

Dạng 3: Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng

Phương pháp: Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$

- Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) .
- Tính tổng của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) .
- Tính $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$.

Lời giải

a) Từ giả thiết của bài toán ta có:

$$\begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - (u_1 + d) = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -7 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3. \end{cases}$$

Số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n) là: $u_{100} = u_1 + 99d = 2 + 99(-3) = -295$.

b) Tổng của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) là: $S_{15} = \frac{15(2u_1 + 14d)}{2} = -285$

c) Ta có: $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = \frac{27(2u_4 + 26d)}{2} = 27(u_1 + 16d) = 27[2 + 16(-3)] = -1242$.

Bài tập 2: Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + (2n-1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(2n-1) - 2n = -1$.

Ta có $S = (1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + ((2n-1)-2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S = -n$.

Nhận xét: Ta có $1; 3; 5; \dots; 2n-1$ và $2; 4; 6; \dots; 2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$\begin{aligned} S &= (1+3+5+\dots+2n-1) - (2+4+6+\dots+2n) \\ &= \frac{n}{2}(1+2n-1) - \frac{n}{2}(2+2n) = n^2 - (n^2 + n) = -n. \end{aligned}$$

Bài tập 3: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{50} = \frac{50}{2}(2u_1 + 49d) = 5150 \Rightarrow d = 4.$$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng bằng $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + 4n$.

Bài tập 4: Chu vi một đa giác là 158, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$. Biết cạnh lớn nhất là 44. Số cạnh của đa giác đó là?

Lời giải

Giả sử đa giác đã cho có n cạnh thì chu vi của đa giác là: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$ với u_1 là cạnh nhỏ

nhất. Suy ra: $158 = \frac{(u_1 + 44)n}{2} \Leftrightarrow 316 = (u_1 + 44)n \Leftrightarrow 2^2 \cdot 79 = (u_1 + 44)n$

Do đó $u_1 + 44$ là ước nguyên dương của $316 = 2^2 \cdot 79$ mà đa giác có ít nhất ba cạnh nên

$$\frac{316}{3} > u_1 + 44 > 44 \text{ suy ra } u_1 + 44 = 79 \Leftrightarrow u_1 = 35.$$

Số cạnh của đa giác đã cho là: $\frac{44 - 35}{3} + 1 = 4$ (cạnh).

Bài tập 5: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 80.000$, công sai $d = 5.000$ ta được số tiền phải trả khi khoan đến mét thứ n là

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

Khi khoan đến mét thứ 50 số tiền phải trả là $S_{50} = \frac{50[2.80000 + (50-1).5000]}{2} = 10.125.000$ đồng.

Bài tập 6: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm.

Dãy số u_n lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1).18$.

Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý.

Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n - 1)1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3 - 1) \cdot 1,8 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là: $S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414$ (triệu đồng).

Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12 - 1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10 - 1) \cdot 1,8 = 282$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là: $S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010$ (triệu đồng).

Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40 - 1) \cdot 1,8 = 94,2$ (triệu đồng).

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là: $S_{12} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364$ (triệu đồng).

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

Bài tập 7: Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng). Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.



Lời giải

Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$.

Chiều dài quãng đường rơi tự do là: $S_{10} = \frac{10 \cdot [2 \cdot 16 + (10 - 1) \cdot 32]}{2} = 1600$.

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho dãy số vô hạn $\{u_n\}$ là cấp số cộng có công sai d , số hạng đầu u_1 . Hãy chọn khẳng định sai?

A. $u_5 = \frac{u_1 + u_9}{2}$.

B. $u_n = u_{n-1} + d, n \geq 2$.

C. $S_{12} = \frac{n}{2}(2u_1 + 11d)$.

D. $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có công thức tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng là: $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$

Suy ra $S_{12} = 12u_1 + \frac{12 \cdot 11 \cdot d}{2} = 6(2u_1 + 11d) \neq \frac{n}{2}(2u_1 + 11d)$.

Câu 2: Cho (u_n) là cấp số cộng biết $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng đó bằng

A. 800.

B. 600.

C. 570.

D. 630

Lời giải

$$S_{15} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{15} = (u_1 + u_{15}) + (u_2 + u_{14}) + (u_3 + u_{13}) + \dots + (u_7 + u_9) + u_8$$

Vì $u_1 + u_{15} = u_2 + u_{14} = u_3 + u_{13} = \dots = u_7 + u_9 = 2u_8$ và $u_3 + u_{13} = 80 \Rightarrow S = 7 \cdot 80 + 40 = 600$.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -6$ và công sai $d = 4$. Tính tổng S của 14 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S = 46$.

B. $S = 308$.

C. $S = 644$.

D. $S = 280$.

Lời giải

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}$.

