

Dạng 2: Xét tính tăng, giảm của dãy số

Phương pháp:

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (u_n > 0)$$
- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (u_n > 0)$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau, biết:

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $u_n = 2n + 3$ | b) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ | c) $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ |
| d) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - n}{n}$ | e) $u_n = \frac{1}{n} - 2$ | f) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ |
| g) $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$ | h) $u_n = 2n^2 + 5$ | i) $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$ |
| k) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | l) $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$ | m) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$ |

Lời giải

a) Ta có: $u_n = 2n + 3; u_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (2n + 5) - (2n + 3) > 0$

Suy ra $u_{n+1} > u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy tăng.

b) Ta có: $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}; u_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$

Giả sử: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{n+1}{n} > 1 \Leftrightarrow n+1 > 4n \Leftrightarrow 3n < 1 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy số giảm.

c) Ta có: $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}; u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} = \frac{n+1}{n^2 + 2n + 2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n^2 + 2n + 2} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2 + 1) - n(n^2 + 2n + 2)}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} \\ &= \frac{n^3 + n^2 + n + 1 - n^3 - 2n^2 - 2n}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} = \frac{-n^2 - n + 1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} < 0 \forall n \geq 1 \Rightarrow (u_n) \text{ là dãy số giảm.} \end{aligned}$$

d) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - n}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1$

Khi đó ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1 \right) - \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 \right) = \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \frac{n\sqrt{n+2} - (n+1)\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\text{Giả sử: } u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow n\sqrt{n+2} - (n+1)\sqrt{n+1} > 0 \Leftrightarrow n\sqrt{n+2} > (n+1)\sqrt{n+1}$$

$$\Leftrightarrow n^2(n+2) > (n+1)^3 \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 < 0 \Rightarrow \text{vô lý.}$$

Vậy $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

$$\text{e) } u_n = \frac{1}{n} - 2 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} - 2 \right) - \left(\frac{1}{n} - 2 \right) = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

Suy ra $u_{n+1} < u_n$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

$$\text{f) } u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

$$\text{Khi đó: } u_{n+1} = 1 - \frac{2}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{2}{n+2} \right) - \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

$$\text{g) } u_n = \frac{2n+1}{5n+2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+2)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+7)}$$

$$\text{Khi đó: } u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+7)} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+2)} \right) = -\frac{1}{(5n+2)(5n+7)} > 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n.$$

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

$$\text{h) } u_n = 2n^2 + 5 \Rightarrow u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 5$$

$$\text{Khi đó } u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + 5 - (2n^2 + 5) = 4n + 2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n) \text{ là dãy số tăng}$$

$$\text{i) } u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = 2 - \frac{3}{n^2 + 1} \Rightarrow u_{n+1} = 2 - \frac{3}{(n+1)^2 + 1}$$

$$\text{Với } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (n+1)^2 > n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{1}{n^2 + 1} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{(n+1)^2 + 1} > 2 - \frac{3}{n^2 + 1} \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

$$\text{k) } u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$$

$$\text{Do } n \in \mathbb{N}^* \text{ nên } \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

$$\text{l) } u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1} = 3n - 5 + \frac{6}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = 3n - 2 + \frac{6}{n+1}$$

Khi đó: $u_{n+1} - u_n = 3n - 2 + \frac{6}{n+2} - \left(3n - 5 + \frac{6}{n+1}\right) = 3 - \frac{6}{(n+1)(n+2)}$

Với $\begin{cases} n \geq 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow (n+1)(n+2) \geq 6 \Leftrightarrow \frac{6}{(n+1)(n+2)} \leq 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{6}{(n+1)(n+2)} \geq 2 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

m) Ta có: $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n} = \frac{n}{n(\sqrt{n+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Khi n tăng thì tử số tăng, mẫu số giảm nên dãy số đã cho là dãy số giảm.

