

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

*. Đề kiểm tra rèn luyện

♦ Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x) > 5 \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) \geq 5 \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists x_0, f(x_0) = 5$.

C. $f(x) < 5 \forall x \in \mathbb{R}$. D. $f(x) \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists x_0, f(x_0) = 5$.

Lời giải

Ta có định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[0; 3]$ như sau:

x	0	1	3
y	-3	-4	0

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

A. 4.

B. 1.

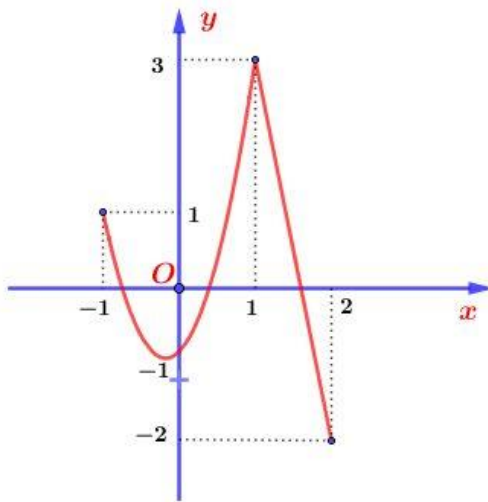
C. 0.

D. -4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là -4 đạt khi $x = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. 3.

B. -1.

C. 1.

D. 2

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là 3.

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y		5		4	
	0		1		

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khi đó giá trị của $M - m$ là

A. $M - m = 5$.

B. $M - m = 4$.

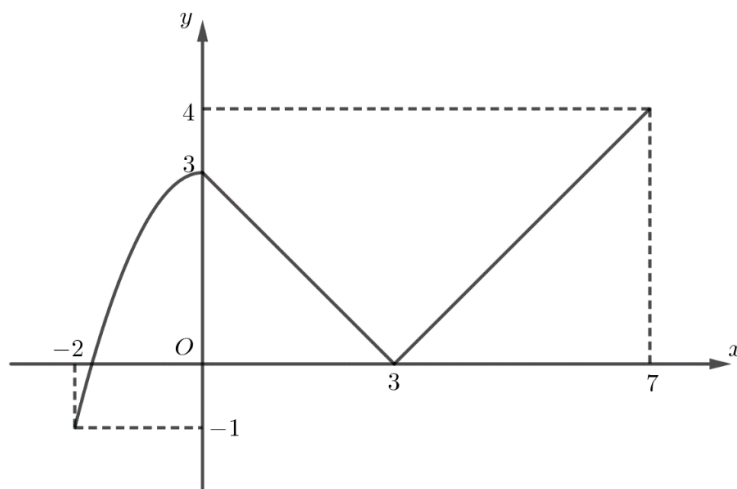
C. $M - m = 6$.

D. $M - m = 3$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = 5; m = 0 \Rightarrow M - m = 5$.

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình là



A. 3.

B. 7.

C. -1.

D. 4.

Lời giải

Dựa vào đồ thị giá trị lớn nhất của hàm số là 4 khi $x = 7$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	2		6		
		1		2	

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-\infty; -2)$ là 1.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-\infty; \frac{1}{2})$ là 6.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trong khoảng $(-2; \frac{1}{2})$ là 1.

D. Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-2; +\infty)$

Câu 7: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ là

A. 1.

B. 0.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}. \text{Loại } x = -2 \text{ vì không thuộc đoạn } [0; 2].$$

$$y(0) = 0; y(2) = \frac{4}{3}. \text{Do đó GTLN của hàm số trên đoạn } [0; 2] \text{ là } \frac{4}{3} \text{ đạt được tại } x = 2.$$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ trên tập xác định là

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = [-1; +\infty)$$

Ta có $\sqrt{x+1} \geq 0, \forall x \in [-1; +\infty)$ nên GTNN của hàm số đã cho là 0, đạt được khi $x = -1$.

Câu 9: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin 2x + 2$ trên tập xác định là

A. 4.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

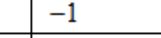
Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên suy ra $1 \leq \sin 2x + 2 \leq 3$. Do đó $y_{\max} = 3; y_{\min} = 1$ nên

$$y_{\max} + y_{\min} = 3 + 1 = 4.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0			5	1	4

A. $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3)$. **C.** $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(2)$. **D.**

$\max_{[-1; 3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(0)$.

Câu 11: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x-3)e^{2x}$.

A. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -\frac{e^5}{2}$. **B.** $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{e^5}{2}$. **C.** $\min_{\mathbb{R}} f(x) = e^5$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = (2x-5)e^{2x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	0	$-\frac{e^5}{2}$	$+\infty$

$$\text{Vậy } \min_{\square} f(x) = -\frac{e^5}{2}.$$

Câu 12: Gọi giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên nửa khoảng $[1; e^2)$ lần lượt là m và M . Giá trị của biểu thức $\ln(m+M)$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. e .

