Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ và tuần hoàn của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta cần thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số - Tập D phải đối xứng
- **Bước 2:** Tính $f(-x)$ *(chỗ nào có biến x, ta thay bởi $-x$)* và thu gọn kết quả đó. Khi đó:
  - Nếu $f(-x)=f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn
  - Nếu $f(-x)=-f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ
  - Nếu không rơi vào hai trường hợp trên thì ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ
- Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in D$ ta có:
  - $x+T\in D$ và $x-T\in D$
  - $f(x+T)=f(x)$

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

a) $y=\sin 2x$ b) $y=\tan|x|$ c) $y=\sin^4 x$

d) $y=\tan x+\cot x$ e) $y=\sin x.\cos x$ f) $y=2\sin x+3$

g) $y=\sin x+\cos x$ h) $y=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$ i) $y=\dfrac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có: $f(-x)=\sin(-2x)=-\sin 2x=-f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tạp xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có: $f(-x)=\tan|-x|=\tan|x|=f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có: $f(-x)=\sin^4(-x)=\sin^4 x=f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-(\tan x+\cot x)=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

e) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\sin(-x).\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

f) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)+3=1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+3=5$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$. Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

g) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$. Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

h) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \\ \sin x+\cot x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \\ \sin^2 x+\cos x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\frac{\sin(-x)-\tan(-x)}{\sin(-x)+\cot(-x)}=\frac{-\sin x+\tan x}{-\sin x-\cot x}=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}=f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

i) Tập xác định: $\cot x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

Ta có: $f(-x)=\frac{\cos^3(-x)+1}{\sin^3(-x)}=\frac{\cos^3 x+1}{-\sin^3 x}=-\frac{\cos^3 x+1}{\sin^3 x}=-f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài tập 2: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

a) $y=f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $y=\frac{\sin 2x}{2\cos x-3}$

Lời giải

a) Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Hàm số không thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, và cũng không thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ nên đây là hàm số không chẵn không lẻ.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \dfrac{\sin(-2x)}{2\cos(-x)-3} = \dfrac{-\sin 2x}{2\cos x - 3} = -f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài tập 3: Xác định tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m.\sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = 3m.\sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m.\sin 4x + \cos 2x$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$f(-x) = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m.\sin 4x + \cos 2x = -3m\sin 4x + \cos 2x \Leftrightarrow 6m.\sin 4x = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Bài tập 4: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sin(x^2)$ b) $y = \tan\sqrt{x}$

Lời giải

a) Hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0 và $\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \to 0$ khi $k \to \infty$.

b) Hàm số $f(x) = \tan\sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$ và $(k+1)^2\pi^2 - k^2\pi \to \infty$ khi $k \to \infty$.

Bài tập 5: Tìm chu kì T của hàm số sau:

a) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + 2\cos\dfrac{3x}{2}$ b) $y = \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $y = -\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$ d) $y = \cos 3x + \cos 5x$

Lời giải

a) Chu kỳ của $\sin\dfrac{x}{2}$ là $T_1 = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ và Chu kỳ của $\cos\dfrac{3x}{2}$ là $T_2 = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}\right|} = \dfrac{4\pi}{3}$

Chu kì của hàm ban đầu là bội chung nhỏ nhất của hai chu kì T_1 và T_2 vừa tìm được ở trên.
Chu kì của hàm ban đầu $T = 4\pi$

b) Hàm số $y = \sin(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{5}$.

c) Hàm số $y=-\frac{1}{2}\sin\left(100\pi x+50\pi\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{100\pi}=\frac{1}{50}$.

d) Hàm số $y=\cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y=\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y=\cos 3x+\cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị của hàm số nào sau đây không đối xứng qua trục tung:

A. $y=1-\sin x$. **B.** $y=2+\sin^2 x$.

C. $y=\sin\left(3|x|-1\right)$. **D.** $y=\sin\left(1+2x\right)+\sin\left(1-2x\right)$.

Lời giải

Đồ thị của hàm số không đối xứng qua trục tung thì hàm số đó là hàm số không chẵn. Mặt khác hàm số $y=1-\sin x$ là hàm không chẵn không lẻ nên đồ thị hàm số $y=1-\sin x$ không đối xứng qua trục tung.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=\sin x+\cos x$. **C.** $y=-\cos x$. **D.** $y=\cos x$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\sin\left(-x\right)=-\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ.