Bài tập 2: Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) biết:

a) $u_n = \frac{5^n}{n^2}$

b) $(u_n) = \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \frac{3u_{n-1}+1}{4} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $u_n = \frac{5^n}{n^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}$

Xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{5^n} = \frac{5n^2}{n^2+2n+1} = \frac{n^2+2n+1+4n^2-2n-1}{n^2+2n+1}$
 $= 1 + \frac{2n(n-1)+2n^2-1}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy (u_n) là dãy số tăng

b) Ta dự đoán dãy số giảm sau đó ta sẽ chứng minh nó giảm

Ta có $u_n - u_{n-1} = \frac{3u_{n-1}+1}{4} - u_{n-1} = \frac{1-u_{n-1}}{4}$

Do đó, để chứng minh dãy (u_n) giảm ta chứng minh $u_n > 1 \quad \forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Với $n=1 \Rightarrow u_1 = 2 > 1$

Giả sử $u_k > 1 \Rightarrow u_{k+1} = \frac{3u_k+1}{4} > \frac{3+1}{4} = 1$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $u_n > 1 \quad \forall n \geq 1$

Suy ra $u_n - u_{n-1} < 0 \Leftrightarrow u_n < u_{n-1} \quad \forall n \geq 2$ hay dãy (u_n) giảm

Bài tập 3: Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$

a) là dãy số tăng.

b) là dãy số giảm

Lời giải

Ta có: $u_n = \frac{na+2}{n+1} = a + \frac{2-a}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = 2 + \frac{2-a}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{a-2}{(n+1)(n+2)}$.

a) Để (u_n) là dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n = \frac{a-2}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow a > 2$.

b) Để (u_n) là dãy số giảm thì $u_{n+1} - u_n = \frac{a-2}{(n+1)(n+2)} < 0 \Leftrightarrow a < 2$.

Bài tập 4 : Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n .

Lời giải

a) Số tiền cả gốc và lãi chị Mai có được sau 1 tháng (khi chưa gửi thêm 6 triệu đồng) là:

$$100 + 100 \cdot \frac{0,5}{100} = 100 \cdot 1,005 = 100,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là: $100,5 + 6 = 106,5$ (triệu đồng).

b) Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$$106,5 \cdot 1,005 + 6 = 113,0325 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$$113,0325 \cdot 1,005 + 6 = 119,5976625 \text{ (triệu đồng)}.$$

c) Ta có: $P_1 = 100 \cdot 1,005 + 6$;

$$P_2 = P_1 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 = 100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6;$$

$$P_3 = P_2 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 = 100 \cdot 1,005^3 + 6 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6;;$$

Cứ như thế, ta dự đoán được công thức của P_n :

$$P_n = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot 1,005^{n-1} + 6 \cdot 1,005^{n-2} + \dots + 6 = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot (1,005^{n-1} + 1,005^{n-2} + \dots + 1).$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho các dãy số sau. Dãy số nào **không** là dãy số tăng?

- A. 1;1;1;1;... B. 1;3;5;7;... C. 2;4;6;8;... D. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \dots$

Lời giải

Xét đáp án A ta có dãy 1;1;1;1;... là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \sqrt{5n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số tăng B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \sqrt{5(n+1)+2} - \sqrt{5n+2} = \sqrt{5n+7} - \sqrt{5n+2} > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

Câu 3: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{3n+2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số tăng B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3(n+1)+2} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+2} = -\frac{3}{(3n+5)(3n+2)} < 0.$$

$$\text{Vậy } u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{10}{3^n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số tăng B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{10}{3^{n+1}} - \frac{10}{3^n} = \frac{10}{3 \cdot 3^n} - \frac{10}{3^n} = \frac{-20}{3 \cdot 3^n} < 0$$

$$\text{Vậy } u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2n^2 + 3n + 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số tăng B. Dãy số giảm
C. Dãy số không tăng, không giảm D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - 2n^2 - 3n - 1 = 4n + 5 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Vậy } u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Câu 6: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = (-1)^n (n^2 + 1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số tăng B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Dãy số là dãy hữu hạn

Lời giải

Dãy không tăng, không giảm vì các số hạng đan dấu

Câu 7: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = n^2 - 400n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Mọi số hạng đều âm