D. e^{-1} .

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[1; e^2)$:

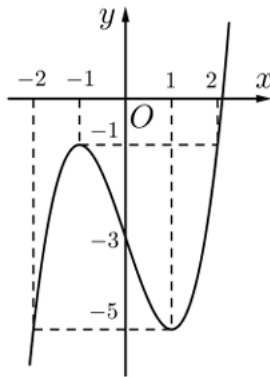
x	1	e	e^2
y'	$+$	0	$-$
y	0	$\frac{1}{e}$	$\frac{2}{e^2}$

$$\text{Vậy } m = \min_{[1; e^2)} f(x) = 0; M = \max_{[1; e^2)} f(x) = \frac{1}{e}.$$

$$\Rightarrow \ln(m+M) = \ln \frac{1}{e} = -1.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên:



- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ là -1 .
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; +\infty)$ là -5 .
- c) Hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-\infty; 1]$ là 2 .
- d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ tại điểm $x = 1$.

Lời giải

a. Đ	b. Đ	c. S	d. Đ
------	------	------	------

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$.

- a) Khi $m = 0$, ta có $\min_{(0; +\infty)} y = -2$.
- b) Hàm số đã cho luôn có 2 cực trị.
- c) Với mọi giá trị của m , ta luôn có $\min_{(-m; +\infty)} y - \max_{(-\infty; -m)} y = 4$.
- d) Khi $m = -3$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 1 .

Lời giải

a. S	b. Đ	c. Đ	d. Đ
------	------	------	------

- a) Khi $m = 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng 2 .

Thay $m = 0$ vào $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$, ta có $y = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$.

x	0	1	$-\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	2	$+\infty$

b) Ta có $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$.

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 1; (x \neq -m) \\ x = -m + 1; (x \neq -m) \end{cases}$$

$\Rightarrow y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x \neq -m, \forall m$. Vậy hàm số luôn có 2 cực trị.

c) $+ y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 1 \\ x = -m + 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-m-1$	$-m$	$-m+1$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$-2-m$	$-\infty$	$2-m$	$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(-\infty; -m)} y = -2 - m$; $\min_{(-m; +\infty)} y = 2 - m \Rightarrow \min_{(-m; +\infty)} y - \max_{(-\infty; -m)} y = 4$.

d) Khi $m = -3$ thay vào $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$, ta có $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$.

+ Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$ là hàm phân thức hữu tỉ, liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Mặt khác $[-1; 2] \subset (-\infty; 3) \Rightarrow$ hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

+ Ta có $y' = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2} > 0 \forall x \in (-1; 2)$ và $y(2) = 1$.

Vì hàm số tăng trên $(-1; 2)$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất $\max_{[-1; 2]} y = y(2) = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;5)$ là 150.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là 150.

Lời giải

$$f'(x) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Bảng biến thiên.

x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	150	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ là 150 khi $x = 5$.

a) đúng.

b) sai.

c) sai.

d) đúng.

Câu 4: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000.

a) Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37000 (đồng) thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 (triệu đồng).

b) Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng.

Lời giải

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Vậy:

a) sai.

b) đúng.

c) sai.

d) đúng.

➡ **Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn.** *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ là

Lời giải

Trả lời: 3

Hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Đặt $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Khi đó $f(1) = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}$, $f(2) = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3$.

Câu 2: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ là... (làm tròn đến hàng trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,37

- Hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$

Ta có: $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Khi đó, trên khoảng $(1; 4)$, $g'(x) = 0$ khi $x = e$.

$g(1) = 0$, $g(e) = \frac{1}{e}$, $g(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$.

Vậy $\max_{[1; 4]} g(x) = \frac{1}{e}$, $\min_{[1; 4]} g(x) = 0 \Rightarrow \max_{[1; 4]} g(x) + \min_{[1; 4]} g(x) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là ...

Lời giải

Trả lời: 1,125

Hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ liên tục trên $[0; \pi]$

$$f(x) = \sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x$$

Đặt $\sin x = t$. Vì $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [0; 1]$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(t) = -2t^2 + t + 1$ trên $[0; 1]$

Hàm số $h(t) = -2t^2 + t + 1$ liên tục trên $[0; 1]$

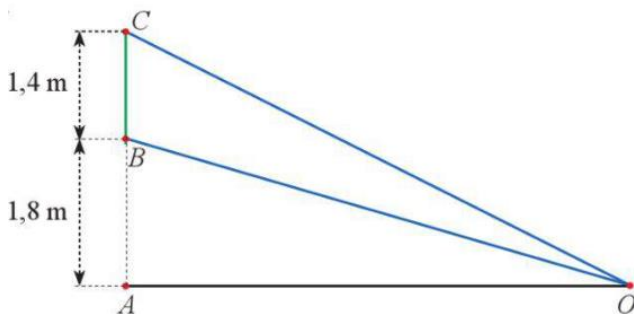
$$h(t) = -2t^2 + t + 1, h'(t) = -4t + 1$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$h(0) = 1, h(1) = 0, h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;1]} h(t) = \frac{9}{8}.$$

Câu 4: Một màn hình BC có chiều cao $1,4m$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,8m$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Hãy xác định khoảng cách AO sao cho góc quan sát BOC là lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 2,4.

