6x^5$. **D.** $\left(\sqrt{x}\right)'=2\sqrt{x}$ (với $x>0$).

Lời giải

Ta có: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (với $x>0$).

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+2, & x>0\\ x+a, & x\le 0\end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0=0$. Hãy tính $T=a+b$.

A. $T=-4$. **B.** $T=0$. **C.** $T=3$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Ta có: $f(0)=a$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(ax^2+bx+2\right)=2$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+a)=a$.

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0=0$ nên

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$. Suy ra $a=2$.

Khi đó $f(x)=\begin{cases}2x^2+bx+2, & x>0\\ x+2, & x\le 0\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2+bx+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+b)=b$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(1)=1$.

Hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ thì $b=1$.

Vậy với $a=2, b=1$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0=0$ khi đó $T=3$.

Câu 7: Nếu $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=7$ thì ta kết luận

A. $f'(3)=3$. **B.** $f'(7)=0$. **C.** $f'(7)=3$. **D.** $f'(3)=7$.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=7$ nên $f'(3)=7$.

Câu 8: Hàm số $f(x)=x^2-5x$ có đạo hàm tại $x=2$ là

A. $f'(2)=-1$. **B.** $f'(2)=9$. **C.** $f'(2)=-6$. **D.** $f'(2)=10$.

Lời giải

Ta có: $f(x)-f(2)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Với $x\neq 2$, $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=x-3$

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$

Vậy $f'(2)=-1.$

Câu 9: Tính đạo hàm của hàm số $y=-x^2+2x$ tại $x_0=1$

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2+2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x^2-2x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[-(x-1)\right]=0$

Vậy $f'(1)=0$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y=x^3+1$ tại $x_0=2$

A. 12. **B.** 13. **C.** 24. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+1-9}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

Vậy $f'(2)=12$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ tại $x_0=1$

A. Không tồn tại. **B.** 0 **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x+1}{x-2}+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{x-2}=-3$. Vậy $f'(1)=-3$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-\sqrt{9-x}}{2} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải

Với $x \neq 0$ xét:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4-\sqrt{9-x}}{2}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{9-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{9-(9-x)}{2x\left(3+\sqrt{9-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(3+\sqrt{9-x}\right)}=\frac{1}{12}$$

Vậy $f'(0)=\frac{1}{12}$

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y=1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** Không xác định.

Lời giải

Ta có: $y=f(x)=x$. Lấy x_0 bất kì thuộc □ .

Ta có: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1-1}{x-x_0}=0\Rightarrow f'(x_0)=0.$

Vậy $y'=0$.

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x}$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $2\sqrt{x}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$. **D.** $\sqrt{x}$.

Lời giải

Ta có: $y=f(x)=\sqrt{x}$

Xét Δx là số gia của đối số tại điểm x

Khi đó hàm số có số gia tương ứng:

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$

Ta có:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vậy $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{x+1}$ trên tập xác định là

A. $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$. **B.** $\dfrac{1}{x+1}$. **C.** $\dfrac{x}{x+1}$. **D.** $\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Lời giải

$y=f(x)=\dfrac{1}{x+1}$. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Xét Δx là số gia của đối số tại điểm x

Khi đó hàm số có số gia tương ứng:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x+1}-\frac{1}{x+1}$$
$$=-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x+1).(x+1)}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{(x+\Delta x+1).(x+1)}.$$

Suy ra

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x+1).(x+1)}=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Câu 16: Đạo hàm của hàm số $f(x)=x^3+3x^2+x-5$ trên tập $\mathbb{R}$ là

A. $f'(x)=3x^2+6x+1$. **B.** $f'(x)=x^2+3x+1$.

C. $f'(x)=3x^2-6x+1$. **D.** $f'(x)=9x+1$.

Lời giải

$\forall x_o\in\mathbb{R}$, ta có: $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{x^3+3x^2+x-x_o^3-3x_o^2-x_o}{x-x_o}$

$$=\lim_{x\to x_o}\frac{(x-x_o)\left(x^2+x_ox+x_o^2+3x+3x_o+1\right)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\left(x^2+x_ox+x_o^2+3x+3x_o+1\right)=3x_o^2+6x_o+1.$$

Vậy $f'(x)=3x^2+6x+1$.