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 400(n+1) - n^2 + 400n = 2n - 399$$

$$\text{Do } 2n - 399 > 0 \text{ khi } n > \frac{399}{2} \text{ và } 2n - 399 < 0 \text{ khi } n < \frac{399}{2}.$$

Vậy dãy số đã cho không tăng, không giảm

Câu 8: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \frac{1}{3^n}.$

B. $u_n = \frac{1}{2n+1}.$

C. $u_n = \frac{n+1}{3n+2}.$

D. $u_n = \frac{4n-2}{n+3}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3 \cdot 3^n} - \frac{1}{3^n} = \frac{-2}{3 \cdot 3^n} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{3n+5} - \frac{n+1}{3n+2} = -\frac{1}{(3n+5)(3n+2)} < 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4n+2}{n+4} - \frac{4n-2}{n+3} = \frac{14}{(n+4)(n+3)} > 0$$

Câu 9: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào giảm?

A. $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$

B. $u_n = (-1)^n (5^n - 1).$

C. $u_n = -3^n.$

D. $u_n = \sqrt{n+4}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_{n+1} - u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$$

Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n (5^n - 1)$. có các số hạng đan dấu nên dãy không tăng, không giảm

$$u_{n+1} - u_n = -3^{n+1} + 3^n = -3 \cdot 3^n + 3^n = -2 \cdot 3^n < 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+4} = \frac{1}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+4}} > 0$$

Câu 10: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào không tăng, không giảm?

A. $u_n = n + \frac{1}{n}$.

B. $u_n = 5^n + 3n$.

C. $u_n = -3^n$.

D. $u_n = (-3)^n \cdot \sqrt{n^2 + 1}$

Lời giải

Dãy không tăng, không giảm vì các số hạng đan dấu

Dãy trong đáp án A và B tăng, dãy trong đáp án C là dãy giảm

Câu 11: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 5^n - 4^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Dãy số có số hạng thứ 100 bé hơn 1

Lời giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = 5^{n+1} - 4^{n+1} - 5^n + 4^n = 4(5^n - 4^n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 12: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{an+2}{3n+1}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a = 6$

B. $a > 6$

C. $a < 6$

D. $a \geq 6$

Lời giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{an+a+2}{3n+4} - \frac{an+2}{3n+1} = \frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n = \frac{a-6}{(3n+4)(3n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a > 6$

Câu 13: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n - an$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $a = 2$

B. $a > 2$

C. $a < 2$

D. $a \geq 2$

Lời giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - an - a - 2^n + an = 2^n - a, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n = 2^n - a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{3^n}{an}$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số tăng.

A. $\forall a < 0$

B. Không tồn tại a

C. $\forall a \in \mathbb{N}^*$

D. $a > 0$

Lời giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{an+a} - \frac{3^n}{an} = \frac{a \cdot 3^n (2n-1)}{a^2 (n^2+n)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Để dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n = \frac{a \cdot 3^n (2n-1)}{a^2 (n^2+n)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a > 0$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1} = \frac{1}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+4}} - \frac{1}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+5}) + (\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n+4})}{(\sqrt{3n+5} + \sqrt{3n+4})(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n+1})} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Các số hạng đều dương

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = n - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{-1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n+1 + \sqrt{(n+1)^2 + 1}} + \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1 + (\sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1})}{(n+1 + \sqrt{(n+1)^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 1})} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số đã cho là dãy tăng

Câu 17: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{2n^2 - n - 1}{n + 2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Có số hạng âm

Lời giải

$$\text{Ta có } u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2 + 3n}{n + 3} - \frac{2n^2 - n - 1}{n + 2} = \frac{2n^2 + 10n + 3}{(n + 3)(n + 2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy dãy số đã cho là dãy tăng

Câu 18: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào tăng?

