

◆ CHƯƠNG 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

▣ BÀI 1. SỰ BIẾN THIÊN VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

*. Đề kiểm tra rèn luyện

♦ Đề 1:

☞ **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$
		-4		-2	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 4.

B. 1.

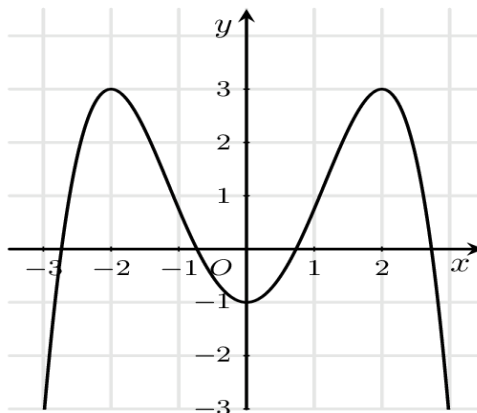
C. 2.

D. 3.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(7; +\infty)$.

B. $(-2; 3)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

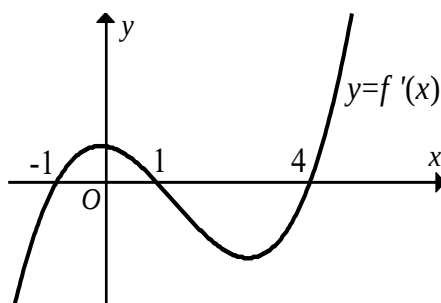
- A.** $(-2; 0)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$

Câu 4: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) > 0 \forall x \in (-1; 1)$ và $(4; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$.

Câu 5: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$. **B.** $y = -x^3 + x + 1$. **C.** $y = \frac{x-1}{x-2}$. **D.** $y = 2x^2 + 3x + 2$.

Lời giải

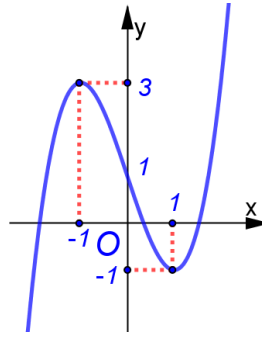
Tập xác định: $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x - 9$

$y' = 0 \Leftrightarrow$ PT vô nghiệm.

$y' < 0, \forall x$. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=1$.

B. $x=-1$.

C. $y=3$.

D. $M(-1;3)$.

Lời giải

Từ đồ thị, hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	6	11	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-10	-20	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

A. -10 .

B. 11 .

C. 6 .

D. -20 .

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y_{CT} = -20$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$, khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \forall x \in D$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Câu 9: Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng nào?

- A. $(-4; 2)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. D. $(-4; -1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có. $y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2}, \forall x \in D$.

Khi đó $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-11	$-\infty$	1	$+\infty$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; -1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 12x^{2025}(x + 1)(3 - x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^{2025}(x + 1)(3 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 7}{x - 4}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** $x_{CT} = 3, x_{CD} = 5$. **B.** $x_{CT} = -3, x_{CD} = 5$. **C.** $x_{CT} = 5, x_{CD} = 3$. **D.** $x_{CT} = 5, x_{CD} = -3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Ta có: $y' = \frac{(2x-2)(x-4) - (x^2-2x-7)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (tm)} \\ x = 3 \text{ (tm)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	4	5	$+\infty$				
y'		+	0	-	0	+			
y	$-\infty$		4		$+\infty$		8		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, và cực đại tại $x = 3$.

Câu 12: Điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{-x^2+2x-1}{x+2}$ là

- A.** $x = 1$. **B.** $x = -5$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}, \{-2\}$.

Ta có

$y' = \frac{(-2x+2)(x+2) - (-x^2+2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ (tm)} \\ x = 1 \text{ (tm)} \end{cases}$.