Đặt $OA = x$ (m) với $x > 0$

$$\text{Ta có: } \tan BOC = \tan(AOC - AOB) = \frac{\tan AOC - \tan AOB}{1 + \tan AOC \cdot \tan AOB}$$

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{3,2}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Để góc quan sát BOC lớn nhất thì $\tan BOC$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$ với $x > 0$.

Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thì ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2,4$.

Vậy $AO = 2,4 \text{ m}$ thì góc quan sát BOC lớn nhất.

Câu 5: Một ông nông dân có 240 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là

Lời giải

Trả lời: 7200

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 240$ ($0 < x < 120; 0 < y < 240$)

Suy ra $y = 240 - 2x$

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là:

$$S = xy = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2, 0 < x < 120.$$

$$S' = 240 - 4x; S' = 0 \Leftrightarrow x = 60 \in (0; 120)$$

Bảng biến thiên

x	0	60	120
S'	+	0	-
S	0	7200	26400

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{(0;120)} S = 7200 \Leftrightarrow x = 60$

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là 7200 m^2 .

Câu 6: Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đậy thể tích 10 m^3 . Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là. (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 2,34

Gọi bán kính đáy của hình trụ là $R, R > 0$. Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi R^2}.$$

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{10}{R} \right).$$

$$C' = 600 \left(2\pi R - \frac{10}{R^2} \right); C' = 0 \Leftrightarrow 2\pi R - \frac{10}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$	$+\infty$
C'		— 0 +	
C	$+\infty$	$1800\sqrt[3]{25\pi}$	$+\infty$

Dẫn đến

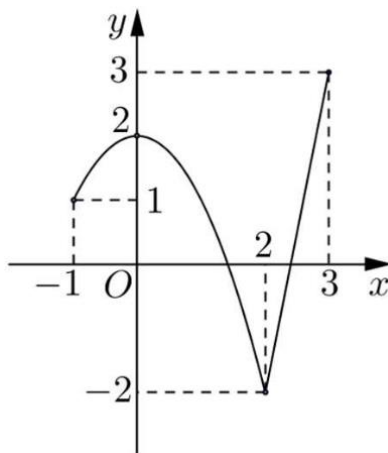
$$\min_{(0;+\infty)} C = 1800\sqrt[3]{25\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}.$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h = \frac{10}{\sqrt[3]{25\pi}} \approx 2,34m$.

♦ **Đề 2:**

▣ **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$ bằng



A. 3.

B. 1.

C. -2.

D. 2.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $\max_{[-1;2]} y = 2$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1;2]$. Giá trị của $M + m$ bằng bao nhiêu?

x	-3	-1	0	1	2	
$f'(x)$		+	0	-	0	-
$f(x)$			3		2	
	-2			0		1

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Ta có $M = \max_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = 3$ và $m = \min_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$.

Vậy $M + m = 3$.

Câu 3: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2;4]$. Khi đó:

A. $m = 6$.

B. $m = -2$.

C. $m = -3$.

D. $m = \frac{19}{3}$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ liên tục trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $y'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (2;4) \\ x = 3 \in (2;4) \end{cases}$

Tính $y'(2) = 7$; $y'(4) = \frac{19}{3}$; $y'(3) = 6$.

Suy ra $m = 6$.

Sử dụng Casio

Nhập MODE 7. $f(X) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

Start? 2 End? 4 Step? $\frac{1}{9}$. Kết luận.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\frac{9}{4}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

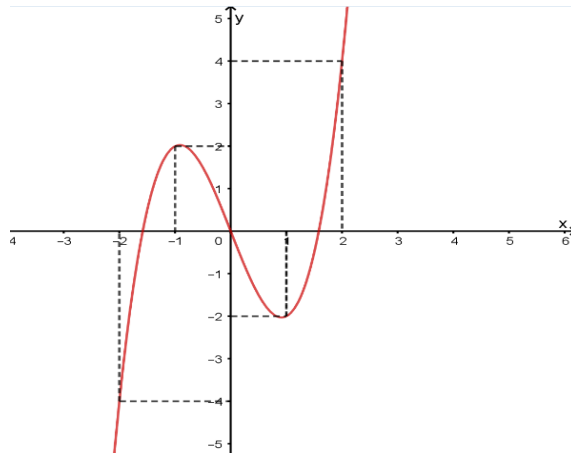
$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0; f(2) = -2; f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\frac{9}{4}$ khi $x = \frac{3}{2}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau:



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\min_{[-2; 2]} f(x) = -4.$

B. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 1.$

C. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 2.$

D. $\min_{[-2; 2]} f(x) = -2.$

Lời giải

Quan sát đồ thị trên đoạn $[-2; 2]$, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ là -4 .

