

BÀI 2: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



LÝ THUYẾT.

I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

1) Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{Q}, n > 1$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{Q}, n > 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Bằng định ta chứng minh được:

$$(c)' = 0 \quad (c = \text{const});$$

$$(x)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Chú ý: Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$.

a) Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

Đối với hàm số hợp $y = \sin u$ và $u = u(x)$ ta có $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

Đối với hàm số hợp $y = \cos u$ và $u = u(x)$ ta có $(\cos u)' = -u' \sin u$.

c) Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$.

Đối với hàm số hợp $y = \tan u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}$.

d) Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Đối với hàm số hợp $y = \cot u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}}$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ

Các giới hạn đặc biệt

+) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

+) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

+) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

+) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)} = 1$.

+) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln a \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) = \ln a$.

+) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a}$.



Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.



Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$.

5) Đạo hàm của hàm số logarit



Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.



Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có đạo hàm tại mọi x dương và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Giả sử các hàm số $f = f(x), g = g(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có

$$(f + g)' = f' + g';$$

$$(f - g)' = f' - g';$$

$$(fg)' = f'.g + f.g';$$

$$(kf)' = k.f' \quad (k = \text{const});$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2} \quad (g \neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad (f = f(x) \neq 0)$$

2. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Từ đó ta có các kết quả sau:

Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp	Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$)
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = 4x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ b. $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$

c. $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ d. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}$

Lời giải

a. $y' = 8x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

b. $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

c. $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x} + x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2} + 2x - \frac{2}{x^3}$

d. $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Câu 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = (1-x)(1-2x)(1-3x)$ b. $y = (x + \sqrt{x})(x^2 + x + 1)$

c. $y = x^2(x+4)^3$ d. $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$ e. $y = (x^3 + 3x)(2-x)$

Lời giải

$$a. y = (1-x)(1-2x)(1-3x) = (1-3x+2x^2)(1-3x)$$

$$= 1-3x-3x+9x^2+2x^2-6x^3 = 1-6x+11x^2-6x^3$$

$$\Rightarrow y' = -6+22x-18x^2$$

$$b. y = (x+\sqrt{x})(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2\sqrt{x}-x\sqrt{x}-\sqrt{x}$$

$$y' = 3x^2+2x+1-\frac{5}{2}\sqrt{x^3}-\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$c. y = x^2(x+4)^3 = x^2(x^3+12x^2+48x+64) = x^5+12x^4+48x^3+64x^2$$

$$y' = 5x^4+48x^3+144x^2+128x$$

$$d. y = \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right) = x-\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = 1+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}$$

$$e. y = (x^3+3x)(2-x) = 2x^3-x^4+6x-3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2-4x^3+6-6x$$

Câu 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a. y = \frac{2}{x} \quad b. y = \frac{x+2}{2x-1} \quad c. y = \frac{x^2+4x-1}{2x+3}$$

$$d. y = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad e. y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2} \quad f. y = \frac{3}{2x-1}$$

Lời giải

$$a. y' = \frac{-2}{x^2}$$

$$b. y' = \frac{2x-1-2(x+2)}{(2x-1)^2} = \frac{5}{(2x-1)^2}$$

$$c. y' = \frac{(2x+3)(2x+4)-2(x^2+4x-1)}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+14x+12-2x^2-8x+2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+14}{(2x+3)^2}$$

$$d. y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

$$e. y = \frac{2}{1-x+x^2}-1 \Rightarrow y' = -\frac{2(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$f. y' = -\frac{6}{(2x-1)^2}$$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \left(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}\right)^5$ b. $y = \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}}\right)^7$

c. $y = (x^3 + 2)^{\sqrt[3]{1-x^2}} + \sqrt{x^3 - 1}$ d. $y = \frac{2x - \frac{1}{x^2} + 1}{x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}}$

e. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ f. $y = (\sqrt[3]{x} + 2)\left(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x\right)$