Vậy $S = \frac{[2(-6) + (14-1)4]14}{2} = 280$.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 8, u_5 = 17$. Công sai d bằng:

A. $d = -3$.

B. $d = -5$.

C. $d = 3$.

D. $d = 5$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $u_2 = 8, u_5 = 17 \Rightarrow \begin{cases} u_1 + d = 8 \\ u_1 + 4d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ u_1 = 5 \end{cases}$.

Câu 5: Cho dãy (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu 2 và số hạng thứ 36 là 72. Công sai của cấp số cộng (u_n) là

A. $d = 3$

B. $d = -2$.

C. $d = 2$.

D. $d = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $u_{36} = u_1 + 35d$ mà $u_{36} = 72, u_1 = 2$ nên ta có: $72 = 2 + 35d \Leftrightarrow d = 2$.

- Câu 6:** Cho cấp số cộng (u_n) và gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó. Biết $u_{21} = -19$ và $S_{22} = 0$.
 Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó.
- A. $u_n = 21 + 2n$. B. $u_n = 21 - 2n$. C. $u_n = 23 - 2n$. D. $u_n = 23 + 2n$.

Lời giải

Giả sử cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai d .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_{21} = -19 \\ S_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{21} = u_1 + 20d \\ S_{22} = 22u_1 + \frac{22 \cdot 21d}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 20d = -19 \\ 2u_1 + 21d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } u_n = u_1 + (n-1)d = 21 - 2(n-1) = 23 - 2n.$$

- Câu 7:** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5; u_8 = 30$. Công sai của cấp số cộng bằng:
- A. 4. B. 5. C. 6. D. 3

Lời giải

$$\text{Gọi công sai của cấp số cộng là } d \text{ khi đó ta có } u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow 30 = -5 + 7d \Leftrightarrow d = 5.$$

- Câu 8:** Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 10, u_2 = 13$. Giá trị của u_4 là
- A. $u_4 = 20$. B. $u_4 = 19$. C. $u_4 = 16$. D. $u_4 = 18$.

Lời giải

$$u_1 = 10, u_2 = 13 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow u_4 = u_1 + 3d = 10 + 3 \cdot 3 = 19.$$

- Câu 9:** Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_2 = -1, u_4 = 7$. Tìm u_3 .
- A. 4. B. 10. C. 8. D. 3.

Lời giải

$$\text{Áp dụng tính chất của các số hạng trong dãy cấp số cộng, ta có: } u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3.$$

- Câu 10:** Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = 2$ và $u_4 = 8$. Giá trị của u_5 bằng
- A. 12. B. 10. C. 9. D. 11.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết } u_1 = 2 \text{ và } u_4 = u_1 + 3d = 8 \Rightarrow d = 2$$

$$\text{Vậy } u_5 = u_1 + 4d = 2 + 4 \cdot 2 = 10.$$

- Câu 11:** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15; u_{20} = 60$. Tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là
- A. $S_{20} = 250$. B. $S_{20} = 200$. C. $S_{20} = -200$. D. $S_{20} = -25$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -35 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{(u_1 + u_{20}) \cdot 20}{2} = 250.$$

- Câu 12:** Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_3 = 6, u_8 = 16$. Tính công sai d và tổng của 10 số hạng đầu tiên.
- A. $d = 2; S_{10} = 100$. B. $d = 1; S_{10} = 80$. C. $d = 2; S_{10} = 120$. D. $d = 2; S_{10} = 110$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_3 = 6 \\ u_8 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 6 \\ u_1 + 7d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases}.$

$$S_{10} = 10.u_1 + \frac{10(10-1)}{2}.d = 10.2 + \frac{10(10-1)}{2}.2 = 110.$$

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_n = 3 - 2n$ thì S_{60} bằng

- A.** -6960. **B.** -117. **C.** -3840. **D.** -116.

Lời giải

Ta có $u_{n+1} = 1 - 2n$, Ta có $u_{n+1} - u_n = -2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -2$. Vậy $S_{60} = \frac{60}{2}(2u_1 + 59d) = -3840$.

Câu 14: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{2013} + u_6 = 1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

- A.** 1009000. **B.** 100800. **C.** 1008000. **D.** 100900.

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Khi đó:

$$u_{2013} + u_6 = 1000 \Leftrightarrow u_1 + 2012d + u_1 + 5d = 1000 \Leftrightarrow 2u_1 + 2017d = 1000.$$

Ta có: $S_{2018} = 2018u_1 + \frac{2017.2018}{2}d = 1009.(2u_1 + 2017d) = 1009000$.

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases}$. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng trên.

- A.** 100. **B.** 110. **C.** 10. **D.** 90.

