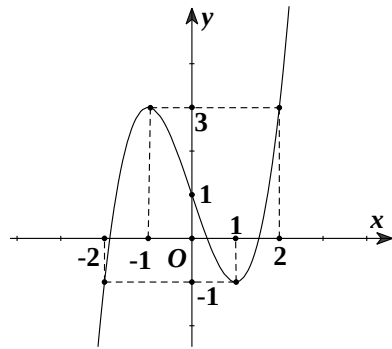


***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Đường cong cho trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



- A.** $y = -x^3 + 2x - 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **C.** $y = 2x^3 - 6x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x + 1$.

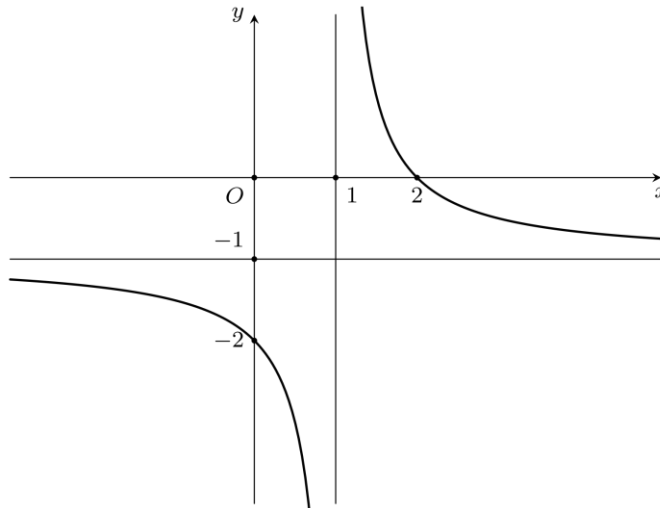
Lời giải

Giả sử đường cong hình bên là đồ thị của hàm số: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị hàm số ta thấy $a > 0$ nên loại A và B.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị: $(-1; 3)$ và $(1; -1)$ nên chọn D.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Trong các hệ số a , b , c có bao nhiêu số dương?



- A.** 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

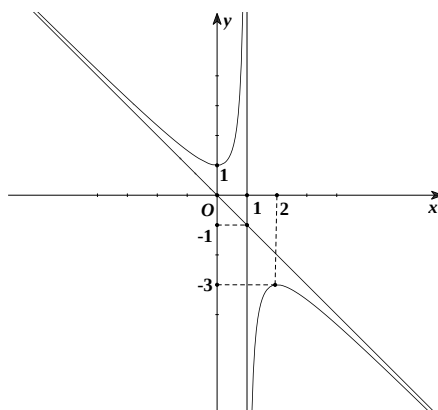
Tiệm cận đứng: $x = \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c} = -1 \Leftrightarrow a = -c \Rightarrow a = -1$

Đồ thị cắt trục hoành tại $x = 2$ nên $2a + b = 0$ hay $b = -2a = 2$.

Vậy có hai số dương.

Câu 3: Đường cong cho trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



A. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.

B. $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 1}$.

C. $y = \frac{x^2 - x + 1}{-x + 1}$.

D. $y = \frac{-x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Lời giải

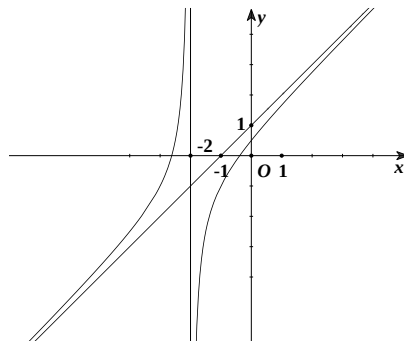
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ nên loại A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = -x$ nên loại B, D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; -3)$. Chọn đáp án C.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị biểu thức:

$$T = 2a + 3b - c.$$



A. 9.

B. 10.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -2$.

Suy ra $-\frac{2}{c} = -2 \Leftrightarrow c = 1$.

