

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Dây số hữu hạn

- Mỗi hàm số $u : \{1; 2; 3; \dots; m\} \rightarrow \mathbb{R} \ (m \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$.
- Số u_1 gọi là số hạng đầu và số u_m gọi là số hạng cuối của dãy số.

2 Dây số vô hạn

- Mỗi hàm số $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).
- Dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$
- Dãy số đó còn được viết tắt là (u_n) .
- Số u_1 gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), số u_2 gọi là số hạng thứ hai, ..., số u_n gọi là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

3 Cách cho một dãy số

- Ta có thể cho dãy số bằng một trong những cách sau:
 - Liệt kê các số hạng của dãy số (với những dãy số hữu hạn và có ít số hạng).
 - Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.
 - Cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số.
 - Cho bằng phương pháp truy hồi.

4 Dây số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

5 Dây số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tức là tồn tại các số m và M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Phương pháp: Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng)
- Công thức của số hạng tổng quát
- Phương pháp mô tả
- Phương pháp truy hồi

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

a) $u_n = 3n - 2$

b) $u_n = 3 \cdot 2^n$

c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Lời giải

a) $u_1 = 1; u_2 = 4; u_3 = 7; u_4 = 10; u_5 = 13; u_{100} = 298$

b) $u_1 = 6; u_2 = 12; u_3 = 24; u_4 = 48; u_5 = 96; u_{100} = 3,803.10^{30}$

c) $u_1 = 2; u_2 = \frac{9}{4}; u_3 = \frac{64}{27}; u_4 = \frac{625}{256}; u_5 = 2,48832; u_{100} = 2,7148$

Bài tập 2: Viết năm số hạng đầu tiên của mỗi dãy số (u_n) sau:

a) $u_n = (-1)^{n+1}n^2$

b) $u_1 = 1; u_2 = 2; u_n = u_{n-1} \cdot u_{n-2} (n \geq 3)$.

Lời giải

a) Thay lần lượt $n = 1, 2, 3, 4, 5$ vào công thức của u_n ta có:

$$u_1 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1; u_2 = (-1)^3 \cdot 2^2 = -4; u_3 = (-1)^4 \cdot 3^2 = 9; u_4 = (-1)^5 \cdot 4^2 = -16; u_5 = (-1)^6 \cdot 5^2 = 25$$

b) Thay lần lượt $n = 3, 4, 5$ vào công thức của u_n ta có:

$$u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = u_1 \cdot u_2 = 2; u_4 = u_2 \cdot u_3 = 4; u_5 = u_3 \cdot u_4 = 8.$$

Bài tập 3: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đó.

Lời giải

Năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là:

$$u_1 = \frac{1^2 + 3 \cdot 1 + 7}{1 + 1} = \frac{11}{2}; u_2 = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 + 7}{2 + 1} = \frac{17}{3}; u_3 = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 7}{3 + 1} = \frac{25}{4};$$
$$u_4 = \frac{4^2 + 3 \cdot 4 + 7}{4 + 1} = 7; u_5 = \frac{5^2 + 3 \cdot 5 + 7}{5 + 1} = \frac{47}{6}.$$

Bài tập 4: Thực hiện các yêu cầu của bài toán trong các trường hợp dưới đây:

a) Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$ hãy tìm số hạng u_{10} .

b) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ hãy tìm số hạng u_{50} .

- c) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n + 5 \end{cases}$ hãy tìm số hạng u_8 .
- d) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(u_n + 1) \end{cases}$ hãy tìm số hạng u_{11} .