Lời giải

Gọi cấp số cộng có công sai là d ta có $u_2 = u_1 + d$; $u_3 = u_1 + 2d$; $u_4 = u_1 + 3d$

Khi đó $\begin{cases} u_1 + u_4 = 8 \\ u_3 - u_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 8 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$

Áp dụng công thức $S = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

Vậy tổng của 10 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_{10} = 10.1 + \frac{10.9}{2}.2 = 100$

Câu 16: Cho cấp số cộng $\{u_n\}$ có $u_4 = -12$; $u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là:

- A.** $S = 24$. **B.** $S = -25$. **C.** $S = -24$. **D.** $S = 26$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_4 = -12 \\ u_{14} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases}.$

Tổng của 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là: $S_{16} = 16.(-21) + \frac{16.15}{2}.3 = 24$.

Câu 17: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính $S = u_1 + u_4 + u_7 + \dots + u_{2011}$

A. $S = 2023736$. **B.** $S = 2023563$. **C.** $S = 6730444$. **D.** $S = 6734134$.

Lời giải

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$u_4 = 10, u_7 = 19, u_{10} = 28 \dots$$

$$\text{Ta có } u_1, u_4, u_7, u_{10}, \dots, u_{2011} \text{ là cấp số cộng có } \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 9 \\ n = 671 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } S = \frac{671}{2}(2.1 + 670.9) = 2023736.$$

Câu 18: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .

A. $u_n = 1 + 4n$. **B.** $u_n = 5n$. **C.** $u_n = 3 + 2n$. **D.** $u_n = 2 + 3n$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{50} = \frac{50}{2}(2u_1 + 49d) = 5150 \Rightarrow d = 4.$$

$$\text{Số hạng tổng quát của cấp số cộng bằng } u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + 4n.$$

Câu 19: Một cấp số cộng có tổng của n số hạng đầu S_n tính theo công thức $S_n = 5n^2 + 3n, (n \in \mathbb{N}^*)$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó.

A. $u_1 = -8; d = 10$. **B.** $u_1 = -8; d = -10$. **C.** $u_1 = 8; d = 10$. **D.** $u_1 = 8; d = -10$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_1 = S_1 = 8; u_2 = S_2 - S_1 = 18 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 18 - 8 = 10.$$

Câu 20: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Giá trị u_1 và d là

A. $u_1 = 2, d = 3$. **B.** $u_1 = 3, d = 2$. **C.** $u_1 = 2, d = 2$. **D.** $u_1 = 2, d = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_5 = 18 \Leftrightarrow u_1 + 4d = 18.$$

$$\text{Lại có } 4S_5 = S_{10} \Leftrightarrow 4\left(5u_1 + \frac{5.4}{2}d\right) = 10u_1 + \frac{10.9}{2}d \Leftrightarrow 2u_1 - d = 0.$$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} u_1 + 4d = 18 \\ 2u_1 - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 4 \end{cases}.$

Câu 21: Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên trong cấp số cộng (a_n) . Biết $S_6 = S_9$, tỉ số $\frac{a_3}{a_5}$ bằng:

- A. $\frac{9}{5}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có $S_6 = S_9 \Leftrightarrow \frac{6(2a_1 + 5d)}{2} = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} \Leftrightarrow a_1 = -7d.$

Suy ra $\frac{a_3}{a_5} = \frac{a_1 + 2d}{a_1 + 4d} = \frac{-7d + 2d}{-7d + 4d} = \frac{5}{3}.$

Câu 22: Cho cấp số cộng (u_n) và gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó. Biết $S_7 = 77$ và $S_{12} = 192$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó

- A. $u_n = 5 + 4n$. B. $u_n = 3 + 2n$. C. $u_n = 2 + 3n$. D. $u_n = 4 + 5n$.

Lời giải

Giả sử cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai d .

Ta có: $\begin{cases} S_7 = 77 \\ S_{12} = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u_1 + \frac{7 \cdot 6 \cdot d}{2} = 77 \\ 12u_1 + \frac{12 \cdot 11 \cdot d}{2} = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u_1 + 21d = 77 \\ 12u_1 + 66d = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 2 \end{cases}.$

Khi đó: $u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 2(n-1) = 3 + 2n.$

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu bằng 1 và tổng 100 số hạng đầu bằng 14950. Giá trị của tổng $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}}$ bằng.

- A. $\frac{49}{74}$. B. 148. C. $\frac{49}{148}$. D. 74.

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Ta có $S_{100} = 50(2u_1 + 99d) = 14950$ với $u_1 = 1 \Rightarrow d = 3$

Đặt $S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}}.$

Ta có $S \cdot d = \frac{d}{u_1 u_2} + \frac{d}{u_2 u_3} + \dots + \frac{d}{u_{49} u_{50}} = \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2 u_3} + \dots + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49} u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}}$
 $= 1 - \frac{1}{1 + 49 \cdot 3} = \frac{147}{148}.$

Với $d = 3$ nên $S = \frac{49}{148}.$

Câu 24: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 10000. Tính tổng

$S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{99} u_{100}}.$

A. $S = \frac{100}{201}$.

B. $S = \frac{200}{201}$.

C. $S = \frac{198}{199}$.

D. $S = \frac{99}{199}$.

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho.