Đồ thị có tiệm cận xiên đi qua hai điểm: $(0;1)$ và $(-1;0)$ nên có phương trình:

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Khi đó ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + 1}{x(x+2)} = 1 \Leftrightarrow a = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + bx + 1}{x+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-2)x + 1}{x+2} = b - 2 = 1 \Leftrightarrow b = 3.$$

Vậy: $T = 2a + 3b - c = 2 + 9 - 1 = 10$. Chọn đáp án B.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		1	↘		$+\infty$
					-3	↗	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(-3; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số, ta có hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 6: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 4)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(0; 2)$

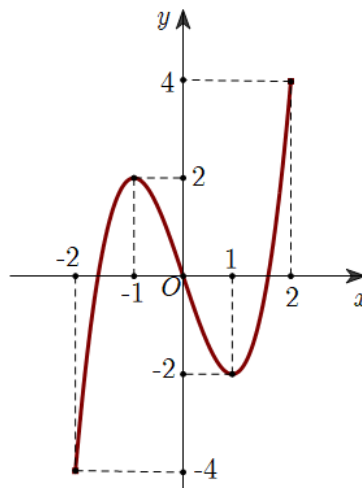
Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Hàm số đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau.



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

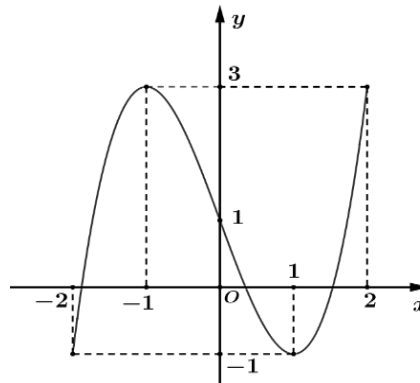
- A.** $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $M(1;-2)$. **D.** $M(-2;-4)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $M(1;-2)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

- A.** 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $\min_{[-2;2]} f(x) = f(1) = -1$. **Chọn đáp án B.**

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ trên đoạn $[2;4]$ là

- A.** 3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$$y' = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin [2;4].$$

$$\text{Ta có } y(2) = 3; \quad y(4) = 11.$$

Vậy $\min_{[2;4]} y = y(2) = 3$. **Chọn đáp án A.**

Câu 10: Đồ thị hàm số $y = \frac{1+2x}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $x = 1$.

B. $y = 1$.

C. $x = 2$.

D. $y = 2$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2.$$

Nên $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 11: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$ là

A. $y = x - 3$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = -3x + 1$.

D. $x = -3y + 1$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Phương trình đường tiệm cận xiên có dạng: $y = ax + b$.

$$\text{Trong đó, } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 3}{x+1} = -3.$$

$$\text{Ta cũng có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -3.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 3$.

Câu 12: Tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{3x - 9\sqrt{x} + 6}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Đáp án A.

Tập xác định: $D = [0; +\infty) \setminus \{1; 4\}$ (kiểm tra lại tập xác định).

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{3x - 9\sqrt{x} + 6} = 0.$$

Nên hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{3x-9\sqrt{x}+6} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}+1}{3x-9\sqrt{x}+6} = -\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x=1$ là 1 tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x}+1}{3x-9\sqrt{x}+6} = -\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x=4$ là 1 tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Hàm số không có tiệm cận xiên.

Vậy tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 3.

Phân 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$. Các khẳng định sau là đúng hay sai ?

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị.
- b) Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$
- c) Điểm $M(0;1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ và $y = f(2x)$ có cùng điểm cực đại.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = f'(x) = 4x^3 - 4x.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-6	-5	-6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy

- a) Đúng.
- b) Sai.
- c) Sai.
- d) Đúng. Ta có

$$f(2x) = 16x^4 - 8x^2 - 5$$

$$\Rightarrow f'(2x) = 64x^3 - 16x$$

$$\text{Cho } f'(2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \vee x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

Ta thấy hàm $y = f(x)$ và $y = f(2x)$ đều đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có tất cả hai đường tiệm cận.
- Đồ thị hàm số có giao điểm I của hai đường tiệm cận nằm trên đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

b) Sai.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$.

Do đó, đường thẳng $x = 1$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

c) Đúng.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{x+1} = 2$ nên đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-3}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-3}{x+1} = +\infty$, hơn nữa chỉ khi x dần đến -1 thì y mới dần đến vô cực nên đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Do đó, đồ thị hàm số chỉ có đúng hai đường tiệm cận.

d) Đúng.