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy trên đoạn $[0; 2]$ giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng 3.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{40}x^2(30 - x)$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

A. 20.

B. 24.

C. 25.

D. 30.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = -\frac{1}{40}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

$$f'(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 20(n) \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

x	0	2	$+\infty$
y'		0	-
y		25	

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 25 khi $x = 20$

Câu 8: Cho hàm số $y = 2^x - 4x \ln 2$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ có dạng $a - b \ln c$.

Tính $a + b + c$?

A. -2.

B. 14.

C. 34.

D. 0.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2^x \ln 2 - 4 \ln 2$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 4 \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	0	2	4
y'	-	0	+
y	1	$4 - 8 \ln 2$	$16 - 16 \ln 2$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ bằng $4 - 8 \ln 2$ tại $x = 2$.

Khi đó: $a + b + c = 4 + 8 + 2 = 14$.

Câu 9: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$. Giá

trị của $M - m$ là:

A. $e - \ln 2 - \frac{1}{2}$.

B. $e - 1$.

C. $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

D. $e - 2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = (0; +\infty)$

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; e\right]$

Xét $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(1) = 1$, $y(e) = e - 1$

Do đó $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$ và $M = \max_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$

Suy ra $M - m = e - 1 - 1 = e - 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số có GTLN là 2.

B. Hàm số có GTNN là 0.

C. Hàm số đạt GTLN tại $x = 2$.

D. Hàm số đạt GTNN tại $x = \pm 2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [-2; 2]$.

Ta có:

$$+ y' = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$+ y(0) = 2; y(\pm 2) = 0.$$

Vậy $\max_D y = y(0) = 2$; $\min y = y(\pm 2) = 0$. Vậy khẳng định C là **sai**.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$, xét trên khoảng $(0; +\infty)$ giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng

A. 0.

B. -3.

C. 4.

D. -4.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$ luôn xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$$

BBT của hàm số $y = f(x) = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

x	0	1	$+\infty$
y'		-	0
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = y(1) = -3$.

Câu 12: Để hàm số $y = -x^4 + 6x^2 + m$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-1; 1]$ bằng 5 thì giá trị của tham số m bằng

A. 0.

B. 5.

C. -5.

D. 1.

Lời giải

Ta có:

$$+ y' = -4x^3 + 12x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = \sqrt{3} \notin [-1; 1] \\ x = -\sqrt{3} \notin [-1; 1] \end{cases};$$

$$+ y(0) = m; y(\pm 1) = m + 5;$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 1]} y = y(\pm 1) = m + 5 = 5 \Leftrightarrow m = 0.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $f'(x) = 0 \hat{=} x = 5$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; 5)$ là 150.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là 150.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$f'(x) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2}, f'(x) = 0 \hat{=} 4x^3 - 500 = 0 \hat{=} x = 5.$$

Bảng biến thiên.

x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	150	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ là 150 khi $x = 5$.

Câu 2: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000.

- a) Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37000 (đồng) thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 (triệu đồng).
- b) Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.
- c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.
- d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			5		2		3	
	$-\infty$							$-\infty$

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5.$		
b)	$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2.$		

c)	Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$ là 7		
d)	$\max_{x \in [0; \frac{\pi}{2}]} f(\sin x) = 5.$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

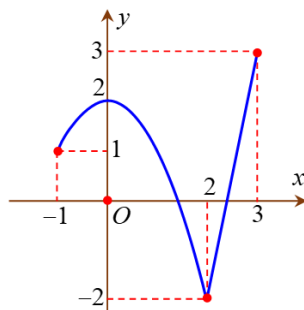
a) Trên $\square$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.

b) Trên $\square$, hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

c) Trên $[-1;1]$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5, giá trị nhỏ nhất bằng 2. Do đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1;1]$ là 7

d) Ta có: $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]: \sin x \in [0;1] \longrightarrow \max_{x \in [0; \frac{\pi}{2}]} f(\sin x) = 3.$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$\max_{x \in [-1;3]} f(x) = f(3).$		
b)	$\min_{x \in [-1;3]} f(x) = -2.$		
c)	Tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$ là $[-2;3]$		
d)	$\max_{x \in \square} f(3\sin^2 x - 1) = 2.$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Ta có: $\max_{x \in [-1;3]} f(x) = 3 = f(3).$

b) Ta có: $\min_{x \in [-1;3]} f(x) = -2.$

c) Trên đoạn $[-1;2]$, giá trị lớn nhất của hàm số là 2, giá trị nhỏ nhất là -2 . Do đó tập giá trị của hàm số $f(x)$ trên $[-1;2]$ là $[-2;2]$

d) Đặt $t = 3\sin^2 x - 1 \Rightarrow t \in [-1;2].$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên $[-1; 2]$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{[-1; 2]} y = \max_{[-1; 2]} f(t) = 2$.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Người ta muốn sản xuất một bể nước theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính và có thể tích là $16m^3$. Biết giá của mỗi mét vuông kính là 500 000 đồng. Tìm số tiền tối thiểu phải trả để làm bể nước trên (triệu đồng).