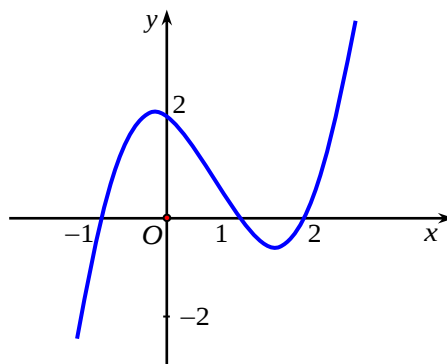
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$		
y'	-	0	+	+	0	-	
y	$+\infty$				0		$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$ và $y_{CT} = 12$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$,
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

- a) Sai, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.
- b) Đúng, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$.
- c) Sai, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2)$.
- d) Đúng, vì dựa vào đồ thị thì $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (1; 2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Cực đại của hàm số $f(x)$ là 1.
- c) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.
- d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

Câu 2
a) S
b) Đ

c) S
d) S

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$+\infty$	9	$+\infty$	

- a) Từ bảng biến thiên suy ra mệnh đề sai.
b) Mệnh đề đúng.
c) Hàm số chỉ có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 3$. Vậy mệnh đề sai.
d) Do hàm số không xác định tại $x = 1$ thuộc $(-1; 3)$ nên mệnh đề sai.

Câu 3: Cho hàm số $y = 2^{x^2 - 3x + \frac{13}{4}}$.

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
c) Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT} = 2$.
d) Hàm số có 2 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

$$y = f(x) = 2^{x^2 - 3x + \frac{13}{4}}.$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = (2x - 3) \cdot 2^{x^2 - 3x + \frac{13}{4}} \cdot \ln 2; y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in D; f\left(\frac{3}{2}\right) = 2.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = 2^{x^2-3x+2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: Các mệnh đề **a)** và **c)** đúng.

Các mệnh đề **b)** và **d)** sai.

Câu 4: Cho hàm số $y = \log_2(x^2 - 4x + 5)$ có đồ thị là (C) .

a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

d) Giả sử đồ thị hàm số (C) cắt đường thẳng $(d): y = 1$ tại hai điểm A, B và có điểm cực trị là M . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB bằng 2.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Điều kiện xác định: $x^2 - 4x + 5 > 0$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Vậy hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Ta có $y' = \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)\ln 2}$.

Do $y' > 0 \Leftrightarrow x > 2$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

c) Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

d) Đồ thị hàm số (C) có điểm cực tiểu là $M(2; 0)$ và cắt đường thẳng $(d): y = 1$ tại hai điểm $A(x_1; 1), B(x_2; 1)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$\log_2(x^2 - 4x + 5) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow A(1;1), B(3;1).$$

Khi đó $\overrightarrow{MA} = (-1;1), \overrightarrow{MB} = (1;1) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Suy ra tam giác MAB vuông tại M .

Do đó, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB là $R = \frac{AB}{2} = 1$.

📖 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ là $ax + by + 4 = 0$. Tính $a + 2b$.

Lời giải

Trả lời: 6

Tập xác định $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		-4		28	$-\infty$

Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(-1; -4)$ và $B(3; 28)$.

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $8x - y + 4 = 0 \rightarrow a = 8; b = -1$.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1; -7), B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

Lời giải

Trả lời: -35

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Theo bài cho ta có: } \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -7 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - a - b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$

Suy ra: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12$. Do đó, $y(-1) = -35$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2, (a; b; c \in \mathbb{R})$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a; b; c$?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 < 0$ nên

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1); (2) suy ra $a; b; c$ cùng dấu. Hơn nữa $y'(0) = c > 0$ nên $a > 0; b > 0; c > 0$.

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải (**Hình 1**). Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị t nguyên để chất điểm chuyển động sang trái?



Hình 1

Lời giải

Trả lời: 3

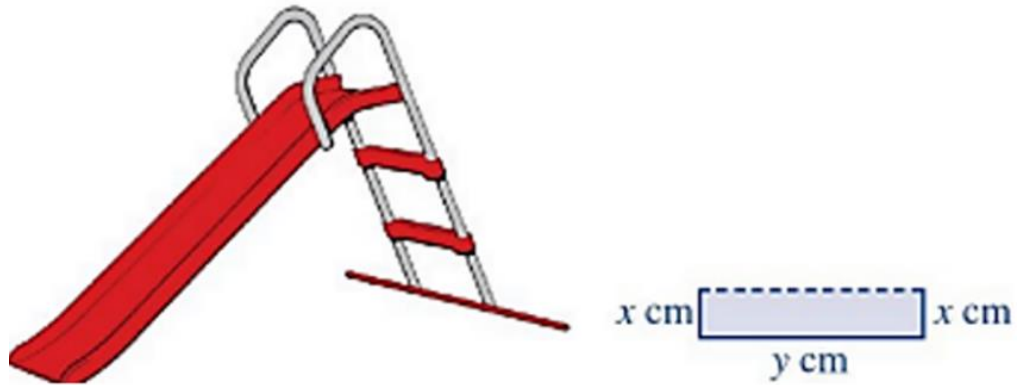
Ta có: Vận tốc $v(t) = s'(t) = (t^3 - 9t^2 + 15t)' = 3t^2 - 18t + 15$