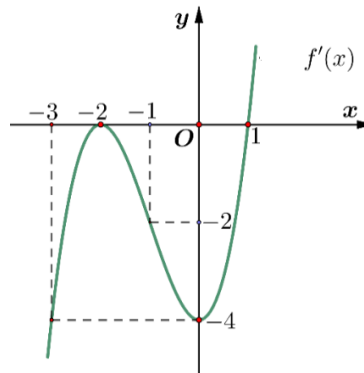
Ta có tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(-1; 2)$.

Thế $x = -1$ và $y = 2$ vào phương trình đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$, ta được:

$$-1 + 2 \cdot 2 - 3 = 0 \text{ (Đúng)}$$

Vậy điểm $I(-1; 2)$ nằm trên đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 3 = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

c) $f'(2) = 4$.

d) Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 + x + 2024$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------

a) Sai. Vì từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) \geq 0$ với $\forall x \geq 1$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

b) Sai. Vì từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu một lần qua $x = 1$ nên hàm số có một điểm cực trị.

c) Sai. Vì:

Từ đồ thị ta có hàm số $f'(x)$ có dạng: $f'(x) = a(x+2)^2(x-1)$.

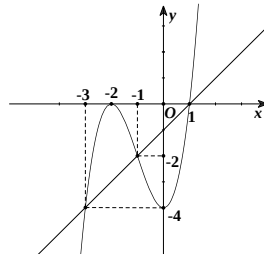
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đi qua $(0; -4)$ nên: $-4 = a(0+2)^2(0-1) \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $f'(x) = (x+2)^2(x-1) \Rightarrow f'(2) = (2+2)^2(2-1) = 16$.

d) Đúng. Vì:

Ta có: $g'(x) = f'(x) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$.

Vẽ đường thẳng $y = x - 1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Khi đó: $f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(1)$	$+\infty$

Ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ nên $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

- Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- Giả sử hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó giá trị $x_1 \cdot x_2 = -1$.
- Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó, diện tích tam giác ABC là 12 với $C(-1; 2)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) **Đúng** vì: $y' = 3x^2 - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(-1) = 3 \\ y(1) = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Từ BBT ta có:

Điểm cực tiểu của hàm số là $x=1$.

b) **Sai** vì từ BBT ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) **Đúng** vì $x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

d) **Sai** vì $A(-1;3), B(1;-1), C(-1;2)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} \cos BAC &= \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{2 \cdot 0 + (-4)(-1)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \sin BAC = \sqrt{1 - \cos^2 BAC} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 1.$$

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Gọi m, n lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. Tính giá trị biểu

thức $P = m^3 + n^3$.

Lời giải

Trả lời: -98

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$ với $x \neq -1$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		-5		3	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số bằng -5 , giá trị cực tiểu của hàm số bằng 3 .

$$\text{Vậy } P = m^3 + n^3 = (-5)^3 + 3^3 = -98.$$

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x-2}$ có tâm đối xứng $I(a; b)$. Giá trị của biểu thức $a - 3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 13

$$+) \text{ Ta có } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x(x-2)} \right] = 4.$$

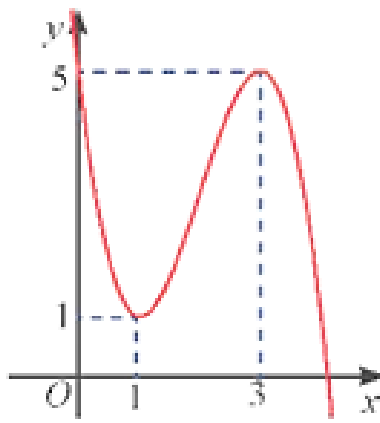
$$+) \text{ Ta có } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - 3 + \frac{1}{x-2} - 4x \right) = -3.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = 4x - 3$.

$$+) \text{ Mặt khác, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(4x - 3 + \frac{1}{x-2} \right) = +\infty \text{ do đó } x = 2 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Ta có tâm đối xứng của đồ thị hàm số trên là giao điểm của $y = 4x - 3$ và $x = 2$; vậy ta được $I(2; 5)$. Suy ra $a - 3b = 2 - 3 \cdot 5 = -13$.

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị của $a + 2b + 3c$ là:



Lời giải

Trả lời: -16

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;5), (1;1)$ nên ta có $d=5; a+b+c+d=1$. (1)

Ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(1;1)$ và $(3;5)$, tức là phương trình $y'=0$ có hai nghiệm là $x=1$ và $x=3$. Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$

Với $x=1$ thì $y'=0$ nên ta có $3a+2b+c=0$ (2).