A. $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

B. $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n + 1}$.

C. $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

D. $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 1$.

Lời giải

$$\text{Với } n \in (k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin n > 0 \Rightarrow \frac{\sin n}{n} > 0$$

$$n \in (\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin n < 0 \Rightarrow \frac{\sin n}{n} < 0.$$

$$\text{Ta có } u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{2n + 1} = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{(2n + 1)^2}}. \text{ Xét dãy } (v_n) \text{ với } v_n = \frac{n^2 + 1}{(2n + 1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n^2 + 2n + 2}{4n^2 + 12n + 9} - \frac{n^2 + 1}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{4n^2 - 2n - 7}{(2n+3)^2(2n+1)^2}$$

Do $v_{n+1} - v_n$ vừa nhận giá trị âm lẫn dương nên dãy số (v_n) không tăng, không giảm

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 \cdot 3^n}{(n+1)^2} - \frac{3^n}{n^2} = \frac{3^n(2n^2 - 2n - 1)}{(n+1)^2 n^2}.$$

Do $u_{n+1} - u_n$ nhận giá trị âm lẫn dương nên dãy đã cho không tăng, không giảm

Câu 19: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{5}{3} \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

Ta có $u_1 < u_2 < u_3$. Dự đoán dãy số đã cho tăng, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giả sử $u_k > u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} > u_k$

Thật vậy: $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{3}(u_k - u_{k-1}) > 0 \Leftrightarrow u_{k+1} > u_k$. Vậy dãy đã cho là dãy tăng

Câu 20: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Dãy số vừa tăng vừa giảm

Lời giải

Ta có $0 < u_1 < u_2 < u_3$. Dự đoán dãy số đã cho tăng, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử $u_k > u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} > u_k$

Thật vậy: $u_{k+1} - u_k = \sqrt{u_k^2 + 3} - \sqrt{u_{k-1}^2 + 3} = \frac{(u_k - u_{k-1})(u_k + u_{k-1})}{\sqrt{u_k^2 + 3} + \sqrt{u_{k-1}^2 + 3}} > 0 \Leftrightarrow u_{k+1} > u_k$. vậy dãy đã cho

là dãy tăng

Câu 21: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + u_n} \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Có $u_{10} = 2$

Lời giải

Ta có $u_1 > u_2 > u_3$. Dự đoán dãy số đã cho giảm, ta chứng minh bằng quy nạp

Từ giả thiết thì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Giả sử $u_k < u_{k-1}, k \geq 2$. Ta chứng minh $u_{k+1} < u_k$

Thật vậy: $u_{k+1} - u_k = \frac{3u_k}{3+u_k} - \frac{3u_{k-1}}{3+u_{k-1}} = \frac{9(u_k - u_{k-1})}{(3+u_k)(3+u_{k-1})} < 0 \Leftrightarrow u_{k+1} < u_k$. vậy dãy đã cho là dãy giảm

Câu 22: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số tăng

B. Dãy số giảm

C. Dãy số không tăng, không giảm

D. Có hữu hạn số hạng

Lời giải

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{4n^2 + 3n + 1}{2(2n+1)(n+1)^2} > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

Câu 23: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = au_n + 1 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các giá trị của a để (u_n) tăng?

A. $a < 0$.

B. $a \leq 0$.

C. $a > 0$.

D. $a > 1$.

Lời giải

Xét hiệu $u_{n+1} = au_n + 1 \Rightarrow u_n = au_{n-1} + 1 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = a(u_n - u_{n-1})$

$\Rightarrow u_3 - u_2 = a(u_2 - u_1) = a^2 \Rightarrow u_4 - u_3 = a(u_3 - u_2) = a^3 \dots \Rightarrow u_{n+1} - u_n = a^n > 0$

Để dãy số (u_n) tăng suy ra $a > 0$.

Câu 24: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là dãy giảm?

A. $u_n = n^2$.

B. $u_n = \frac{1}{n} - 3$.

C. $u_n = 3n$.

D. $u_n = n^3 - 2$.

Lời giải

Xét đáp án A, ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy này là dãy tăng.

Xét đáp án B, ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy này là dãy giảm.

Xét đáp án C, ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 3n = 3 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy này là dãy tăng.