Chất điểm chuyển động theo chiều âm (sang bên trái) khi

$$v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 5$$

Do $t \in \mathbb{N}$ nên $t \in \{2, 3, 4\}$

Câu 5: Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình 2. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Hình 2

Gọi S là diện tích mặt cắt. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Lời giải

Trả lời: 20

Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0; 40)$;

$$S'(x) = -4x + 80;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0	20	40
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	800	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CD} = 800$.

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì $x = 20$ (cm).

Câu 6: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ là biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (quy tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải:

Trả lời: 1,61

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{-5000(1+5e^{-t})'}{(1+5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}$$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

$$\text{Đặt } h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^2}.$$

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1+5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1+5e^{-t})^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1+5e^{-t})(1+5e^{-t}-10e^{-t})}{(1+5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1-5e^{-t})}{(1+5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1-5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0		ln 5		$+\infty$
$h'(t)$		+	0	-	
$h(t)$			1250		
	$\frac{6250}{9}$				0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,61$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

♦ **Đề 2:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Nếu $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- C.** Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

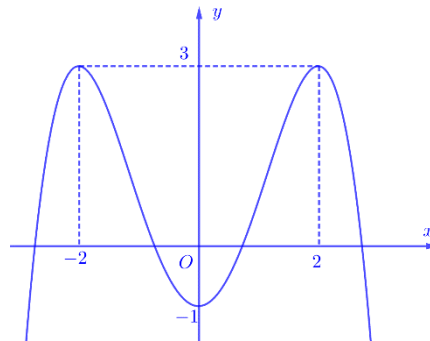
D. Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in \square$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\square$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\square$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\square$ khi $f'(x) > 0, \forall x \in \square$.

+) Với $f'(x) < 0, \forall x \in \square$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\square$; Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in \square$ thì hàm số $f(x)$ là hàm hằng trên $\square$; Nếu $f'(x) \neq 0, \forall x \in \square$ thì chưa xác định được hàm số $f(x)$ đồng biến hay nghịch biến trên $\square$.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

A. $x = -1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 2$.

D. $A(0; -1)$.

Câu 3: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \frac{2x+1}{x-3}$.

B. $y = -x^3 + 2x^2 - 15x - 1$.

C. $y = -2x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 2x^2 + 2024x + 5$.

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 15x - 1$ có TXĐ $D = \square$.

$$y' = -3x^2 + 4x - 15 < 0 \quad \forall x \in \square \quad \text{vì} \quad \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = 4 - (-3) \cdot (-15) = -41 < 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 15x - 1$ nghịch biến trên $\square$.

Lưu ý: Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ có $y' = \frac{-7}{(x-3)^2} < 0, \forall x \neq 3$ nên hàm số này nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;1)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	2	$+\infty$	2

Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ do vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y = (x^2 - 1)(3x - 2)^3$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A.** 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

$y' = (3x - 2)^2 (15x^2 - 4x - 9)$ vì $(3x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của y' là dấu của biểu thức $15x^2 - 4x - 9$

$$15x^2 - 4x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{139}}{15} \\ x = \frac{2 + \sqrt{139}}{15} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{139}}{15}$		$\frac{2+\sqrt{139}}{15}$	$+\infty$
y''	+	0	-	0	+
y	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 1 điểm cực đại

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x+2)(x+1)(x^2-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-1;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		8		4		10

Giá trị cực đại của $f(x)$ là

- A.** 4. **B.** 8. **C.** 10. **D.** -2.

Lời giải:

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 8.

Câu 9: Tính giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$.

- A.** $\frac{1}{e}$. **B.** 1. **C.** e. **D.** 0.