Lời giải

Trả lời: 15

Gọi cạnh đáy của bể nước có độ dài là $x(m)$ và chiều cao của bể nước là $h(m)$. Điều kiện $x, h > 0$.

Khi đó thể tích của bể nước là $16m^3$ nên $x^2 h = 16 \Leftrightarrow h = \frac{16}{x^2}$.

Diện tích cần để xây bể nước (bao gồm diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy) là

$$S = 4xh + x^2 = 4x \cdot \frac{16}{x^2} + x^2 = \frac{64}{x} + x^2.$$

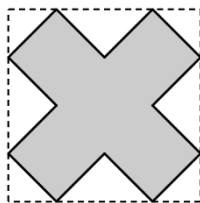
Để tìm số tiền tối thiểu, ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $y = S(x)$ với $x > 0$.

Ta có $S'(x) = -\frac{64}{x^2} + 2x$. Cho $S'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32}$.

Lập bảng biến thiên, ta dễ thấy $\min_{(0; +\infty)} S(x) = S(\sqrt[3]{32})$.

Vậy số tiền tối thiểu phải trả là $500\,000 \cdot S(\sqrt[3]{32}) \approx 15$ (triệu đồng).

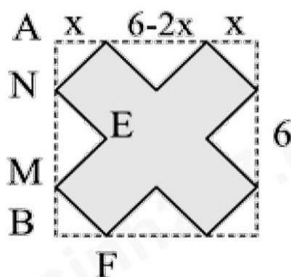
Câu 2: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gập thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng



Lời giải

Trả lời: 11,3

Gọi cạnh hình tam giác cân bị cắt bỏ có độ dài x ($0 < x < 3$)



$$\Rightarrow AN = BM = x \Rightarrow MN = 6 - 2x$$

$$\Rightarrow EM = EN = \frac{6-2x}{\sqrt{2}}$$

Hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh $MF = x\sqrt{2}$,

$$\text{Có chiều cao } EN = \frac{6-2x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = MF^2 \cdot EN = 2x^2 \cdot \frac{6-2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^2(6-2x) = -2\sqrt{2}x^3 + 6\sqrt{2}x^2$$

$$\Rightarrow V' = -6\sqrt{2}x^2 + 12\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(2) = -2\sqrt{2} \cdot 2^3 + 6\sqrt{2} \cdot 2^2 = 8\sqrt{2}$$

Câu 3: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 350 nghìn đồng/ m^2 . Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).

Lời giải

Trả lời: 59.

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x(m)$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x$

. Gọi h là chiều cao của bể ta có $V = Sh = 2x^2 \cdot h = 200 \Rightarrow h = \frac{100}{x^2}$.

Diện tích của bể là $S = 2h \cdot x + 2 \cdot 2hx + 2x^2 = 2x^2 + 6hx = 2x^2 + 6 \cdot \frac{100}{x^2} \cdot x = 2x^2 + \frac{600}{x}$

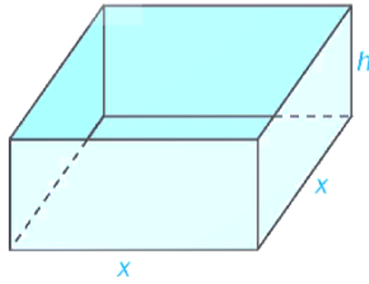
$$S' = 4x - \frac{600}{x^2}$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{600}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}.$$

x	0	$\sqrt[3]{150}$	$+\infty$
S'		0	
		-	+
S		$S(\sqrt[3]{150})$	

Suy ra chi phí thấp nhất để xây bể là $S(\sqrt[3]{150}) \cdot 350000 \approx 59$ triệu đồng.

Câu 4: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao $h(cm)$ và diện tích bề mặt bằng $108cm^2$ như hình dưới đây. Tìm chiều cao $h(cm)$ sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 3.

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(\text{cm}, x > 0)$ và chiều cao là $h(\text{cm}, h > 0)$.

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108cm^2 nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$.

Thể tích của hình hộp là $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4}$

$$V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

x	0	6	$+\infty$
V'		0	
		+	-
V	0	108	$-\infty$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6(\text{cm})$.

Khi đó, chiều cao của hình hộp là $h = \frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3(\text{cm})$.

Câu 5: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng 100m^2 để làm khu vườn. Để chi phí xây dựng bờ rào xung quanh khu vườn là ít tốn kém nhất thì ông A đã mua mảnh đất có kích thước $a(\text{m}) \times b(\text{m})$ (với a là chiều dài, b là chiều rộng của khu vườn). Khi đó kết quả của $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 30.

Để chi phí xây dựng bờ rào là ít tốn kém nhất thì chu vi mảnh đất phải bé nhất.

Gọi x là chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ($x > 0$)

Suy ra chiều rộng là $\frac{100}{x}$

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là $C(x) = 2x + \frac{200}{x}$

Ta có: $C'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$

$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ (vì $x > 0$)

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$
$C'(x)$	-	0	+
$C(x)$	$+\infty$	40	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{(0;+\infty)} C(x) = C(10) = 40$

Suy ra chu vi mảnh đất hình chữ nhật bé nhất khi chiều dài bằng $10m$, chiều rộng bằng $10m$

Vậy $a + 2b = 30$.