Ta có: $S_{100} = 50(2u_1 + 99d) = 10000 \Rightarrow d = \frac{200 - 2u_1}{99} = 2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2S &= \frac{2}{u_1 u_2} + \frac{2}{u_2 u_3} + \dots + \frac{2}{u_{99} u_{100}} = \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2 u_3} + \dots + \frac{u_{99} - u_{100}}{u_{99} u_{100}} \\ &= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{98}} - \frac{1}{u_{99}} + \frac{1}{u_{99}} - \frac{1}{u_{100}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{100}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 + 99d} = \frac{198}{199} \Rightarrow S = \frac{99}{199}. \end{aligned}$$

Câu 25: Cho tam giác đều $A_1 B_1 C_1$ có độ dài cạnh bằng 4. Trung điểm của các cạnh tam giác $A_1 B_1 C_1$ tạo thành tam giác $A_2 B_2 C_2$, trung điểm của các cạnh tam giác $A_2 B_2 C_2$ tạo thành tam giác $A_3 B_3 C_3 \dots$. Gọi $P_1, P_2, P_3, \dots$ lần lượt là chu vi của tam giác $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3, \dots$. Tính tổng chu vi $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$

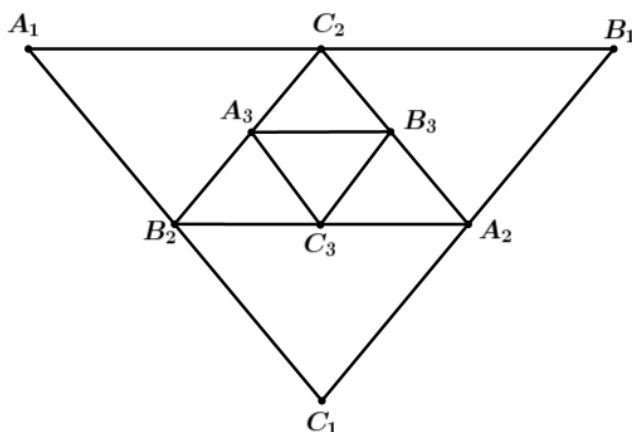
A. $P = 8$.

B. $P = 24$.

C. $P = 6$.

D. $P = 18$.

Lời giải



Ta có: $P_2 = \frac{1}{2}P_1; P_3 = \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{4}P_1; P_4 = \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{8}P_1 \dots; P_n = \frac{1}{2^{n-1}}P_1$

Vậy $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = P_1 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{8}P_1 + \dots = \frac{P_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2P_1 = 24$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng số hạng đầu và số hạng thứ tư bằng 36, tổng của số hạng thứ hai và số hạng cuối bằng 44. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Dãy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 11$.

- b) Dãy cấp số cộng có tổng $u_1 + u_5 = 40$.
 c) Dãy cấp số cộng có $u_2 = 16$.
 d) Tổng của 3 số hạng đầu tiên trong dãy cấp số cộng bằng 45.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_4 = 36 \\ u_2 + u_5 = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 3d) = 36 \\ (u_1 + d) + (u_1 + 4d) = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 36 \\ 2u_1 + 5d = 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ d = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} u_2 = u_1 + d = 16 \\ u_1 + u_5 = u_1 + u_1 + 4d = 40. \\ S_3 = \frac{3(u_1 + u_3)}{2} = 48 \end{cases}$$

- a) Sai: Dãy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 12$
 b) Đúng: Dãy cấp số cộng có tổng $u_1 + u_5 = 40$.
 c) Đúng: Dãy cấp số cộng có $u_2 = 16$.
 d) Sai: Tổng của 3 số hạng đầu tiên trong dãy cấp số cộng bằng 48
 Vậy mệnh đề 2,3 là mệnh đề đúng và mệnh đề 1,4 là mệnh đề sai.

Câu 2: Cho dãy cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$. Biết tổng 20 số hạng đầu tiên bằng 460. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Dãy số (u_n) có $d = 2$.
 b) Dãy số (u_n) có $u_4 = 8$.
 c) Dãy số (u_n) có $S_{10} = 120$.
 d) Dãy số (u_n) có hiệu $S_8 - S_4 = 60$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = 10(4 + 4 + 19d) = 460 \Leftrightarrow d = 2.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} u_4 = u_1 + 3d = 4 + 3 \cdot 2 = 10 \\ S_{10} = \frac{10(u_1 + u_9)}{2} = 5(4 + 4 + 8 \cdot 2) = 120 \\ S_8 - S_4 = \frac{8(u_1 + u_8)}{2} - \frac{4(u_1 + u_4)}{2} = 4(2u_1 + 7d) - 2(2u_1 + 3d) = 4u_1 + 22d = 60 \end{cases}.$$

- a) Đúng: Dãy số (u_n) có $d = 2$.
 b) Sai: Dãy số (u_n) có $u_4 = 10$.
 c) Đúng: Dãy số (u_n) có $S_{10} = 120$.
 d) Đúng: Dãy số (u_n) có hiệu $S_8 - S_4 = 60$.