Lời giải

a. $y' = 5\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)\left(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}\right)^4$

b. $y' = 7\left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}}\right)' \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}}\right)^6$

$$y' = 7\left(\frac{\left(x^2 + \sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} + \frac{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)^2}}\right)\left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}}\right)^6$$

$$y' = 7\left(\frac{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} + \frac{-\left(\frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4}\right)}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)^2}}\right)\left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}}\right)^6$$

$$y' = 7\left(\frac{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} + \frac{\frac{-x-2}{x^3}}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)^2}}\right)\left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}}\right)^6$$

c. $y' = (x^3 + 2)' \sqrt[3]{1-x^2} + (x^3 + 2)\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)' + (\sqrt{x^3 - 1})'$

$$y' = 3x^2 \sqrt[3]{1-x^2} + (x^3 + 2) \cdot \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

d. $y' = \frac{\left(2x - \frac{1}{x^2} + 1\right)' \left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}\right) - \left(2x - \frac{1}{x^2} + 1\right) \left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}\right)'}{\left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}\right)^2}$

$$y' = \frac{\left(2 + \frac{2}{x^3}\right) \left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}\right) - \left(2x - \frac{1}{x^2} + 1\right) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}\right)}{\left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}\right)^2}$$

$$e. y' = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2} = \frac{2x^2+2x+2-2x^2-x}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$$

Câu 5: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = 5\sin x - 3\cos x$. b. $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

c. $y = \sqrt{1+2\tan x}$. d. $y = \tan 3x - \cot 3x$.

Lời giải

a. Ta có: $y' = 5\cos x + 3\sin x$

b. Ta có: $y' = (x^2 - 3x + 2)' \cdot \cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

c. Ta có:

$$y' = \frac{(2\tan x)'}{2\sqrt{1+2\tan x}} = \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+2\tan x}} = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1+2\tan x}}.$$

d. Ta có các cách thực hiện sau:

Cách 1: Ta có ngay:

$$y' = y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{3}{\sin^2 3x} = \frac{3}{\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x} = \frac{3}{\frac{1}{4} \sin^2 6x} = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$y = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\sin^2 3x - \cos^2 3x}{\cos 3x \cdot \sin 3x} = -\frac{2\cos 6x}{\sin 6x} = -2\cot 6x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}} \text{ với } x \in (0; \pi).$$

Lời giải

Biến đổi hàm số về dạng:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 \frac{x}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{4}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \frac{x}{8}} = \cos \frac{x}{8}.$$

$$\text{Do đó } y' = \left(\cos \frac{x}{8} \right)' = -\frac{1}{8} \sin \frac{x}{8}.$$

Câu 7: Chứng minh rằng:

a. Hàm số $y = \tan x$ thỏa mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$.

b. Hàm số $y = \cot 2x$ thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Lời giải

a. Trước tiên, ta có:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Khi đó, ta có:

$$y' - y^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

b. Trước tiên, ta có:

$$y' = -\frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Khi đó, ta có:

$$y' + 2y^2 + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2 \cot^2 2x + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + \frac{2}{\sin^2 2x} = 0.$$

Câu 8: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \frac{e^{ax} - 1}{ax} - b \frac{e^{bx} - 1}{bx} \right) = a - b.$$

Vậy $A = a - b$.

Câu 9: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - 1}{\sqrt{2x+1}-1} - \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{1-3x}-1} - 1}{\sqrt[3]{1-3x}-1} \right).$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1.$$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1}-1}{\sqrt{2x+1}-1} = 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x \left[\sqrt[3]{(1-3x)^2} + \sqrt[3]{1-3x} + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{\left[\sqrt[3]{(1-3x)^2} + \sqrt[3]{1-3x} + 1 \right]} = -1.$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}-1}{\sqrt[3]{1-3x}-1} = -1.$ Vậy $A = 2.$

Câu 10: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sqrt{x+1}-1}.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{e^x-1}{x}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}-1} = -\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = -2.$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{e^x-1}{x} = -2.$ Vậy $A = -2.$

Câu 11: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} = \alpha. \text{ Vậy } A = \alpha.$$

Câu 12: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x}-1}{\sin 2x}.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{e^x}+1)} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } A = \frac{1}{4}.$$

Câu 13: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x, \text{ đặt } t = x-1, \text{ khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } t \rightarrow +\infty.$$

$$\Rightarrow A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+2}{t} \right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+2}{t} \left(\frac{t+2}{t} \right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+2}{t} \left[\left(1 + \frac{2}{t} \right)^{\frac{t}{2}} \right]^2 = e^2.$$

Vậy $A = e^2$.

Câu 14: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} \right).$$

$$\Rightarrow A = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } A = \frac{3}{2}.$$

Câu 15: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-3) \frac{e^{-3x^2} - 1}{(-3x^2)} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} + \frac{1 - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} \right].$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} (-3) \frac{e^{-3x^2} - 1}{(-3x^2)} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} = -3.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1+x^2} + \left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \right] = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Nên } A = -3 - \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}. \text{ Vậy } A = -\frac{10}{3}.$$

n số hạng

Câu 16: Tìm giới hạn $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + aa + \dots + \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n}$.