Với $x=3$ thì $y'=0$ nên ta có $27a+6b+c=0$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $a=-1; b=6; c=-9$

Vậy $a+2b+3c=-1+12-27=-16$

Câu 4: Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Lời giải

Trả lời: 15

Ta có:

$$h'(t)=24+10t-t^2$$

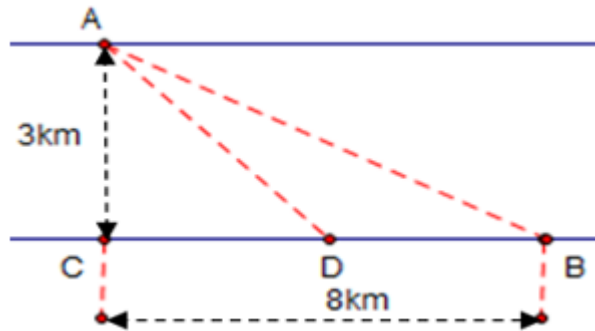
$$h'(t)=0 \Leftrightarrow 24+10t-t^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2(\text{loại}) \\ t=12 \text{ (t/m)} \end{cases}$$

BBT:

t	8	12	24	$+\infty$
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$				

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Câu 5: Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h , chạy với vận tốc 8km/h , $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 1,33

Đặt $CD = x$ (km) ($0 \leq x \leq 8$), $AD = \sqrt{9 + x^2}$

Giả sử để đi từ A đến B anh An bơi thuyền từ A tới D sau đó chạy đến B .

Thời gian bơi thuyền từ A tới D là: $\frac{\sqrt{9 + x^2}}{6}$, thời gian đi từ D tới B là: $\frac{8 - x}{8}$.

Tổng thời gian là: $f(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{6} + \frac{8 - x}{8}$;

$$f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{8}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \in [0; 8].$$

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{[0;8]} f(x) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian nhanh nhất để anh An đi từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$.

Câu 6: Một hãng điện thoại đưa ra quy luật bán buôn cho từng đại lí, đó là đại lí càng nhập nhiều chiếc điện thoại của hãng thì giá bán buôn một chiếc điện thoại càng giảm. Cụ thể, nếu đại lí mua x điện thoại thì giá tiền của mỗi điện thoại là $6000 - 3x$ (nghìn đồng), $x \in \mathbb{N}^*$, $x < 2000$. Đại lí nhập cùng một lúc bao nhiêu chiếc điện thoại thì hãng có thể thu về nhiều tiền nhất từ đại lí đó?

Lời giải

Trả lời: 1000

Số tiền hãng thu được khi đại lí nhập x chiếc điện thoại là $f(x) = x(6000 - 3x)$.

Ta có: $f'(x) = -6x + 6000$. Khi đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1000$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là:

x	0	1000	2000
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	3000000	0

Vậy đại lí nhập cùng lúc 1000 chiếc điện thoại thì hãng có thể thu nhiều tiền nhất từ đại lí đó với 3 000 000 000 (đồng).

♦ **Đề 2:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘		3	↘		$+\infty$
				-2			

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại

A. $x = -2$.

B. $x = 3$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x = 1$, $f'(1) = 0$ và đạo hàm đổi dấu từ (+) sang (-).

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 5

B. 4

C. 6

D. 7

Lời giải

Ta có:

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3(4m + 9) \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in [-9; -3] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên $(-4; 0)$ là

A. -4.

B. 4.

C. -5.

D. 5.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$;

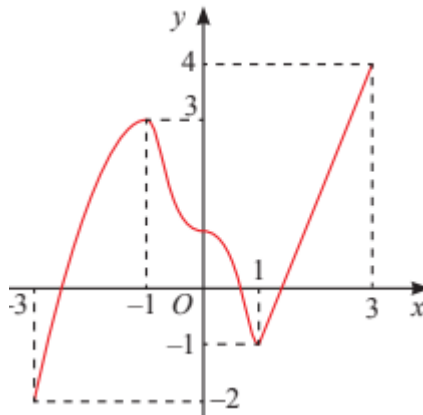
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$.