Xét đáp án D, ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - n^3 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy này là dãy tăng.

Câu 25: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{3}{n^2}$.

B. $u_n = \frac{n-3}{n+1}$.

C. $u_n = \frac{n}{2}$.

D. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$.

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{3}{n^2}, u_{n+1} = \frac{3}{(n+1)^2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy } (u_n) \text{ là dãy giảm.}$$

$$\text{Ta có } u_n = \frac{n-3}{n+1}; u_{n+1} = \frac{n-2}{n+2}. \text{ Khi đó: } u_{n+1} - u_n = \frac{n-2}{n+2} - \frac{n-3}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

$$\text{Ta có } u_n = \frac{n}{2}; u_{n+1} = \frac{n+1}{2}. \text{ Khi đó: } u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

$$\text{Ta có } u_1 = \frac{-1}{3}; u_2 = \frac{1}{9}; u_3 = \frac{-1}{27}. \text{ Vậy } (u_n) \text{ là dãy số không tăng không giảm.}$$

Câu 26: Dãy số nào sau đây là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{5-3n}{2n+3}, n \in \mathbb{N}^*.$

B. $u_n = \frac{n-5}{4n+1}, n \in \mathbb{N}^*.$

C. $u_n = 2n^2 + 3, n \in \mathbb{N}^*.$

D. $u_n = \cos(2n+1), n \in \mathbb{N}^*.$

Lời giải

$$\text{Với dãy } u_n = \frac{5-3n}{2n+3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } u_{n+1} - u_n &= \frac{5-3(n+1)}{2(n+1)+3} - \frac{5-3n}{2n+3} = \frac{2-3n}{2n+5} - \frac{5-3n}{2n+3} \\ &= \frac{(2-3n)(2n+3) - (5-3n)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{-19}{(2n+3)(2n+5)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ suy ra } (u_n) \text{ là dãy giảm.} \end{aligned}$$

Câu 27: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}.$

B. $u_n = \frac{3n-1}{n+1}.$

C. $u_n = n^2.$

D. $u_n = \sqrt{n+2}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n+1}} = u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Câu 28: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}.$

B. $u_n = \frac{3n-1}{n+1}.$

C. $u_n = 1 - n^2.$

D. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$

Lời giải

Câu 29: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm

A. $u_n = \frac{n-3}{n+1}.$

B. $u_n = \frac{n}{2}.$

C. $u_n = \frac{2}{n^2}.$

D. $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}.$

Lời giải

Ta có $u_n = \frac{n-3}{n+1}$; $u_{n+1} = \frac{n-2}{n+2}$. Khi đó: $u_{n+1} - u_n = \frac{n-2}{n+2} - \frac{n-3}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n = \frac{n}{2}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{2}$. Khi đó: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n = \frac{2}{n^2}$, $u_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy giảm.

Ta có $u_1 = \frac{-1}{3}$; $u_2 = \frac{1}{9}$; $u_3 = \frac{-1}{27}$. Vậy (u_n) là dãy số không tăng không giảm.

Câu 30: Dãy số nào sau đây là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{5-3n}{2n+3}, (n \in \mathbb{N}^*)$.

B. $u_n = \frac{n-5}{4n+1}, (n \in \mathbb{N}^*)$.

C. $u_n = 2n^3 + 3, (n \in \mathbb{N}^*)$.

D. $u_n = \cos(2n+1), (n \in \mathbb{N}^*)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } u_n = \frac{5-3n}{2n+3}, (n \in \mathbb{N}^*), \text{ ta có } u_{n+1} - u_n &= \frac{5-3(n+1)}{2(n+1)+3} - \frac{5-3n}{2n+3} = \frac{2-3n}{2n+5} - \frac{5-3n}{2n+3} \\ &= \frac{(2-3n)(2n+3) - (2n+5)(5-3n)}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{4n-6n^2+6-9n-10n+6n^2-25+15n}{(2n+5)(2n+3)} \\ &= \frac{-19}{(2n+5)(2n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Vậy } u_n = \frac{5-3n}{2n+3}, (n \in \mathbb{N}^*) \text{ là dãy giảm.} \end{aligned}$$

Câu 31: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = \frac{1}{n}$.