Lời giải

$$\overbrace{a + aa + aaa + \dots + aa \dots a}^{n \text{ số hạng}} = a \left(1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{111 \dots 1}^{n \text{ số hạng}} \right) = \frac{a}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{999 \dots 9}^{n \text{ số hạng}} \right).$$

$$= \frac{a}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) = \frac{a}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right].$$

n số hạng

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a + aa + \dots + aa \dots a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{9 \cdot 10^n} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9 \cdot 10^n} - \frac{n}{10^n} \right].$$

Mặt khác $\lim \frac{10(10^n - 1)}{9 \cdot 10^n} = \frac{10}{9}$.

Và $n \leq C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \Rightarrow 0 \leq \frac{n}{10^n} \leq \left(\frac{2}{10}\right)^n = \frac{1}{5^n}$, mà $\lim \frac{1}{5^n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{n}{10^n} = 0$.

Vậy $A = \frac{10a}{81}$.

Câu 17: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos 2x}$.

Lời giải

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{1-\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3\ln(1+3x^2)}{3x^2} : \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \right] = \frac{3}{2}$.

Câu 18: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1+6x) - \ln(1+3x)}$.

Lời giải

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1+6x) - \ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) : \left(\frac{\ln(1+6x)}{x} - \frac{\ln(1+3x)}{x} \right)$
 $= (\ln 6 - \ln 3) : (6 - 3) = \frac{1}{3} \ln 2$.

Câu 19: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Lời giải

$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2x^2} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} \right) : \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \frac{e^{-2x^2} - 1}{-2x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} \right) : \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = -\frac{7}{3}$.

Câu 20: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x}$.

Lời giải

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\sin x + \cos x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)^2}{2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right] = 1$.

Câu 21: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1}+1) - \ln(\sqrt{x+1}+1)}{x}$.

Lời giải

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1}+1) - \ln(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1}+1) - \ln 2 - [\ln(\sqrt{x+1}+1) - \ln 2]}{x}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{2}\right)}{x} - \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{2} + 1\right)}{x} \right].$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[3]{3x+1}-1}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2} \frac{3x}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1}\right)}{\frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1\right) \frac{1}{2} \frac{3x}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{2} + 1\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + 1\right)}{2(\sqrt{x+1}+1) \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+2}$.

Lời giải

$$y = 2^{x^2+2} \Rightarrow y' = (x^2+2)' \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2 = 2x \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2 = x \cdot 2^{x^2+3} \cdot \ln 2.$$

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 2x)e^x$.

Lời giải

$$y = (x^2 + 2x)e^x \Rightarrow y' = (2x+2) \cdot e^x + (x^2 + 2x) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x.$$

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y = xe^{-x}$.

Lời giải

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1-x) \cdot e^{-x}.$$

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2-2} \cos x$.

Lời giải

$$y = e^{x^2-2} \cos x \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2-2} \cos x - e^{x^2-2} \sin x = (2x \cos x - \sin x) e^{x^2-2}.$$

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} &\Rightarrow y' = \frac{(3^x \ln 3 + 3^{-x} \ln 3)(3^x + 3^{-x}) - (3^x - 3^{-x})(3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3)}{(3^x + 3^{-x})^2} \\ &= \frac{(3^x + 3^{-x})^2 - (3^x - 3^{-x})^2}{(3^x + 3^{-x})^2} \ln 3 = \frac{4 \ln 3}{(3^x + 3^{-x})^2}. \end{aligned}$$

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x \cdot e^{\tan x}$.

Lời giải

$$y = \cos x \cdot e^{\tan x} \Rightarrow y' = -\sin x \cdot e^{\tan x} + \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\tan x} = e^{\tan x} \left(\frac{1}{\cos x} - \sin x \right).$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $f'(1)$.

Lời giải

Sử dụng công thức: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ Vậy } f'(1) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Câu 29: Chứng minh rằng, nếu $y = e^{2x} + 2e^{-x}$ thì $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 2e^{2x} - 2e^{-x}; y'' = (y')' = 4e^{2x} + 2e^{-x}; y''' = (y'')' = 8e^{2x} - 2e^{-x}.$$

$$\text{Suy ra: } y''' - y'' - 2y' = 0.$$

Câu 30: Cho hàm số $y = \ln(\cos x)$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Lời giải

Phân tích: Sử dụng các công thức: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $(\cos x)' = -\sin x$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

Câu 31: Cho hàm số $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1})$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Lời giải

Phân tích: Sử dụng các công thức: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})'}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x + \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x(2\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}}.$$



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M_0(x_0; f(x_0))$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm M_0 có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình là

Lời giải

Giao điểm của đồ thị (C) và trục tung là $M(0; -1)$.