Lời giải:

+) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

+) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Ta có BBT:

x	0	e	$+\infty$
y'		0	
y	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

+) Dựa vào BBT, hàm số có giá trị cực đại $y = \frac{1}{e}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 4)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Vì hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Biết $M(1; -5)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. -3.

B. -21.

C. 3.

D. 15.

Lời giải

Ta có:

$$y = f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Vì $M(1; -5)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases} \text{ (thử lại thỏa yêu cầu)}$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \Rightarrow f(2) = 3.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$				2			$+\infty$
	$-\infty$				-4		

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -4$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

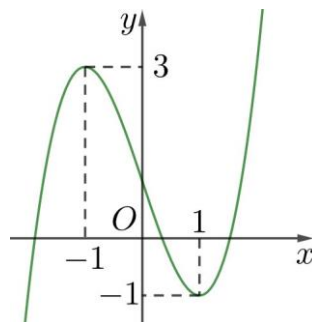
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

d) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -4$.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là 2.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị trái dấu.
- d) Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $d : y = -3x$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- b) Giá trị cực đại là $y = 3$, giá trị cực tiểu là $y = -1$. Do đó tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là $3 - 1 = 2$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị là $x = \pm 1$.
- d) Gọi $d : y = ax + b$ là đường thẳng qua hai điểm cực trị $A(-1; 3), B(1; -1)$.

$$A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d : y = -2x + 1$$

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

- a) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
- b) Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực tiểu là 2.
- c) Hàm số $f(2x)$ nghịch biến trên $(0; 1)$
- d) Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4} [f(x) - 1]^4$ là 5.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai. Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

b) Đúng.

Ta có: hai điểm cực tiểu lần lượt có tọa độ $(-1;-1)$ và $(1;-1)$.

Do đó độ dài nối 2 điểm cực tiểu là $\sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = 2$.

c) Sai.

Ta có: $[f(2x)]' = 2f'(2x)$

$$[f(2x)]' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Do đó, hàm số đồng biến trên $(\frac{1}{2};1)$.

d) Đúng.

$$\text{Giả sử } f(x) = ax^4 + bx^2 + c. \text{ Từ } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(\pm 1) = 0 \\ f(\pm 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1.$$

Khi đó $y = \frac{1}{x^4} [2x^4 - 4x^2]^4 = 2^4 x^4 (x^2 - 2)^4$. Có $y' = 2^4 \cdot 4 \cdot x^3 \cdot (x^2 - 2)^3 \cdot (2x - 2)$.

Và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{2}$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Do đó, hàm số y có 5 cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$.

a) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số là 0.

c) Hàm số $f(x^2)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$

d) Có 2025 giá trị nguyên của tham số m trong $[-2024;2025]$ để hàm số:

$g(x) = f(\ln x) - mx^2 + 4mx - 2$ nghịch biến trên $(e;e^{2024})$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

a) Đúng.

b) Sai. Vì không đủ cơ sở để xác định hàm số $f(x)$ nên không xác định được giá trị cực tiểu.

c) Sai.

$$\text{Ta có: } \left[f(x^2) \right]' = 2xf'(x^2) = 2x(x^2 + 1)e^{x^2}$$

$$\left[f(x^2) \right]' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Do đó, hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$.

d) Sai.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x) - 2mx + 4m = \frac{1}{x} (\ln x + 1) e^{\ln x} - 2mx + 4m = \ln x + 1 - 2mx + 4m$$

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(e; e^{2024})$ khi và chỉ khi $\ln x + 1 - mx + 4m \leq 0, \forall x \in (e; e^{2024})$

$$\Leftrightarrow 2m \geq \frac{\ln x + 1}{x - 2}, \forall x \in (e; e^{2024}).$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{\ln x + 1}{x - 2}, x \in (e; e^{2024})$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x - 1}{(x-2)^2} = \frac{1 - x \ln x}{x(x-2)^2}, x \in (e; e^{2024})$$

$$g'(x) < 0, \forall x \in (e; e^{2024})$$

Bảng biến thiên:

x	e e^{2024}
$g'(x)$	—
$g(x)$	$\frac{2}{e-2}$ 

$$\text{Quan sát bảng biến thiên ta có } 2m \geq \frac{2}{e-2} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e-2} \Rightarrow m \geq 2.$$

$$\text{Do } m \in [-2024; 2025], m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{2; 3; \dots; 2025\}.$$

Vậy có 2024 giá trị nguyên của tham số m .