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ là

A. $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$. **B.** $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$.

C. $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. **D.** $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x-1-\dfrac{4}{x-1}$.

$\forall x_o\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, ta có:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{x-\dfrac{4}{x-1}-x_o+\dfrac{4}{x_o-1}}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\left(1+\frac{4}{(x-1)(x_o-1)}\right)$$

$$=1+\frac{4}{(x_o-1)^2}=\frac{x_o^2-2x_o+5}{(x_o-1)^2}.$$

Vậy $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{(x-1)^2}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=x^3+1$ có đồ thị(C). Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C)tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

A. $f'(1)=3$. **B.** $f'(1)=-3$. **C.** $f'(1)=4$. **D.** $f'(1)=-4$.

Lời giải

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3$$

Câu 19: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t)=4t^2+2$, với t tính bằng giây (s) và S là được tính bằng mét (m). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0=4(s)$.

A. $v(4)=32m/s$. **B.** $v(4)=34m/s$.

C. $v(4)=36m/s$. **D.** $v(4)=8m/s$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0=4(s)$ là

$$v(4)=S'(4)=\lim_{t\to 4}\frac{S(t)-S(4)}{t-4}=\lim_{t\to 4}\frac{4t^2+2-66}{t-4}=\lim_{t\to 4}\frac{4\left(t^2-16\right)}{t-4}=\lim_{t\to 4}4(t+4)=32.$$

Câu 20: Cho hàm số $y=-x^3+2x^2+1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0=-1$ của hàm số là

A. 7. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -7.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x^3+2x^2-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\left(-x^2+3x-3\right)}{x+1}$

$$=\lim_{x\to -1}\left(-x^2+3x-3\right)=-7$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x_0=-1$ có hệ số góc: -7

Câu 21: Một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s(t)=\dfrac{1}{3}t^3-t^2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=3$ bằng bao nhiêu?

A. $4m/s$. **B.** $1m/s$. **C.** $3m/s$. **D.** $2m/s$.

Lời giải

$$v(3)=S'(3)=\lim_{t\to 3}\frac{S(t)-S(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{3}t^3-t^2-0}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{3}t^3-t^2}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{3}t^2(t-3)}{t=3}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{3}t^2=3.$$

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=3$ bằng: $v(3)=3^2-2.3=3\,(m/s).$

Câu 22: Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}.$ **B.** $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}.$ **C.** $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}.$ **D.** $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}.$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{x+1}{2x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x+2}{(x-2)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{(2x-1)}-\dfrac{1}{3}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=2$ là $-\dfrac{1}{3};y(2)=1.$

Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm có hoành độ $x=2$ là:

$$y=-\frac{1}{3}(x-2)+1\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}.$$

Câu 23: Cho hàm số $y=\sqrt{x-1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=2$ là?

A. $k=\dfrac{1}{4}.$ **B.** $k=2.$ **C.** $k=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $k=\dfrac{1}{3}.$

Lời giải

Xét $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{1}{2}.$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\dfrac{1}{2}.$

Câu 24: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t)=\dfrac{1}{4}t^4-t^3+\dfrac{5}{2}t^2+10t$, trong đó $t>0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu ?

A. $13.$ **B.** $11.$ **C.** $10.$ **D.** $12.$

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=t^3-3t^2+5t+10.$

Gia tốc của chuyển động là $a(t)=3t^2-6t+5.$

Dễ thấy: $a(t)=3t^2-6t+5=3(t-1)^2+2\ge 2$ với mọi t. Dấu "=" xảy ra khi $t=1$.

Khi đó, vận tốc của chuyển động là $v(1)=13\ (\text{m/s})$.

Câu 25: Chuyển động của một vật có phương trình $s=5+\sin\left(0,8\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tính giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật tại các thời điểm vận tốc bằng 0.