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; -1)$.

$$y = y'(0)(x - 0) - 1 = -2x - 1.$$

Câu 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 + 2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là:

$$y = y'(1)(x - 1) + 0 = -x + 1.$$

Câu 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 \Rightarrow y'(-1) = 3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2$.

Câu 4: Viết phương trình tiếp của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-2; -8)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2$.

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $(-2; -8)$ là $y'(-2) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 12(x + 2) - 8 \Leftrightarrow y = 12x + 16$.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(x_0; y_0) \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Gọi tiếp tuyến (d) tiếp xúc đồ thị hàm số tại điểm $A(0; 1)$

$$\Rightarrow \text{Hệ số góc } k = y'(x_0) = y'(0) = -3$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình tiếp tuyến } (d): y = -3(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

$$y = 8(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = 8x - 5.$$

Câu 7: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3.$$

Giao điểm M của đồ thị hàm số (C) với trục Oy là $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0; 1)$ là: $k = y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0; 1)$ là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Câu 8: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 12x^2 - 12x \Rightarrow y'(1) = 0.$$

$$\text{Ta có } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

$$y = -1.$$

Câu 9: Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm M là

Lời giải

Hoành độ điểm M là nghiệm của phương trình $\frac{x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó $M(-1; 0)$. Mặt khác, $y' = -\frac{3}{(x-2)^2}$ nên $y'(-1) = -\frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -\frac{1}{3}(x+1) + 0 \Leftrightarrow 3y + x + 1 = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 4$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k ($k > 0$) của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là:

Lời giải

Ta có hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + 4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta có $y' = 2x + 3$.

Với $x = 0$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(0) = 3$.

Với $x = -3$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(-3) = -3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(5-x) + xf(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ là 5.

Lời giải

Thay $x = 0$ vào $2f(5-x) + xf(x) = 2x$ ta được $2f(5) = 0 \Rightarrow f(5) = 0$.

Thay $x = 5$ vào $2f(5-x) + xf(x) = 2x$ ta được $2f(0) + 5f(5) = 10 \Rightarrow f(0) = 5$.

$$2f(5-x) + xf(x) = 2x \Rightarrow -2f'(5-x) + f(x) + xf'(x) = 2 \quad (*).$$

Thay $x = 0$ vào $(*)$ ta có $-2f'(5) + f(0) = 2 \Rightarrow f'(5) = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ là 5 là

$$y = f'(5)(x-5) + f(5) = \frac{3}{2}(x-5) + 0 = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(3x-3) + f(6-3x) = 3x^2 - 5x$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

Lời giải

$$2f(3x-3) + f(6-3x) = 3x^2 - 5x.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 có dạng $y = f'(3)(x-3) + f(3)$.

Thay $x = 1$ vào ta được: $2f(0) + f(3) = -2$.

Thay $x = 2$ vào ta được: $2f(3) + f(0) = 2$.

Từ và suy ra $f(3) = 2$.

Lấy đạo hàm hai vế của ta được $6f'(3x-3)-3f'(6-3x)=6x-5$.

Thay $x=1$ vào ta được: $6f'(0)-3f'(3)=-5$.

Thay $x=2$ vào ta được: $6f'(3)-3f'(0)=7$.

Từ và suy ra $f'(3)=1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là $y=1(x-3)+2=x-1$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ luôn dương $\forall x>0$ và thỏa mãn điều kiện $f^4(2x)-xf^2(4x-1)=x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(1; f(1))$.

Suy ra $d: y=f'(1).(x-1)+f(1)$.

Xét điều kiện: $f^4(2x)-xf^2(4x-1)=x$.

+) Cho $x=\frac{1}{2}$ ta được:

$$f^4(1)-\frac{1}{2}f^2(1)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f^4(1)-f^2(1)-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(1)=1 \\ f^2(1)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} (L)$$

+) Đạo hàm hai vế của ta được:

$$8f^3(2x).f'(2x)-[f^2(4x-1)+8x.f(4x-1).f'(4x-1)]=1.$$

Thay $x=\frac{1}{2}$ vào điều kiện được: $8f^3(1).f'(1)-f^2(1)-4f(1).f'(1)=1$.