Câu 6: Một doanh nghiệp tư nhân chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 30 triệu đồng và bán ra với giá 35 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 400 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe X đang bán, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 100 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 34,5.

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $x \in [30; 35]$.

Khi đó số xe bán ra là $400 + (35 - x)100$.

Lợi nhuận thu được là

$$\begin{aligned} f(x) &= [400 + (35 - x)100] \cdot (x - 30) \\ &= -100x^2 + 6900x - 117000 \\ &= -100 \left(x - \frac{69}{2} \right)^2 + 2025 \leq 2025 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{69}{2}$.

Vậy giá bán mới là 34,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất.

♦ **Đề 3:**

☛ **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x+3)(-x+3)$ bằng

A. 0.

B. -9.

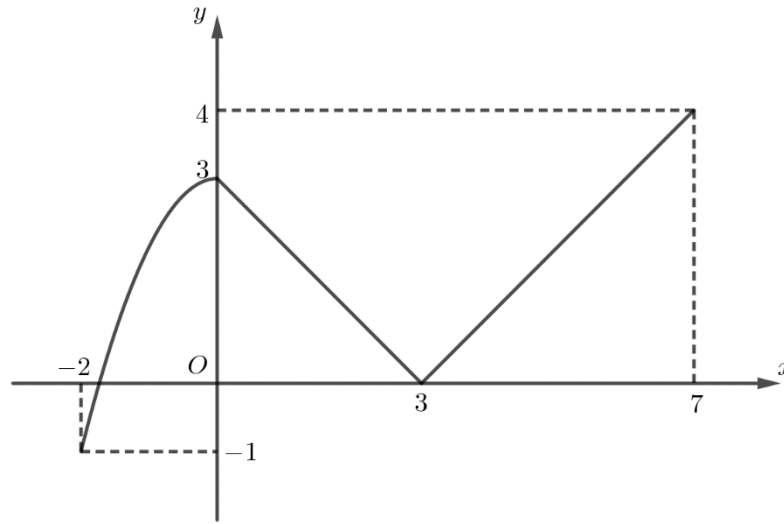
C. 9.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $y = -x^2 + 9 \leq 9; \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất là 9.

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \begin{cases} -x^2 + 3, & -2 \leq x \leq 0 \\ 3 - x, & 0 < x \leq 3 \\ x - 3, & 3 < x \leq 7 \end{cases}$ có đồ thị như hình là



A. 3.

B. 7.

C. -1.

D. 4.

Lời giải

Dựa vào đồ thị giá trị lớn nhất của hàm số là 4 khi $x = 7$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	-1	0	2	3			
y'		+	0	-	0	+	
y			5		1		4
	0						

A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.

C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$.

D.

$\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} (l)$$

$$y(2) = \frac{13}{2}, y(4) = \frac{25}{4}, y(3) = 6.$$

$$\text{Vậy } \min_{[2;4]} y = 6.$$

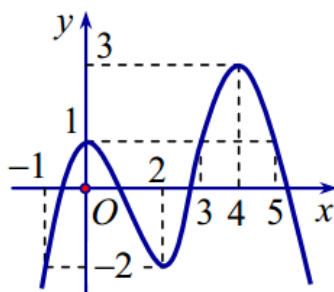
Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 1.

B. 6.

C. 5.

D. 4.



Lời giải

Dựa vào hình vẽ, ta có $M = 3; m = -2 \Rightarrow M - m = 5$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-4;5]$, có bảng biến thiên

x	-4	-2	4	5	
y'	+	0	-	0	+
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{46}{3}$	$-\frac{62}{3}$	$-\frac{52}{3}$	

Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-4;5]$. Tính $M + N$?

A. $-\frac{16}{3}$.

B. $-\frac{50}{3}$.

C. 2.

D. -20.

Lời giải

$$\text{Ta có } M + N = \frac{46}{3} - \frac{62}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Câu 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

A. 2..

B. -3.

C. -2..

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $x \neq -1$

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[0; 2] \Rightarrow \min_{[0; 2]} y = y(0) = -2.$

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ trên nửa khoảng $(0; +\infty)$

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. 4.