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Biết rằng tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ là hai khoảng $(a; b), (b; c)$

với $a < b < c$. Tính $T = a + b + c$

Lời giải

Trả lời: -3

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2ax^2 + b$ có một điểm cực trị là $(1; 2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho (quy tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,41

Ta có $y' = 4x^3 - 4ax$.

Do đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực trị là $(1; 2)$ nên ta có

$$\begin{cases} 4.1^3 - 4a.1 = 0 \\ 1^4 - 2a.1^2 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Khi đó $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				3			$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 2 2

Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu $A(-1; 2)$, $B(1; 2)$ và một điểm cực đại $C(0; 3)$.

Vậy khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

$$AC = BC = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Câu 3: Biết rằng hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ cùng với điểm $I(-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ tạo thành một tam giác. Diện tích tam giác đó bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 6,71

Tập xác định $\mathbb{R}$

$$+ y' = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	1		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$	1

Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(2 - \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5})$ và $B(2 + \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5})$

Khi đó $\overline{AB} = (2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}) \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$; $\overline{AI} = (2; -1) \Rightarrow AI = \sqrt{5}$; $\overline{IB} = (2 + 2\sqrt{5}; -1 + 2\sqrt{5}) \Rightarrow IB = \sqrt{45 + 4\sqrt{5}}$.

Trong tam giác $\cos A = \frac{AB^2 + AI^2 - BI^2}{2AB.AI} = \frac{40 + 5 - 45 - 4\sqrt{5}}{2.2\sqrt{10}.\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Diện tích tam giác ABI là: $S_{ABI} = \frac{1}{2} AB.AI.\sin A = \frac{1}{2} . 2\sqrt{10} . \sqrt{5} \frac{3}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{5} \approx 6,71$.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Với $\overline{AB} = (a; b)$, $\overline{AI} = (c; d)$ thì diện tích tam giác ABI là: $S_{ABI} = \frac{1}{2} |ad - bc|$

Vậy diện tích tam giác ABI là $S_{ABI} = \frac{1}{2} |-2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$.

Câu 4: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: 52

Xét hàm số:

$$f(x) = TR - TC = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000).$$

$$f(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000.$$

$$\text{TXĐ: } D = (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 (N) \\ x = -2 (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	-4000	74416	$-\infty$	

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD} = 74416$ tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x = 52$.

Câu 5: Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; a)$ có độ dài lớn nhất. Khi đó a bằng?

Lời giải

Trả lời: 0

Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ có tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

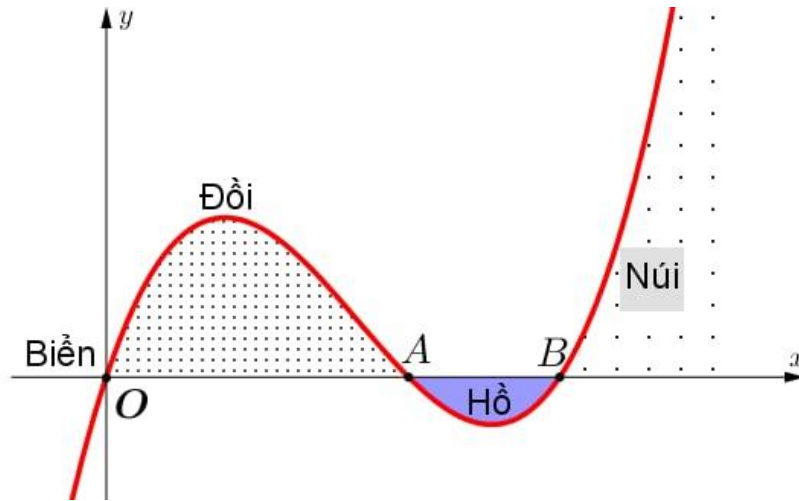
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		-	+	
y	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số y nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Vậy $a = 0$.

Câu 6: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).



Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = 2$ km, độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời : 158

Theo đề bài ta có : $OA = 2$ km, $OB = 3$ km và $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $C(3; 0)$ suy ra $y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$ với $a > 0$.

$$\text{Ta có : } y' = a(3x^2 - 10x + 6), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại $x_{CD} = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$; $y_{CD} = 0,528$ suy ra

$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25.$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu $x_{CT} = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$, $y_{CT} \approx 0,1578$.

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ 0,1578 km hay xấp xỉ 158 m.

♦ Đề 3:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Hàm số $y = -x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; \sqrt{3})$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = -x^3 + 3x \Rightarrow y' = -3x^2 + 3$.

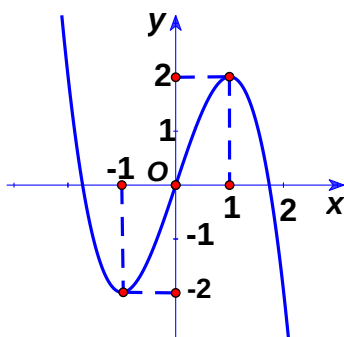
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0; +\infty)$

B. $(-2; 2)$

C. $(-1; 1)$

D. $(-2; 1)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x+2)(x+1)(x^2-1)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;1)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; -1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của đạo hàm:

x	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -4 .

B. 3 .

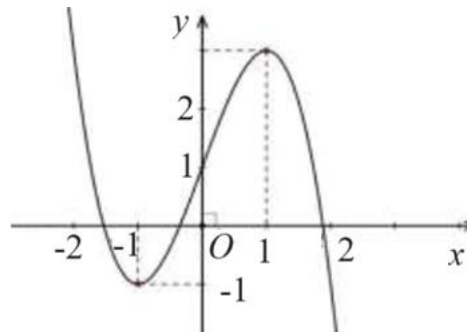
C. 0 .

D. 2 .

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4 .

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại

A. $x = 3$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 6: Trên đoạn $[-2; 1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm.

A. $x = -2$.

B. $x = 0$.

C. $x = -1$.

D. $x = 1$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có $y(-2) = -21$; $y(0) = -1$; $y(1) = -3$

Vậy hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 0$ với $y(0) = -1$.

Câu 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

A. $\min_{[2;4]} y = 6$

B. $\min_{[2;4]} y = -2$

C. $\min_{[2;4]} y = -3$

D. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hàm số liên tục trên $[2; 4]$

Ta có: $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2; 4] \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có $y(2) = 7$; $y(3) = 6$; $y(4) = \frac{19}{3}$

Vậy $\min_{[2; 4]} y = 6$.

Câu 8: Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-1; 5]$ có bảng biến thiên như sau

x	-1	0	2	5			
y'		+	0	-	0	+	
y	3	4	0	$+\infty$			

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$.
- B.** Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.
- C.** Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1; 5]$.
- D.** Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$.

Lời giải

- A. Đúng.** Vì $\lim_{x \rightarrow 5^-} y = +\infty$ nên hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$.
- B. Sai.** Vì hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.
- C. Sai.** Vì hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$ và $\lim_{x \rightarrow 5^-} y = +\infty$.
- D. Sai.**

Câu 9: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x + 1}{x - 1}$ là:

- A.** $y = \frac{1}{3}$.
- B.** $y = 3$.
- C.** $y = -1$.
- D.** $y = 1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 10: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-2}{x+1} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 11: Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ là

A. $y = 1$.

B. $y = 2$.

C. $y = -1$.

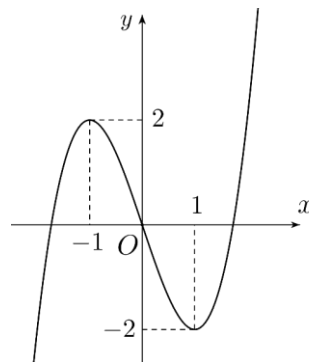
D. $y = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x - 3}{x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \frac{3}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}} = -1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $y = -1$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



$y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau

A. $y = -x^3 + x$.

B. $y = x^3 - 3x$.

C. $y = x^4 - 2x^2$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số đã cho có dạng hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$ nên chọn $y = x^3 - 3x$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