A. $0,64\pi^2$. **B.** $10,64\pi^2$. **C.** $0,32\pi^2$. **D.** $0,14\pi^2$.

Lời giải

Ta có $v=s'=0,8\pi\cos\left(0,8\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$ và $a=v'=-0,64\pi^2\sin\left(0,8\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Thời điểm vận tốc bằng 0 tương đương với $\cos\left(0,8\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\left|\sin\left(0,8\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|=1$.

Khi đó, $|a|=0,64\pi^2\left|\sin\left(0,8\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|=0,64\pi^2$.

Câu 26: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y=-2$.

A. $y=-9x+7;\ y=-2$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=9x+7;\ y=-2$. **D.** $y=9x+7;\ y=2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm : $y=x^3-3x^2+2=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Với $x=-1\to\begin{cases}y=-2\\k=y'(-1)=9\end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7$.

Với $x=2\to\begin{cases}y=-2\\k=y'(-2)=0\end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-2$.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$.

A. $y=9x+7;\ y=9x-25$. **B.** $y=9x-25$.

C. $y=9x-7;\ y=9x+25$. **D.** $y=9x+25$.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x+7$ nên có $k=9\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=-1\to\begin{cases}y_0=-2\\k=9\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x+7\left(loaïi\right)$ (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0=3\to\begin{cases}y_0=2\\k=9\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=9x-25.$

Câu 28: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2.$ Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x.$

A. $y=45x-173;\ y=45x+83.$ **B.** $y=45x-173.$

C. $y=45x+173;\ y=45x-83.$ **D.** $y=45x-83.$

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0.$ Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{45}x$ nên có $k.\left(-\frac{1}{45}\right)=-1\Leftrightarrow k=45\Leftrightarrow 3x_0^2-6x_0=45\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=5\\x_0=-3\end{array}\right.$.

Với $x_0=5\to\begin{cases}y_0=52\\k=45\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x-173.$

Với $x_0=-3\to\begin{cases}y_0=-52\\k=45\end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=45x+83.$

Câu 29: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}.$

A. $x+4y-1=0;\ x+4y+1=0.$ **B.** $x+4y-4=0;\ x+4y+4=0.$

C. $y=-\frac{1}{4}x-4;\ y=-\frac{1}{4}x+4.$ **D.** $y=-\frac{1}{4}x.$

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k=y'\left(x_0\right)=-\frac{1}{x_0^2}.$

Theo giả thiết ta có $k=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_0^2=4\Leftrightarrow x_0=\pm2.$

Với $x_0=2\to y_0=\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-\frac{1}{4}\left(x-2\right)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y-4=0.$

Với $x_0=-2\to y_0=-\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y=-\frac{1}{4}\left(x+2\right)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+4y+4=0.$

Câu 30: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x-3y=0$ bằng $\frac{3}{5}$.

A. $y=2;\ y=1.$ **B.** $y=-2;\ y=1.$ **C.** $y=-2;\ y=-1.$ **D.** $y=2;\ y=-2.$

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k=y'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0.$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y+y_0=k\left(x-x_0\right).$

Suy ra tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d=\left(-k;1\right).$

Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta=\left(4;-3\right).$

Theo đề bài ta có: $\cos\left(d,\Delta\right)=\frac{\left|-4k-3\right|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}}=\frac{3}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=-\frac{24}{7}.\end{array}\right.$

Với $k=-\frac{24}{7}\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=-\frac{24}{7}$: vô nghiệm.

Với $k=0\Rightarrow 3x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2.\end{array}\right.$

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=2\ \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y-2=0\Leftrightarrow y=2.$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=-2\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y+2=0\Leftrightarrow y=-2.$

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $y=f\left(x\right)=x^2+2x$ tại điểm $x_0=1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-f\left(x\right)}{x-1}$

b) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

c) $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}(x+4)$

d) $f'(1)=a\Rightarrow a>5$

Lời giải

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$$

Vậy $f'(1)=4$.

a) Đúng: $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-1}$

b) Đúng: $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

c) Sai: $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)$

d) Sai: $f'(1)=a\Rightarrow a<5$

Câu 2: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ tại điểm $x_0=0$ ta được $f'(0)=a$.