C. $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$.

D. $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm

$$\text{Xét đáp án C: } u_n = \frac{n+5}{3n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow u_1 > u_2$$

$$\text{Xét đáp án D: } u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) > 0$$

Câu 32: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$.

B. $u_n = \frac{3}{n}$.

C. $u_n = 2^n$.

D. $u_n = (-2)^n$.

Lời giải

Xét đáp án C: $u_n = 2^n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0$

Câu 33: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{2n+1}{n-1}$.

B. $u_n = n^3 - 1$.

C. $u_n = n^2$.

D. $u_n = 2n$.

Lời giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)-1} - \frac{2n+1}{n-1} = \frac{2n+3}{n} - \frac{2n+1}{n-1} \\ &= \frac{(2n+3)(n-1) - n(2n+1)}{n(n-1)} = \frac{(2n+3)(n-1) - n(2n+1)}{n(n-1)} = \frac{-3}{n(n-1)} < 0, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}, n > 1. \end{aligned}$$

Suy ra dãy số giảm.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 1 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng $u_3 = \frac{2}{3}$.

b) $u_7 - u_8 = \frac{1}{56}$.

c) $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)}$.

d) Dãy số u_n là dãy số tăng.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $u_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

b) Sai: Số hạng $u_7 - u_8 = -\frac{1}{56}$.

c) Đúng: Ta có $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Đúng: Vậy dãy số u_n là dãy số tăng.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = n^2 + 2n, n \in \mathbb{N}^*$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = 3$.

b) Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

c) Số 143 là số hạng thứ 13 trong dãy số (u_n) .

d) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{3n^2 + 5n}{2(n+1)(n+2)}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $u_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

b) Sai: $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 2(n+1) - (n^2 + 2n) = 2n + 3 > 0$

Cho nên dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

c) Sai: Ta có $u_n = 143 \Leftrightarrow n^2 + 2n = 143 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -13 \end{cases}$.

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 11$, nghĩa là số 143 là số hạng thứ 11.

d) Sai: Ta có $u_n = n^2 + 2n = n(n+2)$

Do đó $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$

Phân tích: $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right); \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right); \dots; \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$

Ta được: $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2+n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{3n^2 + 5n}{4(n+1)(n+2)}$

Câu 3: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $u_3 = \frac{2}{3}$

b) $u_7 - u_8 = \frac{1}{56}$

c) $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)}$

d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $u_3 = \frac{2}{3}$

b) Sai: $u_7 - u_8 = -\frac{1}{56}$

c) Sai: Ta có: $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 1.$

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

d) Đúng: Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n}{4^n}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $u_n = \frac{n}{4^n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \geq 1$

c) Ta có $u_{2024} < u_{2023}$

d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng

Lời giải

a) Sai: Nhận xét: $u_n = \frac{n}{4^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

b) Đúng: Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}} : \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} < 1, \forall n \geq 1.$

c) Đúng: Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

d) Sai: Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$

b) $\frac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$

c) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Lời giải

Nhận xét: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

a) Sai: Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$= \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

b) Đúng: Vì $0 < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ nên $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < 1$

hay $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Đúng: Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Đúng: Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 6: Bà Hoa gửi vào một ngân hàng số tiền 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 tháng. Số tiền (triệu đồng) của bà Hoa sau n tháng được tính theo công thức

$$T_n = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^n. \text{ Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:}$$

a) Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là khoảng 200,83 (triệu đồng)

b) Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 201,67 (triệu đồng);

c) Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 211,99 (triệu đồng).

d) Sau 17 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng 215,65 (triệu đồng).