Xét hàm số $y=\sin x+\cos x=f\left(x\right)$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq\pm f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số $y=\sin x+\cos x$ không là hàm số chẵn và không là hàm số lẻ.

Xét hàm số $y=-\cos x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $-\cos\left(-x\right)=-\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=-\cos x$ là hàm số chẵn.

Xét hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\cos\left(-x\right)=\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\cos 3x$. **B.** $y=-\sin x$. **C.** $y=\sin 3x$. **D.** $y=\sin 2x+\cos 2x$.

Lời giải

Xét các đáp án ta thấy ở phương án A hàm số $y=\cos 3x$ có

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$f(-x)=\cos(-3x)=\cos 3x=f(x),\forall x\in D$ do đó $y=\cos 3x$ là hàm số chẵn.

Các hàm số ở các đáp án còn lại không thỏa mãn định nghĩa hàm số chẵn.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=-\sin x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\cos x\sin x$. **D.** $y=\sin x$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\cos x$ có tập xác định $\mathbb{R}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$

Đặt $f(x)=\cos x$. Khi đó $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$.

Do đó $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 5: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=\tan x-\sin 2x$. **B.** $y=\sin 2x$.

C. $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. **D.** $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Xét hàm: $y=\tan x-\sin 2x\Rightarrow y(-x)=\tan(-x)-\sin(-2x)=-y(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ nên hàm số là hàm lẻ.

Xét hàm: $y=\sin 2x\Rightarrow y(-x)=\sin(-2x)=-y(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số là hàm lẻ.

Xét hàm: $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\Rightarrow y(-x)=\cos(-x)=\cos x=y(x),\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số là hàm chẵn.

Xét hàm:

$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\sin(-x)=-\sin x\Rightarrow y(-x)=-\sin(-x)=\sin x=-y(x),\forall x\in\mathbb{R}$

nên hàm số là hàm lẻ.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=\frac{\tan x}{\sin x}$. **B.** $y=\frac{\cot x}{\cos x}$. **C.** $y=\cos x$. **D.** $y=\sin^2 x$.

Lời giải

Ta có tập xác định của hàm số $y=\frac{\cot x}{\cos x}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{R}\right\}$.

Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $f(-x)=\frac{\cot(-x)}{\cos(-x)}=-\frac{\cot x}{\cos x}=-f(-x)$.

Vậy hàm số $y=\frac{\cot x}{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Câu 7: Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=\sin^2 x+x$ là hàm số lẻ.

B. Hàm số $y=\sin x.\cos x$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y=\cos x+\sin x$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y=\sin x+1$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Xét hàm số $y=f(x)=\sin x.\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$ và $f(-x)=\sin(-x).\cos(-x)=-\sin x.\cos x=-f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y=\sin x$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\cot x$. **D.** $y=\tan x$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\cos x$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có $\cos(-x)=\cos x,\ \forall x\in D$ nên hàm số $y=\cos x$ là hàm chẵn.

Câu 9: Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

A. $y=\tan x$.

B. $y=\cos(-x)$.

C. $y=\sin^2 x$.

D. $y=\cot^2 x$.

Lời giải

Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ theo tính chất hàm số lượng giác.

Các hàm số $y=\sin^2 x;\ y=\cot^2 x;\ y=\cos(-x)$ là hàm số chẵn.

Câu 10: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin x$.

B. $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $y=3\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+4\sin(\pi+2x)$.

D. $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\cos 2x}$.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin x=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)-\sin x=\cos x$

Mà hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn suy ra hàm số chẵn.

Câu 11: Cho các hàm số $y=\cos x, y=\sin x, y=\tan x, y=\cot x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số **chẵn**?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y=\cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 12: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y=x^2.\tan x$. **B.** $y=\cos 2x-x$. **C.** $y=\sqrt{x}\cos x$. **D.** $y=x.\sin 2x$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x^2.\tan x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$; $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=(-x)^2.\tan(-x)=-x^2.\tan x=-f(x)$ nên $y=x^2.\tan x$ là hàm số lẻ.

Hàm số $y=f(x)=\cos 2x-x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

có $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{\pi}{2}\neq\pm f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $y=\cos 2x-x$ không chẵn, không lẻ.

Hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}\cos x$ có tập xác định $D=[0;+\infty)$; có $x=1\in D$ nhưng $-1\notin D$ nên hàm số $y=\sqrt{x}\cos x$ không chẵn, không lẻ.

Hàm số $y=f(x)=x.\sin 2x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=(-x).\sin 2(-x)=x.\sin 2x=f(x)$ nên chọn.

Câu 13: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

A. $T=\pi$. **B.** $T=4\pi$. **C.** $T=2\pi$. **D.** $T=6\pi$

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$; $x+2\pi\in D$; $x-2\pi\in D$; $\forall x\in D$

Ta có: $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ do đó $T=2\pi$

Câu 14: Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y=\sin 2x$ là

A. π. **B.** 2π. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** 4π.

Lời giải

Ta có: $y=\sin 2(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x$. Do π là số dương nhỏ nhất thỏa mãn tính chất trên nên hàm $y=\sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π

Câu 15: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π.

B. Hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

C. Hàm số $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

D. Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Lời giải

Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π.

Câu 16: Trong các hàm số $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ có bao nhiêu hàm số có chu kì là 2π ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chỉ có $y=\sin x, y=\cos x$ là hai hàm số có chu kì bằng 2π.

Câu 17: Hàm số $y=\sin 2x$ có chu kì tuần hoàn là

A. $T=\pi$. **B.** $T=\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=2\pi$.

Lời giải

Chu kì tuần hoàn của hàm số $y=\sin 2x$ là $T=\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$.

Câu 18: Tìm chu kì T của hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2025\right)$.

A. $T=\pi$. **B.** $T=-2\pi$. **C.** $T=4\pi$. **D.** $T=2\pi$.

Lời giải

Lý thuyết : hàm số $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2025\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi$.

Câu 19: Tìm chu kì T của hàm số $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

A. $k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** π. **D.** 2π.

Lời giải

Áp dụng: Hàm số $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 20: Hàm số $y=\sin 2x+\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có chu kì là:

A. 3π. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** 6π.

Lời giải

Ta thấy $\sin 2x$ có chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$, $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{3}$

Vì hàm số y là tổng của hai hàm trên nên chu kì của y là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2

Vậy hàm số có chu kì $T=2\pi$.

Câu 21: Hàm số $y=\tan\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ bằng

A. 4π. **B.** 3π. **C.** 2π. **D.** 6π.

Lời giải

Cách 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+k3\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Vì hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên với mọi $x\in D$, ta có

$$f(x)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\tan\left(\frac{x+3\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=f(x+3\pi).$$

Ngoài ra, giả sử $f(x)=f(x+\alpha),\forall x\in D$ thì

$\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x+\alpha}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{3}\right),\forall x\in D$. Khi đó $\frac{\alpha}{3}$ là bội của π hay α là bội của 3π. Vậy hàm số $y=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ bằng 3π.

Cách 2: Hàm số $y=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+k3\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Giả sử hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T>0$. Khi đó

$$f(x+T)=f(x),\forall x\in D\Leftrightarrow\tan\left(\frac{x+T}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right),\forall x\in D.$$

Chọn $x=-\frac{3\pi}{4}$, ta được $\tan\left(\frac{T}{3}\right)=0\Leftrightarrow T=k3\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Thử lại ta được $\forall x\in D,\ f(x+T)=f(x)$ và $x+3\pi,\ x-3\pi\in D$.

Với $k=1$, ta được $T=3\pi$ là số dương bé nhất thỏa mãn nên hàm số tuần hoàn chu kì $T=3\pi$

Câu 22: Chu kỳ của hàm số $y=3\tan(mx+n)$ với m, n là những số nguyên dương là

A. $\frac{\pi}{m}$. **B.** $\frac{\pi}{c}$, c là bội chung nhỏ nhất của m, n.

C. $\frac{\pi}{m.n}$. **D.** $\frac{\pi}{d}$, d là ước chung lớn nhất của m, n.

Lời giải

Ta có chu kỳ của hàm số $y=3\tan(mx+n)$ là $\frac{\pi}{|m|}=\frac{\pi}{m}$.

Câu 23: Chu kì của hàm số $y=3+2\sin^2 2x$ là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** π. **D.** 2π.

Lời giải

Ta có: $y=3+2\sin^2 2x=3+1-\cos 4x=4-\cos 4x$.