Lời giải

$$\text{a) } u_2 = \frac{u_1+2}{u_1+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}; \quad u_3 = \frac{u_2+2}{u_2+1} = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}; \quad u_4 = \frac{u_3+2}{u_3+1} = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}; \quad u_5 = \frac{u_4+2}{u_4+1} = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29};$$

$$u_6 = \frac{u_5+2}{u_5+1} = \frac{\frac{41}{29}+2}{\frac{41}{29}+1} = \frac{99}{70}; \quad u_7 = \frac{u_6+2}{u_6+1} = \frac{\frac{99}{70}+2}{\frac{99}{70}+1} = \frac{239}{169}$$

$$u_8 = \frac{u_7+2}{u_7+1} = \frac{\frac{239}{169}+2}{\frac{239}{169}+1} = \frac{577}{408}; \quad u_9 = \frac{u_8+2}{u_8+1} = \frac{\frac{577}{408}+2}{\frac{577}{408}+1} = \frac{1393}{985}; \quad u_{10} = \frac{u_9+2}{u_9+1} = \frac{\frac{1393}{985}+2}{\frac{1393}{985}+1} = \frac{3363}{2378}$$

b) Từ giả thiết ta có: $u_1 = 1; u_2 = u_1 + 2; u_3 = u_2 + 2 \dots u_{50} = u_{49} + 2$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được: $u_{50} = 1 + 2.49 = 99$.

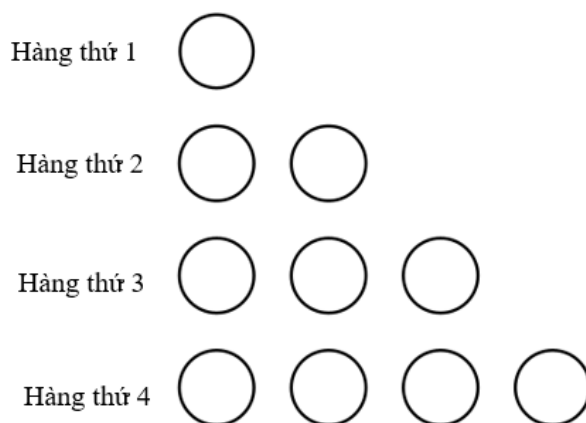
c) Ta có: $u_3 = 2u_2 + 3u_1 + 5 = 12$ $u_4 = 2u_3 + 3u_2 + 5 = 35$ $u_5 = 2u_4 + 3u_3 + 5 = 111$
 $u_6 = 2u_5 + 3u_4 + 5 = 332$ $u_7 = 2u_6 + 3u_5 + 5 = 1002$ $u_8 = 2u_7 + 3u_6 + 5 = 3005$.

d) $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + 1) = \frac{1}{2}$ $u_3 = \frac{2}{3}(u_2 + 1) = 1$ $u_4 = \frac{3}{4}(u_3 + 1) = \frac{3}{2}$ $u_5 = \frac{4}{5}(u_4 + 1) = 2$

$u_6 = \frac{5}{6}(u_5 + 1) = \frac{5}{2}$ $u_7 = \frac{6}{7}(u_6 + 1) = 3$ $u_8 = \frac{7}{8}(u_7 + 1) = \frac{7}{2}$ $u_9 = \frac{8}{9}(u_8 + 1) = 4$

$u_{10} = \frac{9}{10}(u_9 + 1) = \frac{9}{2}$ $u_{11} = \frac{10}{11}(u_{10} + 1) = 5$

Bài tập 5: Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ n trong hình dưới đây. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .



Lời giải

Số chấm ở hàng thứ nhất là: $u_1 = 1$

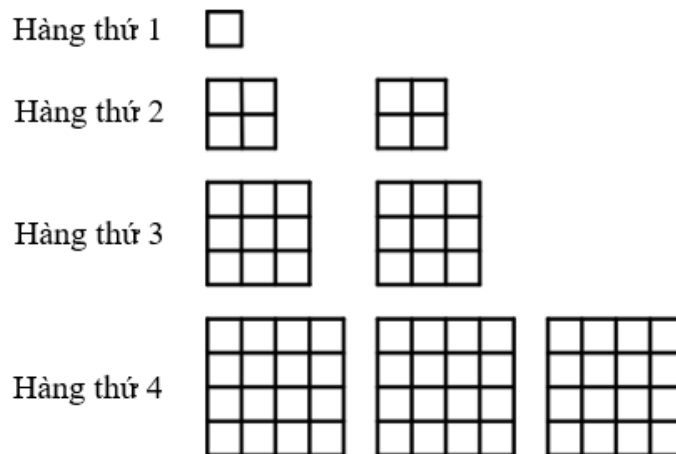
Số chấm ở hàng thứ hai là: $u_2 = 2$

Số chấm ở hàng thứ ba là: $u_3 = 3$

Số chấm ở hàng thứ tư là: $u_4 = 4$

Vậy số chấm ở hàng thứ n là: $u_n = n$

Bài tập 6: Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4 .