Bảng biến thiên của hàm số đã cho trên khoảng $(-4; 0)$:

x	$-\infty$	-2	0
y'	$+$	0	$-$
y	-5	-4	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(-4;0)} f(x) = f(-2) = -4$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên $[-3;3]$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $[-3;3]$ lần lượt là

A. $M = 3; m = -1$. **B.** $M = 4; m = -2$. **C.** $M = 3; m = -3$. **D.** $M = -1; m = 1$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$, ta thấy $M = \max_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 4; m = \min_{[-3;3]} f(x) = f(-3) = -2$.

Câu 6: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+x-2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2+x-2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2+x-2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{x^2+x-2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x+1}{x^2+x-2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{6x^2+7x-2023}{2x^2+3x+2024}$ tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $y = 3$. **B.** $y = 0$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 7x - 2023}{2x^2 + 3x + 2024} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{7}{x} - \frac{2023}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{2024}{x^2}} = 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 7x - 2023}{2x^2 + 3x + 2024} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6 + \frac{7}{x} - \frac{2023}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{2024}{x^2}} = 3.$$

Nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Câu 8: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = 2x + 1$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = x$.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2} = x + 1 + \frac{1}{x^2 - 2}$.

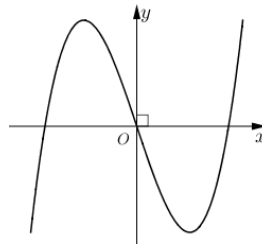
Mà

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 2} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 2} = 0.$$

nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

Câu 9: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = x^3 - 2024x$.

B. $y = -x^3 + 3x$.

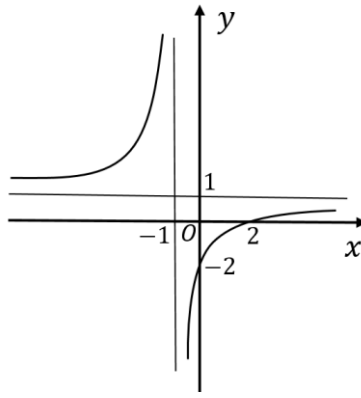
C. $y = x^3 - 3x^2 + 2024$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Lời giải

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ và đi qua gốc tọa độ O nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 2024x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục tung là



A. $(0; -2)$.

B. $(2; 0)$.

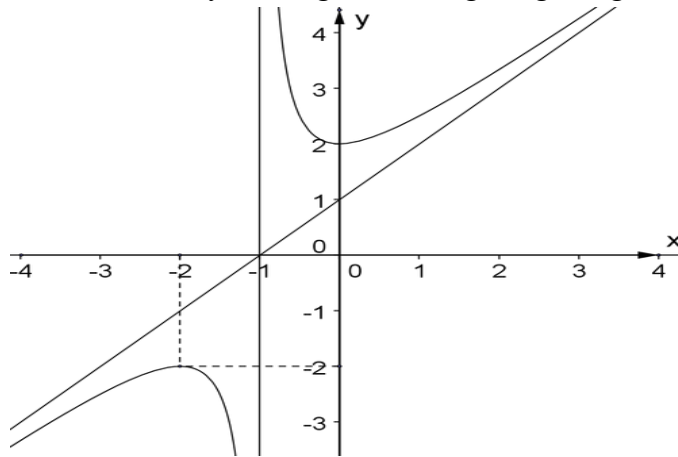
C. $(-2; 0)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; -2)$.

Câu 11: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x+1}$.

C. $y = x^2 - 2x + 2$.

D. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.

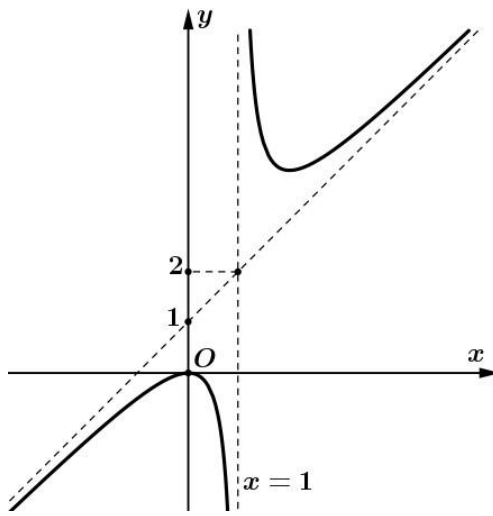
Lời giải

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc hai / bậc nhất nên ta loại được phương án A và **C.** Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$

Thử câu D ta có: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = x + 1$

.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + a}{x + b}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị của $T = a + b$ bằng



A. $T = 0$.

B. $T = -2$.

C. $T = -1$.

D. $T = 2$.

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

Vì đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ nên ta có $b = -1$.

Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên ta có: $a = 0$

Vậy $T = a + b = -1$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$,

b) Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

c) Đồ thị (C) đi qua điểm $M(0; 2)$.

d) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi $-1 < m < 7$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) **Đúng.**

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Tiệm cận đứng của (C) là đường thẳng $x = 2$.

b) **Đúng.**

$$\text{Ta có } y = f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x-2} \right) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{x-2} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên của (C) là đường thẳng $y = x + 1$.

c) Sai.

Thay tọa độ điểm $M(0; 2)$ vào phương trình hàm số $y = f(x)$ ta được:

$$2 = \frac{0^2 - 0 + 2}{0 - 2} \Leftrightarrow 2 = -1: Sai \Rightarrow M(0; 2) \notin (C)$$

d) Sai.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$ là:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = m \quad (x \neq 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 2m + 2 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có

$$\text{hai nghiệm phân biệt khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} = m^2 - 6m + 7 > 0 \\ 2^2 - (m+1) \cdot 2 + 2m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 7 \end{cases}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$

d) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(2; 5)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Ta có: } y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$-\infty$	$+\infty$	5	$+\infty$

a) ĐÚNG

b) Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $x = 0$ và $x = 2$

ĐÚNG

c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(0; 1)$, $(1; 2)$.

SAI

d) Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0; 1)$.

SAI

Câu 3: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30 000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30 000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18000 .

a) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng

b) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ chiếc.

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$$f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) \text{ (nghìn đồng).}$$

Xét hàm số $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x)$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

$$f'(x) = -200x + 1800$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39000 đồng.

Câu 4: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng

- a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống
- b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.
- c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.
- d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng để công ty thu được thu nhập cao nhất là x (lần) ($0 \leq x \leq 30$)

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là $2 + 0,1x$ (triệu đồng)

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là $150 - 5x$ (căn hộ)

Thu nhập của công ty đạt được là $(2 + 0,1x)(150 - 5x)$

Đặt $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$

$$f'(x) = 0,1(150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$f(0) = 300; f(5) = 312,5; f(30) = 0 \Rightarrow \max_{x \in [0; 30]} f(x) = f(5) = 312,5 \text{ khi } x = 5$$

Vậy để có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê với giá $2 + 0,1.5 = 2,5$ (triệu đồng).

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh

(người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200?

Lời giải

Trả lời: 1200

Ta có $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 90t + 600$.

Tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200 nên $f'(t) > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t + 600 > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t - 600 > 0 \Leftrightarrow 10 < t < 20$.

Vậy có 9 ngày tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$. Độ dài của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng. (làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải:

Trả lời: 8,2

Xét hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$

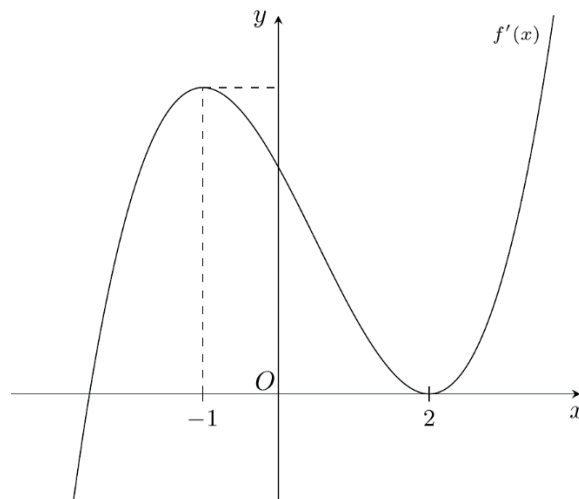
Điều kiện: $x \neq -2$

Ta có: $y' = \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x + 2)^2} \quad (x \neq -2)$

Cho $y' = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $A(-1; 1)$ và $B(-3; -7) \Rightarrow AB = 2\sqrt{17}$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



Lời giải

Trả lời: 1

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 1. Vì dựa vào đồ thị của $f'(x)$, đạo hàm đổi dấu một lần từ âm sang dương nên hàm số đã cho có một cực trị (một cực tiểu).

Câu 4: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có dạng $y = ax + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 2024b$.