Vậy mệnh đề 1,3,4 là mệnh đề đúng và mệnh đề 2 là mệnh đề sai.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$, $u_3 - u_{15} = 84$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạng thứ 17 của cấp số cộng là $u_{17} = 11$.
- b) Công sai của cấp số cộng là $d = -7$.
- c) Số hạng thứ 2 của cấp số cộng là $u_2 = 130$
- d) Tổng 17 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{17} = 1130$

Lời giải

Giả sử cấp số cộng (u_n) có công sai d .

Theo giả thiết ta có: $u_3 - u_{15} = 84 \Leftrightarrow u_1 + 2d - u_1 - 14d = 84 \Leftrightarrow -12d = 84 \Leftrightarrow d = -7$.

Vậy $u_{17} = u_1 + 16d = 123 + 16(-7) = 11$; $u_2 = u_1 + d = 123 + (-7) = 116$.

$$S_{17} = \frac{(u_1 + u_{17})17}{2} = \frac{(123 + 11)17}{2} = 1139.$$

- a) Đúng: Số hạng thứ 17 của cấp số cộng là $u_{17} = 11$.
- b) Đúng: Công sai của cấp số cộng là $d = -7$.
- c) Sai: Số hạng thứ 2 của cấp số cộng là $u_2 = 116$
- d) Sai: Tổng 17 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là $S_{17} = 1139$

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$, công sai $d = 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số 100 là số hạng thứ 36 của cấp số cộng.
- b) Số hạng thứ 3 của cấp số cộng bằng 5.
- c) Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 250.
- d) Kể từ số hạng thứ 3 thì các số hạng của cấp số cộng đều nhận giá trị dương.

Lời giải

Ta có: $100 = u_1 + (n-1)d = -5 + (n-1).3 \Leftrightarrow n = 36$.

$$u_3 = u_1 + 2d = -5 + 2.3 = 1.$$

$$S_{10} = \frac{(u_1 + u_{10})10}{2} = \frac{(u_1 + u_1 + 9d).10}{2} = 5(-10 + 9.3) = 85.$$

$$u_n = u_1 + (n-1)d = -5 + (n-1).3 = 3n - 8 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{8}{3}.$$

- a) Đúng: Số 100 là số hạng thứ 36 của cấp số cộng.
 - b) Sai: Số hạng thứ 3 của cấp số cộng bằng 1.
 - c) Sai: Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 85.
 - d) Đúng: Kể từ số hạng thứ 3 thì các số hạng của cấp số cộng đều nhận giá trị dương.
- Vậy mệnh đề 1 và 4 đúng, mệnh đề 2 và 3 sai.

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Công sai của cấp số cộng là $d = 3$
- b) Số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 21$
- c) Số hạng thứ 9 của cấp số cộng là $u_9 = 3$

d) Tổng 5 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_5 = -60$

Lời giải

Gọi u_1 là số hạng đầu, d là công sai của cấp số cộng (u_n) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{14} = u_1 + 13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ u_1 = -21 \end{cases}.$$

Số hạng thứ 9 là $u_9 = u_1 + 8d = -21 + 8.3 = 3$.

$$\text{Tổng 5 số hạng đầu là } S_5 = 5u_1 + \frac{5(5-1)}{2}d = -75.$$

- a) Đúng: Công sai của cấp số cộng là $d = 3$
- b) Sai: Số hạng đầu của cấp số cộng là $u_1 = 21$
- c) Đúng: Số hạng thứ 9 của cấp số cộng là $u_9 = 3$
- d) Sai: Tổng 5 số hạng đầu của cấp số cộng là $S_5 = -60$

Câu 6: Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Gọi u_n (ghế) là tổng số ghế ở hàng thứ n . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $u_2 = 18$
- b) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 2$.
- c) Số ghế ở hàng thứ 20 nhỏ hơn 54.
- d) Tổng số ghế trong nhà hát nhiều hơn 1000.

Lời giải

a) Đúng: Số ghế trong các dãy ghế liên tiếp lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$.

b) Đúng: $u_2 = u_1 + d = 16 + 2 = 18$.

c) Ta có $u_{20} = u_1 + 19d = 16 + 19.2 = 54$.

Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$\text{d) Sai: } S_{25} = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \frac{25}{2} [2u_1 + (25-1)d] = \frac{25}{2} (2.16 + 24.2) = 1000.$$

Câu 7: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Trong phương án 1: dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $u_1 = 120$, công sai $d_1 = 18$.
- b) Trong phương án 1: tiền lương người lao động nhận được trong năm thứ ba là 174 triệu.
- c) Trong phương án 1: tổng tiền lương người lao động nhận được trong ba năm là 414 triệu.

d) Nếu kí hợp đồng lao động trong ba năm, với mong muốn nhận được tổng số tiền lương cao nhất thì người lao động nên chọn phương án 1.

Lời giải

a) Đúng: Trong phương án 1: dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $u_1 = 120$, công sai $d_1 = 18$

b) Sai: Trong phương án 1: $u_3 = 120 + 2.18 = 156$ triệu.

c) Đúng: Trong phương án 1: tổng tiền lương người lao động nhận được trong ba năm là

$$S_3 = \frac{(u_1 + u_3).3}{2} = \frac{(120 + 156).3}{2} = 414 \text{ triệu.}$$

d) Đúng: Trong phương án 2: Dãy số tiền lương là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $v_1 = 24$, công sai $d_2 = 1,8$, lương tăng theo quý. Ba năm tương ứng với 12 quý.

Ta có $v_{12} = 24 + 11.1,8 = 43,8$ triệu.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{(v_1 + v_{12}).12}{2} = (24 + 43,8).6 = 406,8 \text{ triệu.}$$

Ta nhận thấy $406,8 < 414$.

Vậy nếu kí hợp đồng lao động trong ba năm, với mong muốn nhận được tổng số tiền lương cao nhất thì người lao động nên chọn phương án 1.

Câu 8: Trong hội chợ tết, một công ty sữa muốn xếp 1000 hộp sữa theo thứ tự từ trên xuống dưới như sau: Hàng thứ nhất có 1 hộp sữa, hàng thứ hai có 3 hộp sữa, hàng thứ ba có 5 hộp sữa, ... cứ như thế, số lượng hộp sữa của hàng sau lớn hơn số lượng hộp sữa của hàng trước nó là 2 hộp sữa (mô hình như hình dưới).



a) Gọi u_n là số hộp sữa ở hàng thứ n thì (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

b) Số hộp sữa của hàng thứ 10 là 20 hộp sữa

c) Để xếp được 20 hàng thì cần 400 hộp sữa

d) Hàng cuối cùng có 900 hộp sữa

Lời giải

a) Đúng: Gọi u_n là số hộp sữa ở hàng thứ n thì (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

b) Sai: Số hộp sữa của hàng thứ 10 là $u_{10} = u_1 + 9d = 1 + 9.2 = 19$ hộp sữa.

c) Đúng: Để xếp được 20 hàng thì số hộp sữa cần có là

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2u_1 + 19.d) = \frac{20}{2}(2.1 + 19.2) = 400 \text{ hộp sữa}$$

d) Sai: Ta có $S_n = \frac{n}{2}[2.1 + (n-1).2] = n^2$.

Giả sử với 1000 hộp sữa ta chỉ xếp được nhiều nhất n hàng thì n là số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình $S_n \leq 1000 \Leftrightarrow n^2 \leq 1000 \Leftrightarrow -10\sqrt{10} \leq n \leq 10\sqrt{10}$. Suy ra $n = 31$. Vậy,

hàng cuối cùng có $u_{31} = \frac{31}{2}(2u_1 + 30.d) = \frac{31}{2}(2.1 + 30.2) = 961$ hộp sữa.

Câu 9: Do nhu cầu đi lại của gia đình, anh Bình quyết định thực hiện tích góp tiền để mua một chiếc ô tô HONDA CRV trị giá 1,259 tỉ đồng.



Đợt thứ nhất: anh Bình đã tích góp theo nguyên tắc tháng sau tích góp nhiều hơn tháng ngay trước đó số tiền là 2 triệu đồng và cứ như thế đến tháng thứ 10 anh phải góp 21 triệu đồng. Đến hết đợt thứ nhất anh Bình có tất cả 624 triệu đồng.

Đợt thứ hai kế tiếp: do muốn rút ngắn thời gian mua xe thì số tiền còn lại anh tiếp tục tích góp với tháng đầu là 5 triệu đồng và mỗi tháng tiếp theo số tiền gấp đôi tháng kế trước nó. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đợt thứ nhất anh Bình tích lũy tiền theo dãy số với cấp số cộng có công sai là $d = 2$ triệu và $u_1 = 3$ triệu.

b) Anh Bình tích lũy tiền hết đợt thứ nhất trong 25 tháng.

c) Đợt thứ hai anh Bình tích lũy tiền theo dãy số với cấp số nhân có công bội là $q = 2$ triệu và $u_1 = 5$ triệu.