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

a) $u_1 = 1; u_2 = 8; u_3 = 27; u_4 = 64$.

b) Ta có: $u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; u_4 = 4^3$.

Do đó, dự đoán $u_n = n^3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases} (n \geq 1)$. Xác định công thức của số hạng tổng quát.

A. $u_n = 2n - 1$.

B. $u_n = 3n - 2$.

C. $u_n = 4n - 3$.

D. $u_n = 8n - 7$.

Lời giải

Ta có:

$$u_1 = 1; u_2 = 3; u_3 = 5$$

Dự đoán $u_n = 2n - 1, n \in \mathbb{N}^*$. Ta dễ dàng chứng minh được công thức dự đoán bằng quy nạp

Câu 2: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$ Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$.

B. $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$.

C. $u_n = \frac{1}{3^n}$.

D. $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Lời giải

Từ các số hạng đầu tiên của dãy số ta dự đoán $u_n = \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}^*$

- Câu 3:** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?
- A.** $u_n = \frac{(n-1)n}{2}$. **B.** $u_n = 5 + \frac{(n-1)n}{2}$.
C. $u_n = 5 + \frac{(n+1)n}{2}$. **D.** $u_n = 5 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Lời giải

Theo công thức truy hồi ta có $u_{n+1} - u_n = n$. Khi đó

$$u_1 = 5; u_2 - u_1 = 1; u_3 - u_2 = 2 \dots u_n - u_{n-1} = n - 1$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được $u_n = 5 + (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) = 5 + \frac{(n-1)n}{2}$

- Câu 4:** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \frac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 \\ u_3 = u_2 - 2 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} - 2 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = \frac{1}{2} - 2 - 2 \dots - 2 = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

- Câu 5:** Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?
- A.** $u_n = -2n$. **B.** $u_n = (-2) + n$. **C.** $u_n = (-2)(n+1)$. **D.** $u_n = (-2) + 2(n-1)$.

Lời giải

Dãy số là dãy số cách đều có khoảng cách là 2 và số hạng đầu tiên là (-2) nên $u_n = (-2) + 2 \cdot (n-1)$.

- Câu 6:** Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là?
- A.** $u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$. **C.** $u_n = \frac{1}{3^n}$. **D.** $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Lời giải

Ta có 5 số hạng đầu là $\frac{1}{3^1}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$ nên $u_n = \frac{1}{3^n}$.

- Câu 7:** Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?
- A.** $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1 \Rightarrow u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 4; \dots$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = n$.

Thật vậy, ta chứng minh được $u_n = n$ (*) bằng phương pháp quy nạp như sau:

Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1$. Vậy (*) đúng với $n = 1$

Giả sử (*) đúng với mọi $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), ta có: $u_k = k$. Ta đi chứng minh (*) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là: $u_{k+1} = k + 1$

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có: $u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k + 1$. Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 - n$. B. u_n không xác định. C. $u_n = 1 - n$. D. $u_n = -n$ với mọi n .

Lời giải

Ta có: $u_2 = 0; u_3 = -1; u_4 = -2, \dots$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = 2 - n$.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.
C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^2 \\ u_3 = u_2 + 2^2 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + (n-1)^2 \end{cases}$.