Khi đó:

a) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

b) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{x+1}$

c) Phương trình $3^x=3$ có nghiệm bằng $x=a-2$

d) $\log_a 9=3$

Lời giải

Ta có: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x-2}{x+1}-(-2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x+1}=3$

Vậy $f'(0)=3$.

a) Đúng: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

b) Sai: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x+1}$

c) Đúng: Phương trình $3^x=3$ có nghiệm bằng $x=a-2$

d) Sai: $\log_a 9=2$

Câu 3: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x)=2x^3$. Khi đó:

a) Với bất kì x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

b) $f'(1)=-6$

c) $f'(0)=0$

d) $f'(2)=24$

Lời giải

Với bất kì x_0 ta có: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^3-2x_0^3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2(x-x_0)(x^2+x.x_0+x_0^2)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2(x^2+x.x_0+x_0^2)}{1}=6x_0^2$

Vậy $f'(x)=(2x^3)'=6x^2$ trên $\square$.

a) Đúng: Với bất kì x_0: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

b) Sai: $f'(1)=6$

c) Đúng: $f'(0)=0$

d) Đúng: $f'(2)=24$

Câu 4: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{1-x}$ với $x\neq 1$. Khi đó:

a) Với bất kì $x_0\neq 1$, ta có: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2}{(1-x)(1-x_0)}$

b) $f'(2)=2$

c) $f'(3)=\dfrac{1}{3}$

d) $f'(2)+f'(3)=\dfrac{3}{2}$

Lời giải

Với bất kì $x_0\neq 1$, ta có: $f'(0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{2}{1-x_0}}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2(x-x_0)}{(1-x)(1-x_0)(x-x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2}{(1-x)(1-x_0)}=\dfrac{2}{(1-x_0)^2}$

Vậy $f'(x)=\left(\dfrac{2}{1-x}\right)'=\dfrac{2}{(1-x)^2}$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

a) Đúng: Với bất kì $x_0\neq 1$, ta có: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2}{(1-x)(1-x_0)}$

b) Đúng: $f'(2)=2$

c) Sai: $f'(3)=\frac{1}{2}$

d) Đúng: $f'(2)+f'(3)=\frac{3}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ $x_0=-1$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0;4)$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y=3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=-\frac{1}{6}x$

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\left(2x^3\right)'=6x^2$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$f'(-1)=6.(-1)^2=6; f(-1)=-2$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$y-f(-1)=6(x+1)\Leftrightarrow y+2=6(x+1)\Leftrightarrow y=6x+4$

a) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6

b) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0;4)$

c) Sai: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y=3x$ tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{4}{3}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=-\frac{1}{6}x$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3;-1)\in(C)$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y=-2x-\frac{5}{2}$

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0;-\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\left(\dfrac{2}{1-x}\right)'=\dfrac{2}{(1-x)^2}$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$f'(3)=\dfrac{2}{(1-3)^2}=\dfrac{1}{2}.$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là: $y-(-1)=\dfrac{1}{2}(x-3)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}.$

a) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\dfrac{1}{2}$

b) Sai:

c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y=-2x-\dfrac{5}{2}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0;-\dfrac{5}{2}\right)$

Câu 7: Tính được đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra. Khi đó:

a) $y=x^2-x$ tại $x_0=1$ có $f'(1)=1$

b) $y=\sqrt{x}$ tại $x_0=1$ có $f'(1)=1$

c) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ tại $x_0=0$ có $f'(0)=0$

d) $y=\dfrac{1}{x+1}$ tại $x_0=2$ có $f'(2)=-\dfrac{1}{9}$

Lời giải

a) Đúng: $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}x=1.$

b) Sai: $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}.$

c) Đúng: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x^2+1}-f(0)}{x}==\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{x^2+1}=0.$

d) Đúng: $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}}{x-2}==\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-1}{3(x+1)}=-\dfrac{1}{9}.$