Lại có $f(1)=1$ khi đó trở thành: $8.1.f'(1)-1-4.1.f'(1)=1 \Leftrightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình của d là $y=\frac{1}{2}(x-1)+1$.

Vậy tiếp tuyến d có phương trình là $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Câu 14: Cho các hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2x+3)=g(x)+x^2-2022x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(5)=f'(5)=-2023$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ có phương trình là

Lời giải

Ta có $f(2x+3) = g(x) + x^2 - 2022x \Rightarrow 2f'(2x+3) = g'(x) + 2x - 2022$.

Ta chọn $x=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f'(5) = g'(1) + 2 - 2022 \\ f(5) = g(1) + 1^2 - 2022 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(1) = -2026 \\ g(1) = -2 \end{cases}.$$

Từ đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=g(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y = g'(1) \cdot (x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = -2026(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -2026x + 2024$.

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^2 - 2x + 2023$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 7$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với $(d): y = 2x + 7$.

Lời giải

Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C) .

$$y' = 2x - 2 \text{ suy ra hệ số góc } k = y'(x_0) = 2x_0 - 2.$$

Mặt khác tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 2x + 7 \Rightarrow k = 2$

$$\Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2023 \text{ suy ra } M(2; 2023).$$

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 2(x-2) + 2023 = 2x + 2019$.

Câu 16: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 12x + 2022$ là

Lời giải

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $6x^2 - 6x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Với $x = -1$ suy ra tọa độ tiếp điểm $M(-1; -6)$ do đó phương trình tiếp tuyến $d_1: y = 12x + 6$.

Với $x = 2$ suy ra tọa độ tiếp điểm $N(2; 3)$ suy ra phương trình tiếp tuyến là: $d_2: y = 12x - 21$.

Câu 17: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^4 + 2x^2 - 1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{x}{8} - 2022$ là

Lời giải

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{x}{8} - 2022$ nên $k_t \left(-\frac{1}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow k_t = 8$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $4x^3 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $x = 1$ suy ra tọa độ tiếp điểm $M(1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 8x - 6$.

Câu 18: Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ và đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0$. Tiếp tuyến của đường cong (C) và song song với d có phương trình là

Lời giải

Ta có đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 1$.

Tiếp tuyến song song với d nên phương trình tiếp tuyến có hệ số góc là $k = -2$.

Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm.

$$\text{Khi đó } y'(x_0) = k \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 2 = -2 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow M(0; -1)$, phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x - 1$ trùng với d .

Với $x_0 = 2 \Rightarrow N(2; -9)$, phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x - 5$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên

$$f'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 0)$ sao cho từ M vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó tìm m .

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $A(x_0; x_0^3 + 3x_0^2)$ là:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2.$$

$$M(m; 0) \in \Delta \Leftrightarrow (3x_0^2 + 6x_0)(m - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0[(3x_0 + 6)(m - x_0) + x_0^2 + 3x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0^2 + (3 - 3m)x_0 - 6m = 0 \quad (*) \end{cases}.$$

Do $y'(0) = 0$ nên đề từ M vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau thì phương trình $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn điều kiện $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -6m \neq 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 30m + 9 > 0 \\ 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \quad (I) \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ nên theo định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m-3}{2} \\ x_1x_2 = -3m \end{cases}$.

$$\text{Do đó } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -3 \\ m > \frac{-1}{3} \end{cases} \\ 9.9m^2 - 54m\left(\frac{3m-3}{2}\right) + 36.(-3m) = -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -3 \\ m > \frac{-1}{3} \end{cases} \\ m \neq 0 \\ m = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}.$$

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$ và hoành độ tiếp điểm là số thực âm.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có:

$$1 = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{107}{8}, y'(x_0) = -\frac{33}{4}.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = -\frac{33}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{107}{8} = -\frac{33}{4}x + 1.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\frac{33}{4}x + 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ?

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) .

Ta có $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0$; $y_0 = x_0^4 - 2x_0^2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại $M(x_0; y_0)$ là: $y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 2x_0^2$.

Tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ nên

$$(4x_0^3 - 4x_0)(-x_0) + x_0^4 - 2x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(-3x_0^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$, ta có $y_0 = 0$, $y'(0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$.

Với $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, ta có $y_0 = -\frac{8}{9}$, $y'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{4\sqrt{6}}{9}x$.