Cộng hai vế ta được $u_n = 1 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. B. $u_n = 2 + n^2$. C. $u_n = 2 + (n+1)^2$. D. $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 1 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} + 2n - 3 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = 2 + 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) = 2 + (n-1)^2$

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = -\frac{n-1}{n}$. B. $u_n = \frac{n+1}{n}$. C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$. D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Lời giải

Ta có: $u_1 = -\frac{3}{2}; u_2 = -\frac{4}{3}; u_3 = -\frac{5}{4}; \dots$ Dễ dàng dự đoán được $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \frac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 \\ u_3 = u_2 - 2 \\ \dots \\ u_n = u_{n-1} - 2 \end{cases}$. Cộng hai vế ta được $u_n = \frac{1}{2} - 2 - 2 \dots - 2 = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. **C.** $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. **D.** $u_n = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = \frac{u_1}{2} \\ u_3 = \frac{u_2}{2} \\ \dots \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{2} \end{cases}$.

Nhân hai vế ta được $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n = (-1) \cdot \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_{n-1}}{\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}{n-1 \text{ lần}}} \Leftrightarrow u_n = (-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{8}{15} \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n+1} = \frac{8}{15} (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow 15n + 15 = 16n + 8 \Leftrightarrow n = 7$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 6. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow 24n + 60 = 35n - 28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n-1}{n^2+1}$. Số $\frac{2}{13}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. Thứ 3. **B.** Thứ tư. **C.** Thứ năm. **D.** Thứ 6.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{2}{13} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n^2+1} = \frac{2}{13} (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow 13n - 13 = 2n^2 + 2 \Leftrightarrow 2n^2 - 13n + 15 = 0 \Leftrightarrow$
 $\begin{cases} n = 5(n) \\ n = \frac{3}{2}(l) \end{cases}$

Câu 17: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = n^3 - 8n^2 - 5n + 7$. Số -33 là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 5.

B. 6.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = -33 \Leftrightarrow n^3 - 8n^2 - 5n + 7 = -33 (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow n^3 - 8n^2 - 5n + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8(n) \\ n = \pm\sqrt{5}(l) \end{cases}$$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2+3n+7}{n+1}$. Hỏi dãy số trên có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. Không có.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{n^2+3n+7}{n+1} = n + 2 + \frac{5}{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$. Để u_n nhận giá trị nguyên thì $\frac{5}{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ là số nguyên hay $n = 4$. Vậy dãy số (u_n) chỉ có một số hạng nhận giá trị nguyên.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .

A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$.B. $u_{n+1} = 2^n + 1$.C. $u_{n+1} = 2(n+1)$.D. $u_{n+1} = 2^n + 2$.**Lời giải**

$$\text{Ta có } u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$$

Câu 20: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = n^{n-1}$.B. $u_n = 2^n$.C. $u_n = 2^{n+1}$.D. $u_n = 2$.**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ \dots \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases} \text{ Nhân hai vế ta được } u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot u_1 \cdot u_2 \dots u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$$

Câu 21: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = -2^{n-1}$.B. $u_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$.C. $u_n = \frac{-1}{2^n}$.D. $u_n = 2^{n-2}$.**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = 2u_1 \\ u_3 = 2u_2 \\ \dots \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases} \text{ Nhân hai vế ta được } u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot u_1 \cdot u_2 \dots u_{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n-2}$$

Câu 22: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số.

A. $u_n = -\frac{3n-1}{n}$.B. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.C. $u_n = \frac{n+1}{n}$.D. $u_n = -\frac{n+1}{n}$.**Lời giải**

$$\text{Từ } u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_{n+1} \cdot u_n = -2u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \cdot u_n + u_n + u_{n+1} + 1 = u_{n+1} - u_n$$

$$\Leftrightarrow (u_{n+1} + 1)(u_n + 1) = u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_{n+1} + 1)(u_n + 1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1} = 1$$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$. Khi đó $v_n - v_{n+1} = 1 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -1$

$$\Leftrightarrow v_n = v_1 + (n - 1)(-1) \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{u_1 + 1} - n + 1 = -n \Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 1} = -n$$

$$\Leftrightarrow u_n + 1 = -\frac{1}{n} \Leftrightarrow u_n = -\frac{1}{n} - 1 = -\frac{n+1}{n}.$$

Câu 23: Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Công thức tổng quát u_n nào dưới đây là của dãy số đã cho?