Câu 8: Cho hàm số $y=x^2+3x+1$ có đồ thị (C). Viết được phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung. Khi đó:

a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.

b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$

c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y=2x+1$ tại điểm có hoành độ bằng 0

d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+1$

Lời giải

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=1$

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+3)=3$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y=3x+1$

a) Đúng: Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.

b) Sai: Phương trình tiếp tuyến không đi qua điểm $A(1;3)$

c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y=2x+1$ tại điểm có hoành độ bằng 0

d)Đúng: Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+1$

Câu 9: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$. Khi đó:

a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.

b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;2)$

c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y=2x+1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$

d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=x+1$

Lời giải

Ta có: $y'=-\frac{4}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(-1)=-1$.

Vì $x_0=-1$ nên $y_0=-2\Rightarrow$ Tiếp điểm $M(-1;-2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-1;-2)$ là $y=-x-3$.

a) Sai: Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng -1.

b)Sai: Phương trình tiếp tuyến không đi qua điểm $M(-1;2)$

c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y=2x+1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=x+1$

Câu 10: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x-2y+2=0$. Khi đó:

a) Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.

b) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2

c) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$

d) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$

Lời giải

Đường thẳng $d: x-2y+2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$ nên đường thẳng d có hệ số góc là $k_d=\frac{1}{2}$.

Tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k vuông góc với đường thẳng d

$\Rightarrow k \cdot k_d=-1 \Rightarrow k=-\frac{1}{k_d}=-2.$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y'=k \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^2}=-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Với $x=1$, phương trình tiếp tuyến là $y=-2x+7$.

Với $x=-3$, phương trình tiếp tuyến là $y=-2x-9$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $d_1: y=-2x+7; y=-2x-9$.

a) Đúng: Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
b) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2
c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$
d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$

E BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{16}.$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 3: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{khi } x\le 2\\ -\dfrac{x^2}{2}+bx-6 & \text{khi } x>2\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=2$.

Lời giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x=2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=2$, tức là

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}+bx-6\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}x^2\Leftrightarrow -2+2b-6=4\Leftrightarrow b=6.$

Thử lại với $b=6$, ta có

- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}+bx-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\dfrac{x^2}{2}+6x-10}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{10-x}{2}=4;$

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x=2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}mx^2+2x+2 & \text{khi } x>0\\ nx+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $m,\ n$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} f(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{mx^2+2x+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{mx^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(mx+2)=2. \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{nx+2-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{nx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}n=n \end{cases}$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow n=2$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{khi } x\le 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số $a,\ b$ sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

Lời giải

Hàm số có đạo hàm tại $x=1$, do đó hàm số liên tục tại $x=1.\Rightarrow a+b=\dfrac{1}{2}.\ (1)$

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}a=a \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)}{2}=1 \end{cases}$.

Hàm số có đạo hàm tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow a=1.\ (2)$

Từ (1) và (2), ta có $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^2$, trong đó $t>0,\ t$ tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2$ giây.

Lời giải

Ta tính được $s'(t)=2t.$

Vận tốc của chất điểm $v(t)=s'(t)=2t\Rightarrow v(2)=2.2=4\text{m/s}.$

Câu 7: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t)=196t-4,9t^2$ trong đó $t>0,\ t$ tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

Lời giải

Ta tính được $s'(t)=196-9,8t.$

Vận tốc của viên đạn $v(t)=s'(t)=196-9,8t\Rightarrow v(t)=0\Leftrightarrow 196-9,8t=0\Leftrightarrow t=20.$

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196.20 - 4,9.20^2 = 1960\text{m}.$

Câu 8: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0,$ t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9.$

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1.$

Câu 9: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0,$ t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11m/s

Lời giải

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t.$

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 \ (t > 0).$

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14\text{m/s}^2.$

Câu 10: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t $(t = 5\text{s})$ đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}.$

Lời giải

Ta có $v_{\text{tb}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49,0049\text{m/s}.$

Câu 11: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - 2t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 5 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

