

Dạng 2: Giải các phương trình lượng giác mở rộng

Phương pháp: Cần chú ý một số điều đặc biệt sau đây

- Biến đổi về một trong các công thức sau:

$$\square \sin u = \sin v$$

$$\square \cos u = \cos v$$

$$\square \tan u = \tan v$$

$$\square \cot u = \cot v$$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

$$\square -\sin x = \sin(-x)$$

$$\square -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\square \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\square \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2\cos 3x + 1 = 0$

b) $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$

c) $\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$

d) $4\sin^2 x + \cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$

e) $\cos 2x - \sin 2x = 1$

f) $\sin 4x + \cos 5x = 0$

Lời giải

a) Giải phương trình: $2\cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $\sin x = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c)

$$\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 2 \end{cases}$$

Với $\sin x = 2$, phương trình vô nghiệm.

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

d) Ta có $4\sin^2 x + \cos 2x - 5\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} (TM) \\ \sin x = 2 (L) \end{cases}.$$

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

e) Ta có $\cos 2x - \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

f) $\sin 4x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = -\sin 4x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 4x + k2\pi \\ 5x = -\frac{\pi}{2} - 4x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

b) $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

c) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

d) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

Lời giải

a) Ta có: $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$b) \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$c) \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có: } \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow 4\sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$ là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

Ta có $\sin x = \sin \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3}$ là

A. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{7\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-5\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k\pi; \frac{-2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Áp dụng công thức nghiệm: $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 3: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- Câu 4:** Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$ là
A. 20° . **B.** 100° . **C.** 80° . **D.** 120° .

Lời giải

Ta có: $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 20^\circ.$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $20^\circ + 80^\circ = 100^\circ$.

- Câu 5:** Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.
A. $\frac{47\pi}{18}$. **B.** $\frac{4\pi}{18}$. **C.** $\frac{45\pi}{18}$. **D.** $\frac{7\pi}{18}$.

Lời giải

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta có :

$$\text{Với } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \text{ nên } x = \frac{11\pi}{18}.$$

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ nên}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}.$$

$$\text{Tổng tất cả các nghiệm là: } \frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}.$$

- Câu 6:** Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là
A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Do $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \pi + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 0$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị k .

Xét $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Do $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên có hai giá trị k là:

$k = 0; k = 1$ Với $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

Với $k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$.

Do đó trên khoảng $(0; \pi)$ phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trong khoảng $(0; \pi)$ là: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$.

Câu 10: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ trên $[0; 2\pi]$.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vì $\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$).

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

Câu 11: Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng

A. $\frac{7\pi}{2}$.

B. π .

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm $x = \pi + k2\pi$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(0; \pi)$.

$$x = \frac{\pi}{6} + l \frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + l \frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow l \in \{0; 1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình này bằng π .

Câu 12: Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

A. 20179.

B. 20181.

C. 16144.

D. 16145.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } \begin{cases} -2018\pi \leq k \frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}$$

Do đó có 8073 giá trị k , 4036 giá trị m , 4036 giá trị n , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145.

Câu 13: Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

A. $\frac{47\pi}{18}$.

B. $\frac{4\pi}{18}$.

C. $\frac{45\pi}{18}$.

D. $\frac{7\pi}{18}$.

Lời giải

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta có :

Với $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$, do $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k = 1$ nên $x = \frac{11\pi}{18}$.

Với $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}$, do $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$ nên

$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}$. Tổng tất cả các nghiệm là: $\frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}$.

Câu 14: Phương trình $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos 2x = 0$. **C.** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có: $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$.

Câu 15: Tập nghiệm của phương trình $(1 - \sqrt{2}\cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$. **B.** $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.
C. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$. **D.** $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Lời giải

Ta có: $(1 - \sqrt{2}\cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2}\cos x = 0 \\ 2022 + \sin^2 x = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.

Câu 16: Giải phương trình $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

A. $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. **B.** $S = \left\{ k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$.
C. $S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$. **D.** $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$

Lời giải

$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$.

Câu 17: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

- A. $-\frac{35}{36}\pi$. B. $-\frac{11}{36}\pi$. C. $-\frac{11\pi}{12}$. D. $-\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{11}{36}\pi$.