A. $u_n = n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = 1 + n$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} = u_n + 1 \Rightarrow u_2 = 2; u_3 = 3; u_4 = 4; \dots$

Dự đoán được $u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh $u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*) bằng phương pháp quy nạp:

Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 1$. Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử (*) đúng với $n = k (k \in \mathbb{N}^*)$, tức là ta có: $u_k = k$.

Ta đi chứng minh (*) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là cần chứng minh: $u_{k+1} = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có: $u_{k+1} = u_k + (-1)^{2k} = k + 1$.

Vậy (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 24: Cho hai cấp số cộng $(u_n): 1; 6; 11; \dots$ và $(v_n): 4; 7; 10; \dots$. Mỗi cấp số có 2018 số. Hỏi có bao nhiêu số có mặt trong cả hai dãy số trên.

A. 403. **B.** 401. **C.** 402. **D.** 504.

Lời giải

Dãy (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 1 + 5(n - 1) = 5n - 4, (1 \leq n \leq 2018)$.

Dãy (v_m) có số hạng tổng quát là $v_m = 4 + 3(m - 1) = 3m + 1, (1 \leq m \leq 2018)$.

Một số có mặt trong cả hai dãy số trên nếu tồn tại $m, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} 1 \leq m, n \leq 2018 \\ u_m = v_n (*) \end{cases}$

Ta có (*) $\Leftrightarrow 5n - 4 = 3m + 1 \Leftrightarrow 5(n - 1) = 3m (**)$

Từ (**) suy ra $m : 5$, mặt khác $1 \leq m \leq 2018$ nên ta được tập các giá trị của m là $\{5; 10; \dots; 2015\}$

Xét với $m = 2015$ thì $n = \frac{3 \cdot 2015}{5} + 1 = 1210 < 2018$, thỏa điều kiện $1 \leq n \leq 2018$.

Do tập $\{5; 10; \dots; 2015\}$ có 403 số nên có tất cả 403 số có mặt trong cả hai dãy đã cho.

Câu 25: Cho dãy số (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 - n - 3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$. Tính tổng $S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$

A. 2022. **B.** 8385080. **C.** 2021. **D.** 8385087.

Lời giải

Ta có: $u_n = 2u_{n-1} + n^2 - n - 3 \Leftrightarrow u_n + n^2 + 3n + 1 = 2u_{n-1} + 2n^2 - 4n + 2 + 6n - 6 + 2$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow u_n + n^2 + 3n + 1 &= 2u_{n-1} + 2(n-1)^2 + 6(n-1) + 2 \\ \Leftrightarrow u_n + n^2 + 3n + 1 &= 2(u_{n-1} + (n-1)^2 + 3(n-1) + 1)\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ đặt } v_n = u_n + n^2 + 3n + 1 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = u_1 + 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 8 \\ v_{n-1} = u_{n-1} + (n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \end{cases}$$

Ta có dãy (v_n) : $\begin{cases} v_1 = 8 \\ v_n = 2v_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$ là một cấp số nhân với $v_1 = 8$, công bội là $q = 2$

$$\Rightarrow v_n = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+2}. \text{ Vậy } u_n = 2^{n+2} - n^2 - 3n - 1$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } S_n = u_1 + \dots + u_n &= 2^2(2 + 2^2 + \dots + 2^n) - 1 - 2^2 - \dots - n^2 - 3(1 + 2 + \dots + n) - n \\ &= 2^3(2^n - 1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n. \text{ Vậy } S_{20} = 8385087.\end{aligned}$$

Câu 26: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.

B. $u_{n+1} =$

$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

D. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \left(\frac{n+1-1}{n+1+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$$

Câu 27: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

A. $u_4 = \frac{5}{9}$.

B. $u_4 = 1$.

C. $u_4 = \frac{2}{3}$.

D. $u_4 = \frac{14}{27}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_2 = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1, u_3 = \frac{1}{3}(1 + 1) = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{9}$$

Câu 28: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \frac{5}{2}$.