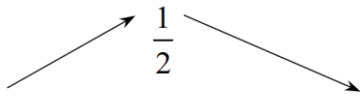
Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

t		0	1	$+\infty$
$c'(t)$		+	0	-
$c(t)$				

Vậy giá trị lớn nhất là $\frac{1}{2}$ khi $x = 1.$

Câu 11: Cho hàm số $y = 3\sin 2025x + 5$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

- A. 6080. B. 8. C. 5. D. 2.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Có } -1 \leq \sin 2025x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin 2025x \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 3\sin 2025x + 5 \leq 8$$

$$\text{Suy ra: } \max_{\mathbb{R}} y = 8 \Leftrightarrow \sin 2025x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4050} + \frac{k2\pi}{2025}.$$

Câu 12: Hàm số $y = \frac{x - m^2}{x + 1}$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng -4 khi

- A. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

Ta có: $y' = \frac{1+m^2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$. Suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Suy ra hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$. Do đó, ta có:

$$\min_{[0;1]} y = -4 \Leftrightarrow y(0) = -4 \Leftrightarrow -m^2 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là $f(-1)$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là $f(3)$.

c) [Giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = f(2x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là $f(-1)$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - 3x^2 + 6x - 5$ trên $[0;2]$ là $f(0) - 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

Vì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;2]$ nên giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ là $f(-1) \Rightarrow$ a) Đúng.

b) Sai.

Căn cứ BXD ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là $f(2) \Rightarrow$ b) Sai.

c) Sai.

$$\text{Ta có } h'(x) = 2f'(2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

BBT của hàm số $h(x) = f(2x)$ là

x		$-\frac{1}{2}$		1	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$					

vậy giá trị lớn nhất của hàm số $h(x) = f(2x)$ trên đoạn $[-1;1]$ là $f(-\frac{1}{2}) \Rightarrow$ c) Sai.

d) Đúng.

Ta có

$$g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x) - 6x+6 = (2x-2)[f'(x^2-2x)-3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)-3=0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x \in [0;2] \Rightarrow x^2-2x \in [-1;0]$$

$$\text{Trên } [-1;0], f'(x^2-2x) \leq 0 \Rightarrow f'(x^2-2x)-3 < 0$$

$$\text{Do đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	0		1		2
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$					

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $g(1) = f(-1) - 2$ tại $x=1 \Rightarrow$ d) Đúng

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có ba điểm cực trị		
b)	$\min_{x \in (-\infty; 2)} f(x) = f(0)$.		
c)	$\max_{x \in [0; 4]} f(x) = f(3)$.		
d)	$\max f(e^x + e^{-x}) = f(3)$.		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

$$\text{Ta có } f'(x) = -x(x-2)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$					$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ là $f(3)$.

d) Ta có: $e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2 \longrightarrow \max f(e^x + e^{-x}) = f(3)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$

a) Hàm số có giá trị lớn nhất trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;0]$.

c) Trên đoạn $[-1;0]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = 2^{f(x)} + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[3;4]$ bằng -3 . Khi đó $m_0 \in (-5;0)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) SAI

Hàm số có tập xác định $D = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) ĐÚNG

Vì $[-1;0] \subset D$ và hàm số liên tục trên $[-1;0]$ nên luôn tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn này.

c) ĐÚNG

$$f(x) = \log_2(x^2 - 3x + 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x-3}{(x^2 - 3x + 2)\ln 2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \notin [-1;0].$$

$$f(-1) = \log_2 6$$

$$f(0) = 1 < \log_2 6$$

Vậy $\min_{[-1;0]} f(x) = 1$.

d) Sai

TXĐ $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ chứa $[3; 4]$.

$$g(x) = 2^{f(x)} + m = 2^{\log_2(x^2 - 3x + 2)} + m = x^2 - 3x + 2 + m.$$

Có $g'(x) = 2x - 3$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin [3; 4]$. Mà hàm số đồng biến trên $[3; 4]$ nên

$$\min_{[0;1]} g(x) = g(3) = 2 + m.$$

Theo đề ta có $2 + m = -3 \Leftrightarrow m = -5$

Vậy $m_0 = -5 \in (-5; 0)$ là sai.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m^2 - 2$.

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -4 khi $m = 0$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(2x)$ trên đoạn $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ bằng -4 khi $m = 0$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-3; 0]$ bằng 1 khi $m = 1$.

d) Có 2024 giá trị của nguyên của $m \in (-2023; 2024)$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(1-3x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ nhỏ hơn 2 .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai

Khi $m = 0$ ta có $y = f(x) = x^3 - 3x - 2$ có $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			0		-4		

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0 .

b) Đúng

$$\text{Ta có } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 2x \in [-1; 1]$$

Đặt $t = 2x, t \in [-1;1], f(t) = t^3 - 3t - 2$

Theo câu a có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng -4 .

c) Đúng

$$x \in [-3;0] \Leftrightarrow x+1 \in [-2;1]$$

Đặt $t = x+1, t \in [-2;1]; f(t) = t^3 - 3t - 1$

$$f'(t) = 3t^2 - 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Ta có $f(-2) = -3; f(-1) = 1; f(1) = -3$ nên $\max_{[-3;0]} f(x+1) = 1$.

d) Sai

Đặt $t = 1 - 3x, x \in [-2;0] \Rightarrow t \in [1;7]$

$$f(t) = t^3 - 3t + m^2 - 2, f'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [1;7] \\ t = -1 \notin [1;7] \end{cases}$$