$\Delta S = 6(t_0 + \Delta t)^2 - 2(t_0 + \Delta t)^3 - (6{t_0}^2 - 2{t_0}^3)$

$= 6({t_0}^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) - 2({t_0}^3 + 3{t_0}^2\Delta t + 3t_0\Delta t^2 + \Delta t^3) - (6{t_0}^2 - 2{t_0}^3).$

$= 12t_0\Delta t + 6\Delta t^2 - 6{t_0}^2\Delta t - 6t_0\Delta t^2 - \Delta t^3$

$\frac{\Delta S}{\Delta t} = 12t_0 + 6\Delta t - 6{t_0}^2 - 6t_0\Delta t - \Delta t^2.$

$v(t_0) = s'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(12t_0 + 6\Delta t - 6{t_0}^2 - 6t_0\Delta t - \Delta t^2) = 12t_0 - 6{t_0}^2 \ \ (\text{m/s})$

Vận tốc của vật là: $v(t_0)=s'(t_0)=-6{t_0}^2+12t_0=-6(t_0-1)^2+6\le 6$ dấu bằng khi $t_0=1$.

Vận tốc lớn nhất của vật là 6 (m/s).

Câu 12: Một bình nuôi cấy vi sinh vật được giữ ở nhiệt độ $0°C$. Tại thời điểm $t=0$ (giây) người ta cung cấp nhiệt cho nó. Nhiệt độ tăng lên và được ước tính bởi hàm số $y=f(t)=t^2+t+1$ (ºC) với $f(t)$ là nhiệt độ của bình nuôi cấy ở thời điểm t. Hãy tính tốc độ tăng của bình tại thời điểm $t=5$ giây.

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

$\Delta y=\left((t_0+\Delta t)^2+(t_0+\Delta t)+1\right)-\left({t^2}_0+t_0+1\right)$

$={t_0}^2+2t_0\Delta t+\Delta t^2+t_0+\Delta t+1-{t^2}_0-t_0-1=2t_0\Delta t+\Delta t^2+\Delta t$

$\frac{\Delta y}{\Delta t}=2t_0+\Delta t+1.$

$f'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2t_0+\Delta t+1)=2t_0+1$ (ºC/s)

Tốc độ tăng nhiệt tại thời điểm $t=5$ giây là $f'(5)=2.5+1=11$ (ºC/s).

Câu 13: Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Y máy tính là $C(Y)=Y^2+20Y+300$. Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Y sản phẩm lên $Y+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Y)$. Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 100 lên 101 thì chi phí tăng theo là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi ΔY là số gia của biến số tại điểm Y

Ta có $\Delta C=C(Y+\Delta Y)-C(Y)=2Y.\Delta Y+(\Delta Y)^2+20\Delta Y$

$\Rightarrow\frac{\Delta C}{\Delta Y}=\frac{2Y.\Delta Y+(\Delta Y)^2+20\Delta Y}{\Delta Y}=2Y+\Delta Y+20\Rightarrow C'(Y)=\lim\limits_{\Delta Y\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta Y}=2Y+20.$

$\Rightarrow C'(100)=2.100+20=220.$

Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 100 lên 101 thì chi phí tăng theo là 220 (USD).

Câu 14: Giả sử chi phí C (nghìn đồng) để sản xuất X chiếc quạt điện là $C(X)=X^2-10X+50$. Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ X sản phẩm lên $X+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(X)$. Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 50 lên 51 thì chi phí tăng theo là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi ΔX là số gia của biến số tại điểm X

Ta có $\Delta C=C(X+\Delta X)-C(X)=2X.\Delta X+(\Delta X)^2-10\Delta X$

$\Rightarrow\frac{\Delta C}{\Delta X}=\frac{2X.\Delta X+(\Delta X)^2-10\Delta X}{\Delta X}=2X+\Delta X-10\Rightarrow C'(X)=\lim\limits_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta X}=2X-10.$

$\Rightarrow C'(50) = 2.50 - 10 = 90$.

Nếu tăng số lượng sản phẩm từ 50 lên 51 thì chi phí tăng theo là 90 nghìn đồng.