Lời giải

a) Đúng: Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là: $T_1 = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^1 \approx 200,83$ (triệu đồng)

b) Đúng: Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_2 = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^2 \approx 201,67$ (triệu đồng);

c) Đúng: Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_{14} = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^{14} \approx 211,99$ (triệu đồng).

d) Sai: Sau 17 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_{17} = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^{17} \approx 214,65$ (triệu đồng).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho dãy số (a_n) với $a_n = \frac{7n+5}{kn+7} (k \in \mathbb{N})$. Tìm giá trị nguyên k lớn nhất để dãy đã cho là dãy số tăng?

Lời giải

$$\text{Ta có: } a_n = \frac{7n+5}{kn+7} \text{ và } a_{n+1} = \frac{7(n+1)+5}{k(n+1)+7} = \frac{7n+12}{kn+k+7}.$$

Khi đó ta có: $a_{n+1} - a_k = \frac{7n+12}{kn+k+7} - \frac{7n+5}{kn+7} = \frac{-5k+49}{(kn+k+7)(kn+7)}$

Để dãy số tăng khi và chỉ khi $a_{n+1} - a_k > 0, \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{-5k+49}{(kn+k+7)(kn+7)} > 0 \Leftrightarrow k < \frac{49}{5}$

Vậy số nguyên là lớn nhất là $k=9$

Câu 2: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1=1; u_2=2 \\ u_{n+2}=au_{n+1}+(1-a)u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm giá trị nguyên dương của a nhỏ nhất để dãy số (u_n) tăng.

Lời giải

Xét hiệu: $u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + (1-a)u_n - u_{n+1} = (a-1)u_{n+1} + (1-a)u_n = (a-1)(u_{n+1} - u_n)$

Khi đó: $u_3 - u_2 = (a-1)(u_2 - u_1) = (a-1)(2-1) = a-1$

$u_4 - u_3 = (a-1)(u_3 - u_2) = (a-1)(a-1) = (a-1)^2$

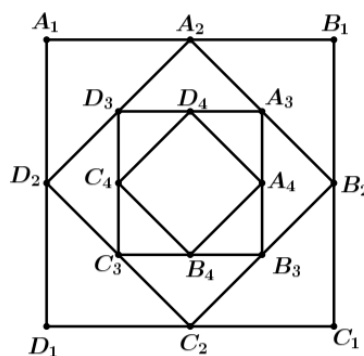
$u_5 - u_4 = (a-1)(u_4 - u_3) = (a-1)(a-1)^2 = (a-1)^3$

Suy ra: $u_{n+1} - u_n = (a-1)^{n-1}$. Để dãy số (u_n) tăng thì $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Vậy $a > 1$ thì dãy số (u_n) tăng.

Câu 3: Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, gọi A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi S_n là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$. Tính S_{12} .

Lời giải



Ta thấy mỗi tứ giác $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông có cạnh là A_nB_n .

Ta có: $A_1B_1 = 4, A_2B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1B_1 = 2\sqrt{2}, A_3B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_2B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 A_1B_1 = 2, \dots$

Tổng quát: $A_nB_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} A_1B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot 4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}$.

Diện tích hình vuông $A_n B_n C_n D_n$ là $S_n = (A_n B_n)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng với $n = 12$ có: $S_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{32768}$.

Câu 4: Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng. Tính số tiền ông An có được sau tháng sau tháng thứ hai

Lời giải

Số tiền ông An có được:

Sau tháng thứ nhất là: $T_1 = 30 + 30 \cdot \frac{0,6}{100} = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) = 30,18$ (triệu đồng).

Sau tháng thứ hai: $T_2 = 30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)\right] \frac{0,6}{100}$

$$= \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)\right] \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^2$$

$\approx 60,54$ (triệu đồng)

Câu 5: Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Lời giải

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$$T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5 \text{ (triệu đồng)}$$

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$$T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125 \text{ (triệu đồng)}$$

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$$T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938 \text{ (triệu đồng)}$$

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203 \text{ (triệu đồng)}$$

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652 \text{ (triệu đồng)}$$

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$$T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1} \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 6: Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức $A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n$ (tỉ đồng)

Lời giải

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2,5 \cdot (1,035)^5 = 2,9692 \text{ (tỉ đồng)}$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

-----**HẾT**-----