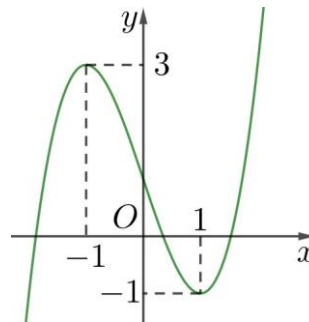
- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.
- d) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -4$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- d) Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $y = -4$.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ sau



Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là 2.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị trái dấu.
- d) Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $d : y = -3x$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- b) Giá trị cực đại là $y = 3$, giá trị cực tiểu là $y = -1$. Do đó tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là $3 - 1 = 2$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị là $x = \pm 1$.
- d) Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng qua hai điểm cực trị $A(-1; 3), B(1; -1)$.

$$A, B \in d \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d: y = -2x + 1$$

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$, với m là tham số

- a) Với mọi m hàm số luôn có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 2.
- c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq -1$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $y' = x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m$. Do $\Delta' = b'^2 - ac = (m+1)^2 - (m^2 + 2m) = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt

Nên hàm số luôn có hai điểm cực trị.

b) Đúng: Ta có $y' = x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m$. Do $\Delta' = b'^2 - ac = (m+1)^2 - (m^2 + 2m) = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -m$ và $x_2 = -m - 2$.

x	$-\infty$	$-m-2$		$-m$	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y			$y(-m-2)$		$y(-m)$	
	$-\infty$					$+\infty$

Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-m-2; -m)$.

Ta có: $-m - (-m - 2) = 2$

c) Đúng: Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-m-2$		$-m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$y(-m-2)$		$y(-m)$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Sai: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-m-2$	$-m$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$y(-m-2)$	$y(-m)$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m-2 \leq -1 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1 - 5m}{x - m}$

a) Hàm số xác định với mọi x .

b) Có 2019 giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1 - 5m}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

c) $m=0$ thì hàm số có hai cực trị.

d) Nếu đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì hai điểm cực trị đó luôn nằm trên đường thẳng cố định.

Lời giải

a) Sai. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

b) Đúng Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$ và có $y' = \frac{2x^2 - 4mx + 3m + 1}{(x - m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;5)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{2x^2 - 4mx + 3m + 1}{(x - m)^2} \leq 0 \forall x \in (1;5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4mx + 3m + 1 \leq 0 \forall x \in (1;5) \\ m \notin (1;5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+3 \leq 0 \\ -17m+51 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5$$

$$\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 5 \end{cases}$$

Do nguyên dương bé hơn 2024 nên $5 \leq m \leq 2023$. Vậy có tất cả 2019 giá trị.

c) Sai. Với $m=0$ thì $y' = \frac{2x^2+1}{x^2} > 0 \forall x \neq 0$

Vậy hàm số không có cực trị với $m=0$.

d) Đúng. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi đó hai điểm cực trị hàm số luôn nằm trên đường thẳng $y=4x+2$

Chú ý:

Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị

tương ứng của hàm số là $y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình

đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = \frac{(2x^2+2x-1-5m)'}{(x-m)'} = 4x+2$.

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

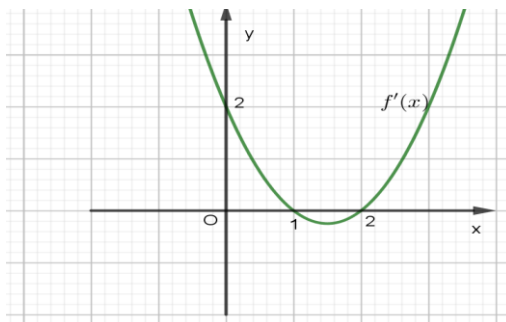
Ta có: $y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'		+	0	-	- 0 +

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2 - x^2)$.

Lời giải

Ta có $y = f(2 - x^2)$, suy ra $y' = -2xf'(2 - x^2)$.

$$\text{Xét } y' = -2xf'(2 - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < 2 - x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1, x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < -1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 3. Hằng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm t (h) ($0 \leq t \leq 24$) trong ngày được xác định bởi công thức $h = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$. Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của $a + b$.