Suy ra chu kì tuần hoàn của hàm số là $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y=\cos x$ xác định với mọi số thực

b) Hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì π.

c) Hàm số $y=\sin\left(x^2\right)$ là hàm số lẻ.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\sin x+2$ bằng 2

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y=\cos x$ xác định với mọi số thực

b) Hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì π

c) Xét hàm số $y=\sin\left(x^2\right)$.

Tập xác định $\mathbb{R}$ và $f(-x)=\sin(-x)^2=\sin x^2=f(x)$ nên đây là hàm số chẵn.

d) Ta có $-1\le\sin x\le 1\Rightarrow -3\le 5\sin x+2\le 7$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$

b) $f(-\pi)=-f(\pi)$

c) $f(-x)=f(x)$

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có $f(-\pi)=-2\ne -f(\pi)=2$

c) Đúng: Với mọi $x\in D$ ta có:

$-x\in D$ và $f(-x)=\sin^2(-x)+\cos(-x)-1=\sin^2 x+\cos x-1=f(x)$.

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\tan x-x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(-x)=-f(x)$

d) Hàm số đối xứng với nhau qua trục Oy

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

b) Sai: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | \, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và $f\left(-x\right) = \tan\left(-x\right) - \left(-x\right) = -\tan x + x = -\left(\tan x - x\right) = -f\left(x\right)$.

d) Sai: Hàm số đã cho là hàm số lẻ nên đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right) = |x| \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f\left(-\pi\right) = -f\left(\pi\right)$

c) $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$

d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$

Lời giải

a) Sai: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Ta có: $f\left(-\pi\right) = 0$; $-f\left(\pi\right) = 0 \Rightarrow f\left(-\pi\right) = -f\left(\pi\right)$

c) Đúng: Với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và $f\left(-x\right) = |-x| \sin\left(-x\right) = -|x| \sin x = -f\left(x\right)$.

d) Đúng: Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ nên đối xứng qua gốc tọa độ

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right) = |\tan x| + \left|x^3 - 3x\right|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $f\left(-\pi\right) = -f\left(\pi\right)$

c) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Sai: $f\left(-\pi\right) \neq -f\left(\pi\right)$

c) Đúng: Với mọi $x \in D$ ta có:

$-x \in D$ và $f\left(-x\right) = \left|\tan\left(-x\right)\right| + \left|\left(-x\right)^3 - 3\left(-x\right)\right| = |\tan x| + \left|x^3 - 3x\right| = f\left(x\right)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Sai: Hàm số đã cho đối xứng qua gốc qua trục Oy

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right) = 2\cos x + 1$ và $g\left(x\right) = \sin x + \tan x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

b) Đúng: Với mọi $x\in D$ thì $x\pm 2\pi\in D$ và $f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)+1=2\cos x+1=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Sai: Tập xác định hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x\in D$ thì $x\pm 2\pi\in D$ và
$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\tan(x+2\pi)=\sin x+\tan x=f(x)$.

d) Sai: Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\tan x$ và $g(x)=\cot^2 x-\frac{\sin 2x}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

b) Sai: Với mọi $x\in D$ thì $x\pm\pi\in D$ và $f(x+\pi)=\tan(x+\pi)=\tan x=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Đúng: Tập xác định hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x\in D$ thì $x\pm\pi\in D$ và

$$f(x+\pi)=\cot^2(x+\pi)-\frac{\sin 2(x+\pi)}{2}=\cot^2 x-\frac{\sin 2x}{2}=f(x).$$

d) Đúng: Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 8: Cho các hàm số $f(x)=\sqrt{3-2\sin x}$; và $g(x)=\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Hàm số $g(x)$ xác định khi $x\neq k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3-2\sin x\geq 0\Leftrightarrow \sin x\leq\frac{3}{2}$ (đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$).