B. $u_3 = \frac{15}{4}$.

C. $u_4 = \frac{31}{8}$.

D. $u_5 = \frac{63}{16}$.

Lời giải

$$\text{Vì } u_2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

Câu 29: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ khi đó u_5 bằng:

A. 317.

B. 157.

C. 77.

D. 112.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_2 = 2 \cdot 7 + 3 = 17, u_3 = 2 \cdot 17 + 3 = 37, u_4 = 2 \cdot 37 + 3 = 77, u_5 = 2 \cdot 77 + 3 = 157$$

- Câu 30:** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là
A. $-1; 2; 5$. **B.** $1; 4; 7$. **C.** $4; 7; 10$ **D.** $-1; 3; 7$.

Lời giải

Ta có $u_1 = -1, u_2 = -1 + 3 = 2, u_3 = 2 + 3 = 5$

- Câu 31:** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là
A. $-3; 6; 9$. **B.** $3; -2; -7$. **C.** $3; 8; 13$. **D.** $3; 5; 7$.

Lời giải

Ta có $u_1 = 3, u_2 = 3 + 5 = 8, u_3 = 8 + 5 = 13$

- Câu 32:** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 2u_{n-1} + n^2 \end{cases} (n \geq 2)$. Số hạng thứ tư của dãy số đó bằng
A. 0. **B.** 93. **C.** 9. **D.** 34.

Lời giải

Ta có $u_2 = 2 \cdot (-2) + 2^2 = 0, u_3 = 2 \cdot 0 + 3^2 = 9, u_4 = 2 \cdot 9 + 4^2 = 34$

- Câu 33:** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{1}{2^{-u_{n-1}}}, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Khi đó u_3 có giá trị bằng
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Theo công thức truy hồi ta có $u_2 = \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2^{-\frac{2}{3}}} = \frac{3}{4}$.

- Câu 34:** Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 3$. Tìm số hạng thứ 6 của dãy số.
A. 17. **B.** 5. **C.** 15. **D.** 7.

Lời giải

Ta có số hạng thứ 6 của dãy là $u_6 = 2 \cdot 6 + 3 = 15$.

- Câu 35:** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{n-1}{n^2+2n+3}$. Giá trị u_{21} là
A. $\frac{11}{243}$. **B.** $\frac{10}{243}$. **C.** $\frac{21}{443}$. **D.** $\frac{19}{443}$.

Lời giải

Ta có: $u_{21} = \frac{21-1}{21^2+2 \cdot 21+3} = \frac{10}{243}$.

- Câu 36:** Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$. Tính u_2 .
A. $u_2 = \frac{1}{5}$. **B.** $u_2 = \frac{2}{5}$. **C.** $u_2 = \frac{3}{5}$. **D.** $u_2 = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có $u_2 = \frac{2^2-1}{2^2+1} = \frac{3}{5}$.

- Câu 37:** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \end{cases} \forall n \geq 2$. Tìm số hạng u_4 .
A. $u_4 = -76$. **B.** $u_4 = -77$. **C.** $u_4 = -66$. **D.** $u_4 = -67$.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $u_2 = 3u_1 - 1 = 3 \cdot (-2) - 1 = -7$

$$u_3 = 3u_2 - 1 = 3 \cdot (-7) - 1 = -22; u_4 = 3u_3 - 1 = 3 \cdot (-22) - 1 = -67$$

Cách 2: $u_n = 3u_{n-1} - 1 = 3u_{n-1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow u_n - \frac{1}{2} = 3 \left(u_{n-1} - \frac{1}{2} \right)$

$$\text{Xét dãy số } (v_n) \text{ có } \begin{cases} v_1 = \frac{-5}{2} \\ v_n = u_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có $v_n = 3v_{n-1}$ là cấp số nhân có công bội bằng 3 $\Rightarrow v_n = \frac{-5}{2} \cdot 3^{n-1}$

$$\text{Vậy } u_n = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}.$$

Câu 38: Cho dãy số (u_n) , biết $(u_n) = \frac{n(n-3)}{2}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số là

A. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

B. $-1; -\frac{1}{2}; 0$.

C. $-1; -1; 0$.

D. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$u_1 = \frac{1(1-3)}{2} = -1; u_2 = \frac{2(2-3)}{2} = -1; u_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$$

Vậy ba số hạng đầu tiên của dãy số là $-1, -1, 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$

b) Số hạng u_{10}, u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11}; -\frac{100}{101}$

c) $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)

d) $-\frac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số (u_n)

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

b) Đúng: Ta có: $u_{10} = -\frac{10}{11}, u_{100} = -\frac{100}{101}$.

c) Sai: Xét $-\frac{85}{86} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 85n + 85 = 86n \Leftrightarrow n = 85$.

Vậy $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 85 của dãy (u_n) .

d) Sai: Xét $-\frac{99}{101} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 99n + 99 = 101n \Leftrightarrow n = \frac{99}{2} \notin \mathbb{N}^*$ (loại).

Vậy $-\frac{99}{101}$ không phải là số hạng của dãy số (u_n) .

- Câu 2:** Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
- a) Bốn số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là $-1; 2; 5; 8$;
- b) Số hạng thứ năm của dãy là 13
- c) Công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 2n - 3$.
- d) 101 là số hạng thứ 35 của dãy số đã cho.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có: $u_1 = -1; u_2 = u_1 + 3 = 2; u_3 = u_2 + 3 = 5; u_4 = u_3 + 3 = 8;$
- b) Sai: $u_5 = u_4 + 3 = 11$

c) Sai: Từ giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = u_1 + 3 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Cộng theo vế toàn bộ các đẳng thức trên và triệt tiêu các số hạng giống nhau ở hai vế, ta có:

$$u_n = -1 + 3(n - 1) = 3n - 4.$$

Vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 3n - 4$.

Xét $101 = 3n - 4 \Rightarrow n = 35$.

- d) Đúng: Vậy 101 là số hạng thứ 35 của dãy số đã cho.

- Câu 3:** Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
- a) Số hạng đầu tiên của dãy số là 1
- b) Số hạng $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$
- c) Số hạng $u_4 = \frac{3}{2}; u_5 = \frac{11}{7}$
- d) Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)

Lời giải

- a) Đúng: $u_1 = 1$
- b) Đúng: $u_2 = \frac{5}{4}; u_3 = \frac{7}{5}$
- c) Đúng: Ta có: $u_4 = \frac{3}{2}; u_5 = \frac{11}{7}$.
- d) Sai: Xét $\frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n + 1) = 167(n + 2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

- Câu 4:** Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Năm số hạng đầu của dãy số là: $u_1 = 2; u_2 = 7; u_3 = 12; u_4 = 17; u_5 = 22$.
- b) Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là $u_n = 5n - 3$
- c) Số hạng u_{50} bằng 247
- d) 512 là số hạng thứ 102 của dãy (u_n)

Lời giải

a) Đúng: Năm số hạng đầu của dãy số là: $u_1 = 2; u_2 = 7; u_3 = 12; u_4 = 17; u_5 = 22$.

b) Đúng: Ta có:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = u_1 + 5 \\ u_3 = u_2 + 5 \\ u_4 = u_3 + 5 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_n = u_{n-1} + 5 \end{cases}$$

Cộng theo vế toàn bộ đẳng thức trên rồi triệt tiêu các số hạng giống nhau ở hai vế, ta được:
 $u_n = 2 + (n - 1)5 = 5n - 3$.

c) Đúng: Số hạng thứ 50 của dãy số là: $u_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$.

d) Sai: Xét $5n - 3 = 512 \Rightarrow n = 103$.

Vậy số 512 là số hạng thứ 103 của dãy số (u_n) .