Với $x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, ta có $y_0 = -\frac{8}{9}$, $y'\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{9}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{4\sqrt{6}}{9}x$.

Vậy có 3 tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ (C), có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt trục Oy, Ox lần lượt tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 2?

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0; \frac{3x_0+2}{x_0+1}\right) \in (C)$ là:

$$d: y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{3x_0+2}{x_0+1} \text{ hay } d: y = \frac{1}{(x_0+1)^2}x + \frac{3x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2}.$$

Đường thẳng d cắt Oy tại hai điểm $A\left(0; \frac{3x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2}\right)$ và cắt Ox tại $B\left(-\left(3x_0^2+4x_0+2\right); 0\right)$

$$\text{Ta có } S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{3x_0^2 + 4x_0 + 2}{(x_0 + 1)^2} \right| \cdot |3x_0^2 + 4x_0 + 2| = 2 \Rightarrow (3x_0^2 + 4x_0 + 2)^2 = 4(x_0 + 1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 4x_0 + 2 = 2x_0 + 2 \\ 3x_0^2 + 4x_0 + 2 = -2x_0 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 2x_0 = 0 \\ 3x_0^2 + 6x_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y = x + 2$.

Với $x_0 = -\frac{2}{3} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y = 9x + 6$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị hàm số thỏa mãn bài ra.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C) . Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 2OB$.

Lời giải

Giả sử d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Do d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 2OB$ nên $\tan OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}$.

Suy ra hệ số góc k của d bằng $\frac{1}{2}$ hoặc $-\frac{1}{2}$.

Ta có $k = y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} < 0$ nên $k = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 2 \\ x_0 - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

+) Với $x_0 = -1$: phương trình của d là $y = -\frac{1}{2}(x+1) + y(-1) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

+) Với $x_0 = 3$: phương trình của d là $y = -\frac{1}{2}(x-3) + y(3) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) thỏa mãn là $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Câu 25: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) mà tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) : $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C) (x_0 \neq -1)$ có dạng

$$y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0+1}.$$

Giả sử tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân. Khi đó tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{(x_0+1)^2} = -1 & (1) \\ \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 & (2) \end{cases}.$$

Dễ thấy không xảy ra vì vế trái dương vế phải âm.

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 1$.

Với $x_0 = -2$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 5$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI 2: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M_0(x_0; f(x_0))$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$. Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm M_0 có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình là

Lời giải

Giao điểm của đồ thị (C) và trục tung là $M(0; -1)$.

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; -1)$.

$$y = y'(0)(x - 0) - 1 = -2x - 1.$$

Câu 27: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 + 2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là;

$$y = y'(1)(x - 1) + 0 = -x + 1.$$

Câu 28: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 \Rightarrow y'(-1) = 3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2$.

Câu 29: Viết phương trình tiếp của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-2; -8)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2$.

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $(-2; -8)$ là $y'(-2) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 12(x + 2) - 8 \Leftrightarrow y = 12x + 16$.

Câu 30: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 3$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(x_0; y_0) \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Gọi tiếp tuyến (d) tiếp xúc đồ thị hàm số tại điểm $A(0; 1)$

$\Rightarrow$ Hệ số góc $k = y'(x_0) = y'(0) = -3$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (d) : $y = -3(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

$y = 8(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = 8x - 5$.

Câu 32: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Giao điểm M của đồ thị hàm số (C) với trục Oy là $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0; 1)$ là: $k = y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0; 1)$ là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Câu 33: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 12x^2 - 12x \Rightarrow y'(1) = 0$.

Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = -1$.

Câu 34: Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm M là

Lời giải

Hoành độ điểm M là nghiệm của phương trình $\frac{x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó $M(-1; 0)$. Mặt khác, $y' = -\frac{3}{(x-2)^2}$ nên $y'(-1) = -\frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -\frac{1}{3}(x+1) + 0 \Leftrightarrow 3y + x + 1 = 0$.

Câu 35: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 4$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k ($k > 0$) của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là:

Lời giải

Ta có hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + 4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta có $y' = 2x + 3$.

Với $x = 0$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(0) = 3$.

Với $x = -3$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(-3) = -3$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(5-x) + xf(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ là 5.

Lời giải

Thay $x = 0$ vào $2f(5-x) + xf(x) = 2x$ ta được $2f(5) = 0 \Rightarrow f(5) = 0$.

Thay $x = 5$ vào $2f(5-x) + xf(x) = 2x$ ta được $2f(0) + 5f(5) = 10 \Rightarrow f(0) = 5$.