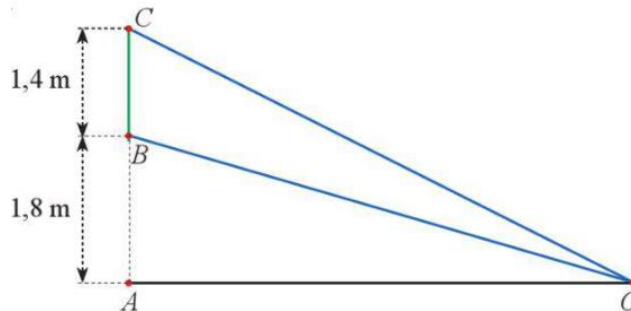
$$f(1) = m^2 - 4; f(7) = m^2 + 320$$

$$\min_{[-2;0]} h(x) < 2 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < m < \sqrt{6}$$

Do $m \in (-2023;2024), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Vậy có 5 giá trị thỏa mãn nên câu d sai

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Một màn hình BC có chiều cao $1,4m$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,8m$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Hãy xác định khoảng cách AO sao cho góc quan sát BOC là lớn nhất.



Lời giải

Đáp số: 2,4.

Đặt $OA = x (m)$ với $x > 0$

$$\text{Ta có: } \tan BOC = \tan(AOC - AOB) = \frac{\tan AOC - \tan AOB}{1 + \tan AOC \cdot \tan AOB}$$

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Để góc quan sát BOC lớn nhất thì $\tan BOC$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$ với $x > 0$.

Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thì ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2,4$.

Vậy $AO = 2,4$ m thì góc quan sát BOC lớn nhất.

Câu 2: Một ông nông dân có 240 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là.....

Lời giải

Đáp số: 7200

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 240$ ($0 < x < 120; 0 < y < 240$).

Suy ra $y = 240 - 2x$

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là:

$$S = xy = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2, 0 < x < 120.$$

$$S' = 240 - 4x; S' = 0 \Leftrightarrow x = 60 \in (0; 120)$$

Bảng biến thiên

x	0	60	120
S'	+	0	-
S	0	7200	26400

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{(0;120)} S = 7200 \Leftrightarrow x = 60$

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là 7200 m^2 .

Câu 3: Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đáy thể tích $10m^3$.

Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là..... (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 2,34

Gọi bán kính đáy của hình trụ là $R, R > 0$. Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi R^2}.$$

Suy ra chi phí (đơn vị ngàn đồng) làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{10}{R} \right).$$

$$C' = 600 \left(2\pi R - \frac{10}{R^2} \right); C' = 0 \Leftrightarrow 2\pi R - \frac{10}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$	$+\infty$
C'	—	0	+
C	$+\infty$	$1800\sqrt[3]{25\pi}$	$+\infty$

Dẫn đến

$$\min_{(0;+\infty)} C = 1800\sqrt[3]{25\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}.$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h = \frac{10}{\sqrt[3]{25\pi}} \approx 2,34m$.

Câu 4: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước $15cm \times 24cm$. Người ta cắt bỏ 4 góc của tấm tôn 4 miếng hình vuông bằng nhau rồi gò lại thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Để thể tích của hình hộp đó lớn nhất thì độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng

A. 3cm.

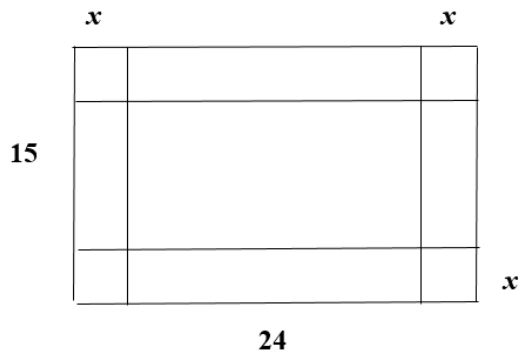
B. 4cm.

C. 5cm.

D. 2cm.

Lời giải

Chọn A



Giả sử độ dài cạnh hình vuông của các miếng tôn bị cắt bỏ bằng x ($0 < 2x < 15 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{15}{2}$). Khi đó hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng x , chiều rộng bằng $15 - 2x$ và chiều dài bằng $24 - 2x$. Suy ra hình hộp chữ nhật có thể tích $V = x(15 - 2x)(24 - 2x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$.

Xét hàm $f(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$ trên $\left(0; \frac{15}{2}\right)$.

$f'(x) = 12x^2 - 156x + 360 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 10 \end{cases}$. Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $\left(0; \frac{15}{2}\right)$:

x	0	3	$\frac{15}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $\left(0; \frac{15}{2}\right)$ tại $x = 3$ hay hình hộp

Câu 5: Gọi S là tập hợp chứa các tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với các trục tọa độ hình chữ nhật có diện tích bằng 4. Số phần tử của S là

Lời giải

Đáp án: 2.

Phương trình tiệm cận ngang là $y = m$

Phương trình tiệm cận đứng là $x = -m$

Theo đề bài ta có: $|m| \cdot |-m| = 4 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 6: Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0.$

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20(b+1) \\ \frac{15}{b+1} = 12. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$.

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng

không vượt quá 100 tế bào.