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D=\mathbb{R}$.

b) Đúng: Với mọi $x\in D$ thì $x\pm 2\pi\in D$ và

$$f(x+2\pi)=\sqrt{3-2\sin(x+2\pi)}=\sqrt{3-2\sin x}=f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\neq 0\Leftrightarrow \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\pi+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

d) Sai: Với mọi $x\in D$ thì $x\pm 2\pi\in D$ và

$$f(x+2\pi)=\tan\frac{x+2\pi}{2}-\frac{1}{3}\cos(x+2\pi)=\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)-\frac{1}{3}\cos x=\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\cos x=f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 9: Cho các hàm số sau: $f(x)=\sqrt{5-3\sin^2 x}$; $g(x)=\tan x-x\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số là: $D=\mathbb{R}$.

b) Sai: Với mọi $x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=\sqrt{5-3\sin^2(-x)}=\sqrt{5-3\sin^2 x}=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Đúng: Tập xác định hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d) Sai: Với mọi $x\in D$ thì $-x\in D$ và

$$f(-x)=\tan(-x)-(-x)\cos(-x)=-\tan x+x\cos x=-f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 10: Cho các hàm số sau: $f(x)=2\cos 3x-1$; $g(x)=|2\sin x+2|+|2\sin x-2|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Xét $y=f(x)=2\cos 3x-1$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(-x)=2\cos(-3x)-1=2\cos 3x-1=f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) d) Xét $y=f(x)=|2\sin x+2|+|2\sin x-2|$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(-x)=|2\sin(-x)+2|+|2\sin(-x)-2|=|-2\sin x+2|+|-2\sin x-2|$

$=|-2\sin x+2|+|-2\sin x-2|=|2\sin x-2|+|2\sin x+2|=f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 11: Cho các hàm số sau: $f(x)=3\sin^3 x$; $g(x)=-5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

b) Sai: Xét $y=f(x)=3\sin^3 x$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(-x)=3\sin^3(-x)=-3\sin^3 x=-f(x)$ do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Đúng: Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D=\mathbb{R}$.

d) Sai: Xét $y=f(x)=-5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có $\begin{cases} f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-5\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-5\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-5\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=-5\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\neq f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \\ f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\neq -f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \end{cases}.$

Do đó hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm chu kì T của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi)$.

Lời giải

Hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin(100\pi x+50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{100\pi}=\dfrac{1}{50}=0,02$

Câu 2: Tìm chu kì T của hàm số $y=3\cos(2x+1)-2\sin\left(\dfrac{x}{2}-3\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=3\cos(2x+1)$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

Hàm số $y=-2\sin\left(\dfrac{x}{2}-3\right)$. tuần hoàn với chu kì $T_2=\dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{2}}=4\pi$.

Suy ra hàm số $y=3\cos(2x+1)-2\sin\left(\dfrac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi\approx 12,56$

Câu 3: Tìm chu kì T của hàm số $y=\sin\dfrac{x}{2}-\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=\sin\dfrac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1=4\pi$.

Hàm số $y=-\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số $y=\sin\frac{x}{2}-\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T=4\pi\approx 12,56$

Câu 4: Tìm chu kì T của hàm số $y=2\sin^2 x+3\cos^2 3x$.

Lời giải

Ta có $y=2.\frac{1-\cos 2x}{2}+3.\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1}{2}(3\cos 6x-2\cos 2x+5)$.

Hàm số $y=3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y=-2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2=\pi$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T=\pi$.

Câu 5: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao (đơn vị:cm) của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

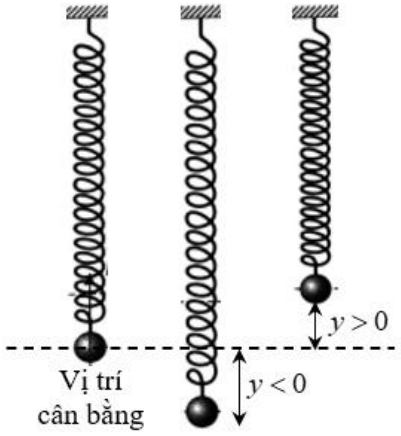
Chu kì của sóng là $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}=20$ (giây).

Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20)=90\cos\left(\frac{\pi}{10}\cdot 20\right)=90(\text{ cm})$.

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y=25\sin 4\pi t$ ở đó y được được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây. Gọi a là chu kì dao động của con lắc lò xo; b (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và c (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính $a+b+c$



Lời giải

Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2}$ suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \dfrac{1}{2}$ giây nên $a = 0,5$.

Vì chu kì dao động của con lắc là $T = \dfrac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $b = f = \dfrac{1}{T} = 2$ Hz.

Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25\sin 4\pi t$ nên biên độ dao động của nó là $A = 25$ cm

Từ đó khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $c = 2A = 50$ cm.

Vậy $a + b + c = 0,5 + 2 + 50 = 52,5$.