$2f(5-x) + xf(x) = 2x \Rightarrow -2f'(5-x) + f(x) + xf'(x) = 2$ (*).

Thay $x = 0$ vào (*) ta có $-2f'(5) + f(0) = 2 \Rightarrow f'(5) = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ là 5 là

$y = f'(5)(x-5) + f(5) = \frac{3}{2}(x-5) + 0 = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(3x-3) + f(6-3x) = 3x^2 - 5x$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

Lời giải

$2f(3x-3) + f(6-3x) = 3x^2 - 5x$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 có dạng $y = f'(3)(x-3) + f(3)$.

Thay $x = 1$ vào ta được: $2f(0) + f(3) = -2$.

Thay $x = 2$ vào ta được: $2f(3) + f(0) = 2$.

Từ và suy ra $f(3) = 2$.

Lấy đạo hàm hai vế của ta được $6f'(3x-3) - 3f'(6-3x) = 6x - 5$.

Thay $x = 1$ vào ta được: $6f'(0) - 3f'(3) = -5$.

Thay $x = 2$ vào ta được: $6f'(3) - 3f'(0) = 7$.

Từ và suy ra $f'(3) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là $y = 1(x-3) + 2 = x - 1$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ luôn dương $\forall x > 0$ và thỏa mãn điều kiện $f^4(2x) - xf^2(4x-1) = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(1; f(1))$.

Suy ra $d: y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$.

Xét điều kiện: $f^4(2x) - xf^2(4x-1) = x$.

+) Cho $x = \frac{1}{2}$ ta được:

$$f^4(1) - \frac{1}{2}f^2(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f^4(1) - f^2(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(1) = 1 \\ f^2(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} (L)$$

+) Đạo hàm hai vế của ta được:

$$8f^3(2x) \cdot f'(2x) - [f^2(4x-1) + 8x \cdot f(4x-1) \cdot f'(4x-1)] = 1.$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào điều kiện được: $8f^3(1) \cdot f'(1) - f^2(1) - 4f(1) \cdot f'(1) = 1$.

Lại có $f(1) = 1$ khi đó trở thành: $8 \cdot 1 \cdot f'(1) - 1 - 4 \cdot 1 \cdot f'(1) = 1 \Leftrightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình của d là $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$.

Vậy tiếp tuyến d có phương trình là $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Câu 39: Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2x+3) = g(x) + x^2 - 2022x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(5) = f'(5) = -2023$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình là

Lời giải

Ta có $f(2x+3) = g(x) + x^2 - 2022x \Rightarrow 2f'(2x+3) = g'(x) + 2x - 2022$.

Ta chọn $x = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f'(5) = g'(1) + 2 - 2022 \\ f(5) = g(1) + 1^2 - 2022 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(1) = -2026 \\ g(1) = -2 \end{cases}.$$

Từ đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = g'(1) \cdot (x - 1) + g(1) \Leftrightarrow y = -2026(x - 1) - 2 \Leftrightarrow y = -2026x + 2024$.

Câu 40: Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^2 - 2x + 2023$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 7$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với $(d): y = 2x + 7$.

Lời giải

Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C) .

$y' = 2x - 2$ suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = 2x_0 - 2$.

Mặt khác tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 2x + 7 \Rightarrow k = 2$

$$\Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2023 \text{ suy ra } M(2; 2023).$$

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 2(x - 2) + 2023 = 2x + 2019$.

Câu 41: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 12x + 2022$ là

Lời giải

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $6x^2 - 6x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Với $x = -1$ suy ra tọa độ tiếp điểm $M(-1; -6)$ do đó phương trình tiếp tuyến $d_1: y = 12x + 6$.

Với $x = 2$ suy ra tọa độ tiếp điểm $N(2; 3)$ suy ra phương trình tiếp tuyến là: $d_2: y = 12x - 21$.

Câu 42: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^4 + 2x^2 - 1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{x}{8} - 2022$ là

Lời giải

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{x}{8} - 2022$ nên $k_t \left(-\frac{1}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow k_t = 8$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $4x^3 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $x = 1$ suy ra tọa độ tiếp điểm $M(1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 8x - 6$.

Câu 43: Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ và đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0$. Tiếp tuyến của đường cong (C) và song song với d có phương trình là

Lời giải

Ta có đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 1$.

Tiếp tuyến song song với d nên phương trình tiếp tuyến có hệ số góc là $k = -2$.

Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm.

$$\text{Khi đó } y'(x_0) = k \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 2 = -2 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow M(0; -1)$, phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x - 1$ trùng với d .

Với $x_0 = 2 \Rightarrow N(2; -9)$, phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x - 5$.

Câu 44: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên

$$f'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

Câu 45: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 0)$ sao cho từ M vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó tìm m .

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $A(x_0; x_0^3 + 3x_0^2)$ là:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2.$$

$$\begin{aligned} M(m; 0) \in \Delta &\Leftrightarrow (3x_0^2 + 6x_0)(m - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 \left[(3x_0 + 6)(m - x_0) + x_0^2 + 3x_0 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0^2 + (3 - 3m)x_0 - 6m = 0 \quad (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Do $y'(0) = 0$ nên đề từ M vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau thì phương trình $(*)$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn điều kiện $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -6m \neq 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 30m + 9 > 0 \\ 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \quad (I) \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình } (*) \text{ nên theo định lý Vi-et, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m-3}{2} \\ x_1x_2 = -3m \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -3 \\ m > \frac{-1}{3} \end{cases} \\ 9 \cdot 9m^2 - 54m \left(\frac{3m-3}{2} \right) + 36 \cdot (-3m) = -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -3 \\ m > \frac{-1}{3} \end{cases} \\ m \neq 0 \\ m = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}.$$

Câu 46: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$ và hoành độ tiếp điểm là số thực âm.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có:

$$1 = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Với $x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{107}{8}, y'(x_0) = -\frac{33}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{33}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{107}{8} = -\frac{33}{4}x + 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\frac{33}{4}x + 1$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ?

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) .

Ta có $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0; y_0 = x_0^4 - 2x_0^2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại $M(x_0; y_0)$ là: $y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 2x_0^2$.

Tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ nên

$$(4x_0^3 - 4x_0)(-x_0) + x_0^4 - 2x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(-3x_0^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$, ta có $y_0 = 0, y'(0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$.

Với $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, ta có $y_0 = -\frac{8}{9}, y'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{4\sqrt{6}}{9}x$.

Với $x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, ta có $y_0 = -\frac{8}{9}, y'\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{9}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{4\sqrt{6}}{9}x$.

Vậy có 3 tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ.

Câu 48: Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}(C)$, có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt trục Oy, Ox lần lượt tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 2?

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0; \frac{3x_0+2}{x_0+1}\right) \in (C)$ là:

$$d: y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{3x_0+2}{x_0+1} \text{ hay } d: y = \frac{1}{(x_0+1)^2}x + \frac{3x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2}.$$

Đường thẳng d cắt Oy tại hai điểm $A\left(0; \frac{3x_0^2 + 4x_0 + 2}{(x_0 + 1)^2}\right)$ và cắt Ox tại $B\left(-\left(3x_0^2 + 4x_0 + 2\right); 0\right)$

$$\text{Ta có } S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{3x_0^2 + 4x_0 + 2}{(x_0 + 1)^2} \right| \cdot |3x_0^2 + 4x_0 + 2| = 2 \Rightarrow (3x_0^2 + 4x_0 + 2)^2 = 4(x_0 + 1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 4x_0 + 2 = 2x_0 + 2 \\ 3x_0^2 + 4x_0 + 2 = -2x_0 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2 + 2x_0 = 0 \\ 3x_0^2 + 6x_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y = x + 2$.

Với $x_0 = -\frac{2}{3} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y = 9x + 6$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị hàm số thỏa mãn bài ra.

Câu 49: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C) . Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 2OB$.

Lời giải

Giả sử d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Do d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 2OB$ nên $\tan OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}$

. Suy ra hệ số góc k của d bằng $\frac{1}{2}$ hoặc $-\frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có } k = y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} < 0 \text{ nên } k = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 2 \\ x_0 - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } x_0 = -1: \text{ phương trình của } d \text{ là } y = -\frac{1}{2}(x+1) + y(-1) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

$$+) \text{ Với } x_0 = 3: \text{ phương trình của } d \text{ là } y = -\frac{1}{2}(x-3) + y(3) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) thỏa mãn là $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Câu 50: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C) mà tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) : $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C) (x_0 \neq -1)$ có dạng

$$y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0+1}.$$

Giả sử tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân. Khi đó tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{(x_0+1)^2} = -1 & (1) \\ \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 & (2) \end{cases}.$$

Dễ thấy không xảy ra vì vế trái dương vế phải âm.

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 1$.

Với $x_0 = -2$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 5$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.