Lời giải

$$\text{Ta có } h(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5 \Rightarrow h'(t) = -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = -4 + 12k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Mà } 0 \leq t \leq 24 \text{ nên } 0 \leq -4 + 12k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{7}{3} \Rightarrow k \in \{1; 2\}.$$

$$\text{Do đó } h'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = 20 \end{cases}$$

t	0	8	20	24			
$h'(t)$		-	0	+	0	-	
$h(t)$	6		3		7		6

$\Rightarrow h(t)$ đồng biến trên khoảng $(8; 20)$ hay trong khoảng từ 8h đến 20h độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần.

Vậy $a = 8; b = 20$ và $a + b = 28$.

Câu 4. Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: $x = 52$.

Xét hàm số:

$$f(x) = TR - TC = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000).$$

$$f(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000.$$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52(N) \\ x = -2(L) \end{cases}$$

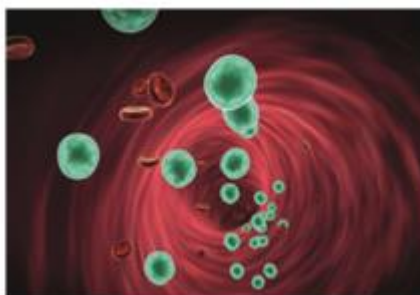
Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	-4000	74416	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD} = 74416$ tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x = 52$.

Câu 5. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút được xác định bởi công thức: $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$.



Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm ?

Lời giải

Trả lời: $10,6 \text{ (mg / l)}$.

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $x \in (0; 6)$.

Ta có: $y' = \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2}$.

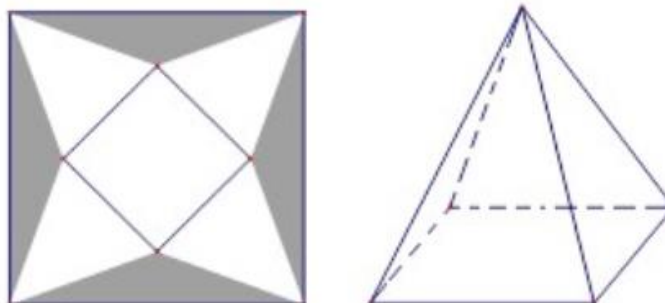
$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ do } x \in (0; 6) \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{2}$	6	
y'		+	0	-
y	0	$\frac{15\sqrt{2}}{2}$	$\frac{90}{19}$	

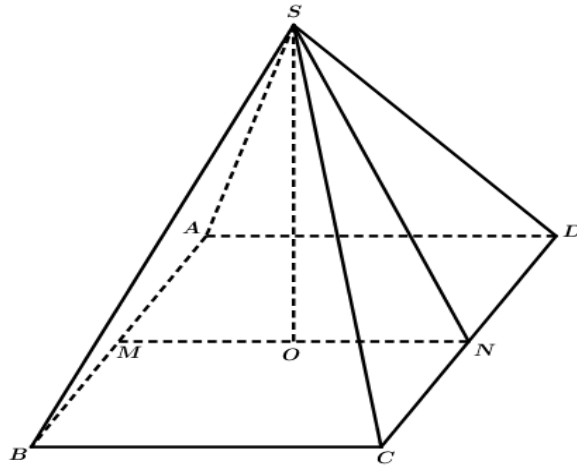
Từ bảng biến thiên suy ra: nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là $\frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ (mg / l)} \approx 10,6 \text{ (mg / l)}$ trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

Câu 6. Một tấm bạt hình vuông cạnh $20m$ như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại, nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

Lời giải



Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là $x(m)$.

Độ dài đường chéo tấm bạt bằng $20\sqrt{2}(m)$.

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD .

Khi đó $MN = x(m)$, $SN = \frac{20\sqrt{2} - x}{2}(m)$ với $0 < x < 10\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông, ta có

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{6}x^2\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

$$\text{Ta có } V' = \frac{20x(80 - 5\sqrt{2}x)}{6\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}}$$

$$\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2} \text{ với } 0 < x < 10\sqrt{2}.$$

Xét bảng biến thiên:

x	0	$8\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$				

Vậy khi $x = 8\sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp lớn nhất $V = \frac{256\sqrt{10}}{3}(m^3)$.

Diện tích phần bị cắt của tấm bạt:

$$S = S_{hv} - S_{ABCD} - 4.S_{\Delta SAB} = 20^2 - (8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 80(m^2).$$