d) Để đủ tiền mua ô tô thì anh Bình thì anh Bình tích góp ít nhất 31 tháng

Lời giải

a) Đúng: Đợt thứ nhất anh Bình tích lũy theo cấp số cộng Với công sai $d = 2$ triệu
Theo đề bài ta có $21 = u_1 + 9.2 \Rightarrow u_1 = 3$ triệu.

b) Sai: Hết đợt thứ nhất anh Bình có tất cả 624 triệu đồng nên ta có

$$S_n = 624 \Rightarrow 624 = \frac{n[2u_1 + (n-1).3]}{2} \Rightarrow n = 24 \text{ tháng.}$$

c) Đúng: Theo đề Số tiền còn lại anh Bình tích góp theo cấp số nhân có công bội là $q = 2$ triệu và $u_1 = 5$ triệu.

d) Đúng: Số tiền cần tích lũy ở đợt hai là $1259 - 624 = 635$ triệu đồng

Từ đó ta có $635 = 5 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow n = 7$ tháng.

Tổng cộng hai đợt cần có ít nhất $24 + 7 = 31$ tháng.

Câu 10: Một sinh viên sau khi ra trường và xin vào làm cho một trung tâm với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Cứ sau mỗi năm, trung tâm trả thêm cho sinh viên 20 triệu đồng. Gọi u_n (triệu đồng) là số tiền lương mà sinh viên đó nhận được ở năm thứ n . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ hai là 120 triệu đồng.

b) Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ 10 là 300 triệu đồng.

c) Dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 120$ và công sai $d = 20$

d) Giả sử, mỗi năm bạn sinh viên chi tiêu tiết kiệm hết 70 triệu đồng. Vậy sau ít nhất 12 năm thì sinh viên đó mua được căn chung cư 2 tỉ đồng.

Lời giải

Ta thấy, số tiền lương năm sau hơn năm trước 20 triệu đồng nên (u_n) là cấp số cộng có

$u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Do đó: $u_n = u_1 + (n-1)d = 100 + (n-1) \cdot 20 = 20n + 80$

a) Đúng: Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ hai là $u_2 = 120$ (triệu đồng).

b) Sai: Số tiền lương sinh viên nhận được ở năm thứ 10 là $u_{10} = 20 \cdot 10 + 80 = 280$ (triệu đồng).

c) Sai: $u_1 = 100$.

d) Sai: Tổng số tiền bạn sinh viên tiết kiệm được sau n năm là:

$$S = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] - 70n = \frac{n}{2} [2 \cdot 100 + (n-1) \cdot 20] - 70n = 10n^2 + 20n \text{ (triệu đồng)}.$$

$$\text{Ta có: } S \geq 2000 \Leftrightarrow 10n^2 + 20n - 2000 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 13,1 \\ n \leq -15,1 \end{cases}.$$

Do đó sau ít nhất sau 14 năm thì sinh viên đó có thể mua được chung cư 2 tỉ đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_3 + u_{28} = 100 \Leftrightarrow (u_1 + 2d) + (u_1 + 27d) = 100 \Leftrightarrow 2u_1 + 29d = 100$$

$$\text{Mà } S_{30} = \frac{30}{2} (2u_1 + 29d) \text{ nên } S_{30} = 15 \cdot 100 = 1500.$$

Câu 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm tổng 20 số hạng đầu của dãy số (u_n) .

Lời giải

Vì dãy số (u_n) có $u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 2$, công sai $d = 3$.

Vậy tổng 20 số hạng đầu của dãy số (u_n) là: $S_{20} = \frac{20}{2}[2u_1 + 19d] = 10(2 \cdot 2 + 19 \cdot 3) = 610$.

Câu 3: Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d = 3$ và $u_1 = 25$.

Tổng số ghế là $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = 30u_1 + \frac{30 \cdot 29}{2}d = 2055$

Câu 4: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,...Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

Lời giải

Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1, d = 1$. Giả sử có n hàng cây thì $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3003 = S_n$.

Ta có $3003 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow n = 77$

Câu 5: Một chiếc đồng hồ báo thức, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?



Lời giải

Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giờ) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là: $S = S_{24} = \frac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(1 + 24) = 300$

Câu 6: Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liên sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, \dots, u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai, ..., dãy ghế thứ ba mươi. Khi đó, (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 15$, công sai $d = 4$ (trong đó $1 \leq n \leq 30$). Gọi S_{30} là tổng số ghế trong khán phòng.

$$\text{Ta có: } S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2} [2u_1 + (30-1)d] = 15(2 \cdot 15 + 29 \cdot 4) = 2190.$$

Câu 7: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5, ... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

Lời giải

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 7$, $d = 5$. Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 25450 = S_n$.

$$\text{Ta có } 25450 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 5 \Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 50900 = 0 \Leftrightarrow n = 100$$

Câu 8: Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.



Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Lời giải

Chiều dài các thanh ngang là dãy cấp số cộng có số hạng đầu là 45, công sai là -

$$u_n = 45 - 2(n-1) = 47 - 2n$$

Khi $u_n = 31 \Leftrightarrow n = 8$ nên cái thang có 8 bậc.

$$\text{Chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua là: } S_8 = \frac{8 \cdot (45 + 31)}{2} = 304.$$

Vậy chiều dài thanh gỗ là 304 cm.

Câu 9: Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,5 m. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Lời giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có: $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11 \cdot 1,5 = 966,5$

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao 966,5 m so với mực nước biển.

Câu 10: Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

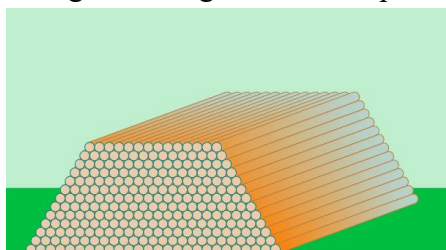
Lời giải

Lúc 1 giờ đêm, toà tháp đánh 1 tiếng chuông; lúc 2 giờ đêm, toà tháp đánh 2 tiếng chuông,.; lúc 12 giờ trưa, toà tháp đánh 12 tiếng chuông. Ngoài ra, mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông (có 11 lần như thế từ 1 giờ đến 12 giờ).

Vậy tổng số tiếng chuông là:

$$S = (1 + 2 + 3 + \dots + 12) + 1 \cdot 11 = \frac{(1+12) \cdot 12}{2} + 11 = 89 \quad (\text{tiếng chuông})$$

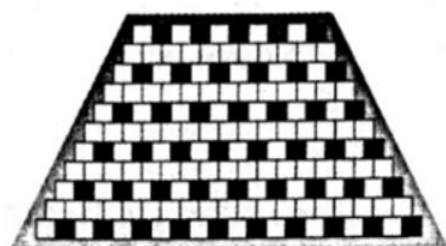
Câu 11: Các khúc gỗ được xếp như hình dưới đây. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Lời giải

$$\text{Tổng số khúc gỗ được xếp là: } 15 + 16 + \dots + 21 = \frac{(21+15) \cdot 7}{2} = 126.$$

Câu 12: Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng 2,4 m ở đáy và rộng 1,2 m ở đỉnh (hình vẽ bên). Các viên gạch hình vuông có kích thước 10 cm × 10 cm phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?



Lời giải

Đổi $2,4 \text{ m} = 240 \text{ cm}$; $1,2 \text{ m} = 120 \text{ cm}$.

Số viên gạch ở hàng đầu tiên (ứng với đáy lớn) là $u_1 = 240 : 10 = 24$.

Số viên gạch ở hàng trên cùng (ứng với đáy nhỏ) là: $u_n = 120 : 10 = 12$.

Vì mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó nên ta thu được cấp số cộng có công sai $d = -1$.

Như vậy $u_n = 12 = u_1 + (n-1)(-1) \Rightarrow n = 13$.

Vậy số viên gạch hình vuông cần thiết để ốp hết bức tường đó là

$$S_{13} = \frac{(u_1 + u_{13})13}{2} = 234 \text{ (viên gạch)}$$

Câu 13: Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá của mét khoan đầu tiên là 100 nghìn đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30 nghìn đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người cần khoan một giếng sâu 20 m để lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n , trong đó $1 \leq n \leq 20$.

Khi đó, (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$ và công sai $d = 30$.

Số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là:

$$S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2.100 + 19.30)}{2} = 7700 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Câu 14: Một ngôi nhà hình kim tự tháp (có gạch nâu ốp bên ngoài) được bao quanh bởi rất nhiều cây cối và là nơi tuyệt vời để nghỉ mát mùa hè. Ngôi nhà có chiều dài và chiều rộng đều là $6,8 \text{ m}$, chiều cao là $2,72 \text{ m}$. Khi xây dựng ngôi nhà, người chủ đã tính toán số viên gạch nâu hình hộp chữ nhật cần ốp tường; biết hàng trên ít hơn hàng dưới 1 viên, hàng trên cùng là 1 viên, kích thước viên gạch nâu hình hộp chữ nhật là $0,2 \text{ m} - 0,08 \text{ m} - 1 \text{ m}$. Hãy dự tính số viên gạch nâu ốp tường cả bốn mặt của ngôi nhà.



Lời giải

Một bức tường có $2,72 : 0,08 = 34$ hàng gạch.

Số gạch ở mỗi hàng tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Số viên gạch trên một bức tường là $S_{34} = 34.1 + \frac{34.33}{2} \cdot 1 = 595$ viên gạch.

Vì 4 mặt đều bằng nhau nên có $4.595 = 2380$ viên gạch người chủ dự tính đặt mua.

-----**HẾT**-----