Câu 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$
- b) Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$
- c) Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$
- b) Số hạng thứ 2024 là $\frac{2024}{4049}$

Lời giải

Với k là số nguyên dương, ta có:

$$\frac{1}{(2k-1).(2k+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2k-1)} - \frac{1}{(2k+1)} \right).$$

$$\text{Khi đó: } u_n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(2n+1)} \right] = \frac{n}{2n+1}.$$

Vậy $u_n = \frac{n}{2n+1}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng công thức số hạng tổng quát ta có:

$$u_{2021} = \frac{2021}{2.2021 + 1} = \frac{2021}{4043}; u_{2022} = \frac{2022}{2.2022 + 1} = \frac{2022}{4045}$$

$$u_{2023} = \frac{2023}{2 \cdot 2023 + 1} = \frac{2023}{4047}; u_{2024} = \frac{2024}{2 \cdot 2024 + 1} = \frac{2024}{4049}.$$

a) Sai: Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4043}$

b) Sai: Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4045}$

c) Đúng: Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$

b) Đúng: Số hạng thứ 2024 là $\frac{2024}{4049}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho dãy số (u_n) có $u_n = -n^2 + n + 1$. Số -19 là số hạng thứ mấy của dãy?

Lời giải

Giả sử $u_n = -19, (n \in \mathbb{N}^*)$.

$$\text{Suy ra } -n^2 + n + 1 = -19 \Leftrightarrow -n^2 + n + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -4 \end{cases} (l).$$

Vậy số -19 là số hạng thứ 5 của dãy.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{an+b}{n+1}$. Biết số hạng thứ 2 và số hạng thứ 4 lần lượt bằng 4 và bằng 2. Tìm số hạng đầu tiên của dãy là

Lời giải

$$\text{Vì } u_2 = 4 \text{ và } u_4 = 2 \text{ nên } \begin{cases} \frac{a \cdot 2 + b}{2+1} = 4 \\ \frac{a \cdot 4 + b}{4+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 12 \\ 4a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 14 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{-n+14}{n+1}. \text{ Suy ra } u_1 = \frac{-1+14}{1+1} = \frac{13}{2}.$$

Câu 3: Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Số 21 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số đã cho?

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = 21 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 21 \Leftrightarrow n^2 + n - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -5 \end{cases}.$$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 4$.

Vậy số 21 là số hạng thứ 4 của dãy số đã cho.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2021 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n} (n \geq 1) \end{cases}$. Tìm giá trị u_{2022}

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } u_n &= \frac{u_{n-1}}{n-1} = \frac{u_{n-2}}{(n-1)(n-2)} = \frac{u_{n-3}}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &= \dots = \frac{u_1}{(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1} = \frac{u_1}{(n-1)!}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } u_{2022} = \frac{u_1}{2021!} = \frac{2021}{2021!} = \frac{1}{2020!}.$$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao

cho $\sqrt{u_n - 1} \geq 2039190$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = u_1 + 1^3 \\ u_3 = u_2 + 2^3 \\ \dots\dots\dots \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \Rightarrow u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3$$

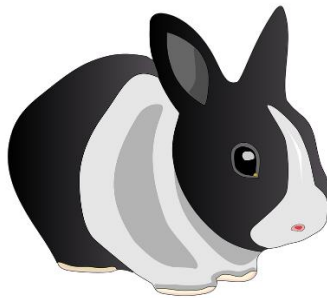
$$\text{Ta lại có } 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n-1)^2 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } u_n = 1 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \sqrt{u_n - 1} \geq 2039190 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} \geq 2039190 \Leftrightarrow n(n-1) \geq 4078380 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} n \geq 2020 \\ n \leq -2019 \end{cases} \text{ mà } n \text{ là số nguyên dương nhỏ nhất nên } n = 2020.$$

Câu 6: Một đôi thỏ cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con; mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm có một đôi thỏ sơ sinh? Giả sử thời gian trong năm này không có con thỏ nào chết.



Lời giải

Số đôi thỏ tạo thành dãy Fibonacci, gọi u_n là số đôi thỏ tại tháng thứ n ta có dãy số cho bởi công thức truy hồi sau $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$

Số lượng đôi thỏ là

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	54	88	144

Vậy sau một năm có 144 đôi thỏ.

-----HẾT-----