Câu 15: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = t^3 - 2t^2 + 30t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 5 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc nhỏ nhất của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

$\Delta s = (t_0 + \Delta t)^3 - 2(t_0 + \Delta t)^2 + 30(t_0 + \Delta t) - (t_0{}^3 - 2t_0{}^2 + 30t_0)$

$= (t_0{}^3 + 3t_0{}^2\Delta t + 3t_0(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3) - 2(t_0{}^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2) + 30\Delta t - (t_0{}^3 - 2t_0{}^2)$.

$= 3t_0{}^2\Delta t + 3t_0(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 + 30\Delta t - 4t_0\Delta t - 2(\Delta t)^2$

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t_0{}^2 + 3t_0\Delta t + (\Delta t)^2 + 30 - 4t_0 - 2\Delta t$.

$v(t_0) = s'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}(3t_0{}^2 + 3t_0\Delta t + (\Delta t)^2 + 30 - 4t_0 - 2\Delta t) = 3t_0{}^2 - 4t_0 + 30$ (m/s)

Vận tốc của vật là: $v(t_0) = s'(t_0) = 3t_0{}^2 - 4t_0 + 30 = 3\left(t_0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{86}{3} \geq \frac{86}{3}$. Dấu bằng khi $t_0 = \frac{2}{3}$.

Vận tốc nhỏ nhất của vật là $\frac{86}{3}$ (m/s).

Câu 16: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 0$ đến lúc chuyển động có vận tốc bằng không.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm của quãng đường $v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9$

Vận tốc bằng không khi: $v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1(ktm) \\ t = 9(tm) \end{array}\right.$

Quãng đường vật chuyển động được đến thời điểm $t = 9$ là: $s(t) = -\frac{1}{3}.9^3 + 4.9^2 + 9.9 = 162(m)$

Câu 17: Một vật di chuyển theo phương thẳng đứng lên trên từ độ cao $20m$ so với mặt đất với vận tốc ban đầu là $15m/s$. Độ cao s của nó tính bằng mét sau t giây kể từ khi bắt đầu chuyển động $t = 0$ được cho bởi công thức $s = 20 + 15t - 5t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 15 - 10t$

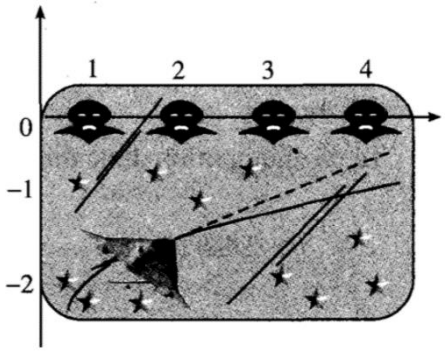
Khi vật chạm đất thì $s = 0 \Rightarrow 20 + 15t - 5t^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Vật sau khi chuyển động sẽ chạm đất khi $t = 4$

Vậy vận tốc của vật khi nó chạm đất là $v(4)=s'(4)=15-10.4=-25\,(\text{m/s})$.

Vậy tốc độ khi vật chạm đất là $-25\,(\text{m/s})$..

Câu 18: Trong một trò chơi điện tử, máy bay xuất hiện ở góc trái màn hình rồi bay sang phải theo quỹ đạo (C) là đồ thị của hàm số $y=-1-\dfrac{1}{x},(x>0)$. Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ x_0 thuộc (C) sao cho tên lửa bắn ra từ đó sẽ bắn trúng mục tiêu ở trên màn hình có tọa độ $(4,0)$.



Lời giải

Với $x_0>0$ tùy ý, ta có

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1-\dfrac{1}{x}-\left(-1-\dfrac{1}{x_0}\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x.x_0(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x.x_0}=\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0=\dfrac{1}{x_0^2}(x-x_0)-1-\dfrac{1}{x_0}$.

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $(4,0)$ nên $\dfrac{1}{x_0^2}(4-x_0)-1-\dfrac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{5}\\x_0=-1-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện $x_0>0$, khi đó ta được $x_0=-1+\sqrt{5}$.

----------HẾT----------