Câu 18: Số nghiệm của phương trình $\tan 3x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; 2\pi)$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) (*)$$

$$\text{Ta có: } \tan 3x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } 0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq m < 4. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = \{0; 1; 2; 3\}.$$

$$\text{Khi đó nghiệm } x \text{ nhận giá trị tương ứng trên nửa khoảng } [0; \pi) \text{ là: } x = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Vậy số nghiệm cần tìm là 4.

Câu 19: Giải phương trình $\left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{x}{2} + 2\right) = 0$

- A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} + 2 > 0$

Vậy phương trình tương đương $2\cos \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Câu 20: Phương trình $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2}$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Ta có: $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 4.\sin 4x.\cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2.\sin 8x = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 21: Phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$

Cung $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$ biểu diễn được hai điểm trên đường tròn lượng giác.

Câu 22: Giải phương trình $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

A. $S = \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$

$$\text{C. } S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{D. } S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 23: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

$$\text{A. } -\frac{35}{36}\pi.$$

$$\text{B. } -\frac{11}{36}\pi.$$

$$\text{C. } -\frac{11\pi}{12}.$$

$$\text{D. } -\frac{\pi}{12}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{11}{36}\pi$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm

d) Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

b) Đúng: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

c) Sai: Vì $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}\right\}.$

Với $x = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{3\pi}{8} \approx 0,92$ với $x = \frac{11\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{11\pi}{8} \approx -0,92.$

d) Đúng: Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{3\pi}{8}; \sin \frac{3\pi}{8}\right), \left(\frac{11\pi}{8}; \sin \frac{11\pi}{8}\right).$

Câu 2: Cho phương trình lượng giác $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm

Lời giải

a) Sai: Ta có: $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Sai: Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

c) Đúng: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$

d) Đúng: Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm

Câu 3: Cho phương trình lượng giác $\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tương đương với $\sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$

b) Đồ thị hàm số $y = \sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x)$ cắt trục hoành tại điểm gốc tọa độ

c) Phương trình có nghiệm là: $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

d) Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có một nghiệm

Lời giải

a), b) Đúng: Ta có: $\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45^\circ - 2x = 45^\circ + k360^\circ \\ 45^\circ - 2x = 180^\circ - 45^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k180^\circ \\ x = -45^\circ - k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Đúng: Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Sai: Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có hai nghiệm

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S .

Lời giải

$$\text{Phương trình } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \longrightarrow T = (-3) + (-2) + (-1) = -6.$$

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0$ có nghiệm?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m-5}{3}$$

$$\text{Điều kiện để phương trình có nghiệm: } -1 \leq \frac{m-5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 8$$

Do m nguyên nên $m = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Vậy có 7 số nguyên m .

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3\cos x + 1 = 0$ trong khoảng $(0; 2021)$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 2x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \in (0; 2021) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < 2021 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{2021}{\pi} - \frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$$

Vậy có 643 nghiệm trong khoảng $(0; 2021)$.

Câu 4: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\cos 2x - 4\sin x + m = 0$ có nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Đặt $\sin x = t$. Khi đó với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Yêu cầu đề bài tương đương với tìm số nguyên dương m sao cho $1 - 2t^2 - 4t + m = 0$ có nghiệm $t \in [0; 1]$.

Số nghiệm của phương trình $1 - 2t^2 - 4t + m = 0$ chính là số giao điểm của $y = m, y = 2t^2 + 4t - 1$. Ta có bảng biến thiên của $y(t)$ với $t \in [0; 1]$.

t	0	1
$y'(t)$	+	
$y(t)$	-1	6

Từ đó suy ra $-1 \leq m \leq 6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài mà m nguyên dương nên $m = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 5: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

Lời giải

Xét phương trình: $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5) \cdot \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } 0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{7}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\text{Suy ra các nghiệm cần tìm là } x = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \text{ nên tổng } S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi.$$

Câu 6: Cho phương trình $\cos 2x - \sin x + m - 1 = 0$ với m là tham số. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 2x - \sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2\sin^2 x + \sin x \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \text{ thì phương trình (1) trở thành } m = 2t^2 + t \quad (2).$$

Ta có bảng biến thiên hàm số $t = \sin x$

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$t = \sin x$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	1

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right)$ khi (2) có 1 nghiệm thuộc $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ và 1 nghiệm thuộc $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + t$.

Bảng biến thiên

t	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1
$f(t)$	1	0	$-\frac{1}{8}$	3

Từ bảng biến thiên ta có $0 \leq m < 1$.

-----HẾT-----