Lời giải

Trả lời: 5

Giả sử hàm số có đồ thị là (C) . Ta có:

$$+) y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow (C) \text{ có tiệm cận xiên}$$

là đường thẳng $y = x$.

Suy ra: $a = 1$; $b = 0 \Rightarrow P = 5a + 2024b = 5.1 + 2024.0 = 5$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Tìm m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

Lời giải

Trả lời: 3

Đặt $t = x^3 + 4x + m \Rightarrow t' = 3x^2 + 4$ nên t đồng biến trên $(-1; 1)$ và $t \in (m - 5; m + 5)$

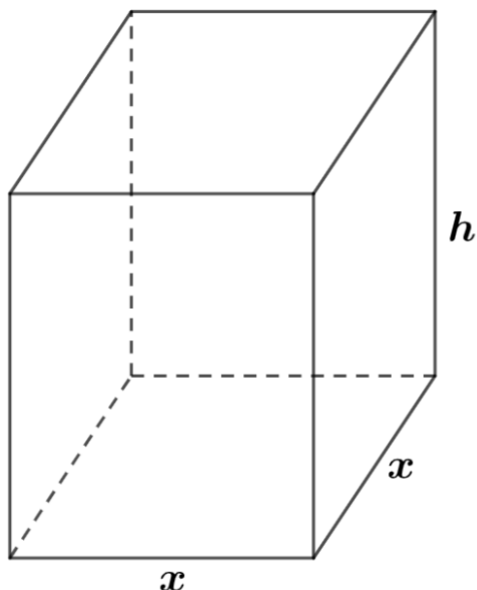
Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m - 5; m + 5)$.

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta được } \begin{cases} m - 5 \geq -2 \\ m + 5 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Câu 6: Một hộp sữa dung tích 1 lít có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng x (cm) và chiều cao h (cm). Tìm giá trị của x để diện tích toàn phần của hình hộp là nhỏ nhất.

Lời giải

Trả lời: 10



Thể tích của hộp sữa là: $V = x^2 h \text{ (cm}^3\text{)}.$

Theo bài ra, ta có: $V = 1(l) = 1000 \text{ (cm}^3\text{)} \Rightarrow x^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}.$

Ta có diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 4hx + 2x^2 = 4 \cdot \frac{1000}{x^2} \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + \frac{4000}{x}$$

$$\text{Đặt } y = 2x^2 + \frac{4000}{x} \Rightarrow y' = 4x - \frac{4000}{x^2}.$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{4000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4000 = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	10	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	$+\infty$	600	$+\infty$

Vậy để hộp sữa có diện tích toàn phần nhỏ nhất thì $x = 10.$

♦Đề 3:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}.$ Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^2 - 4 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A.** -1 . **B.** 2 . **C.** -2 . **D.** 1 .

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -2 .

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-5		2

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$ bằng

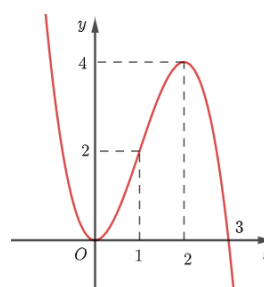
- A.** 6 . **B.** 9 . **C.** -3 . **D.** -1 .

Lời giải

Trên $\mathbb{R}$, ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ bằng 4 tại $x = 0$ và giá trị nhỏ nhất bằng -5 tại $x = 2$.

Khi đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathbb{R}$ bằng -1 .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta có $\max_{[0;3]} f(x) = 4$ tại $x = 2$.

Câu 5: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2024x + 2025}{x - 5}$ là

A. $y = 2025$.

B. $y = 2024$.

C. $y = 1$.

D. $y = -5$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2024x + 2025}{x - 5} = 2024$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2024x + 2025}{x - 5} = 2024$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 2024$.

Câu 6: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{15x - 6}{10x + 5}$ là

A. $x = \frac{3}{2}$.

B. $x = -\frac{6}{5}$.

C. $x = -\frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{2}{5}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{15x - 6}{10x + 5} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{15x - 6}{10x + 5} = +\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 7: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y = -x - 1$.

B. $y = x - 1$.

C. $y = -x + 1$.

D. $y = x + 1$.

Lời giải

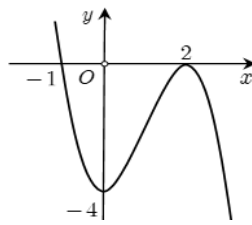
Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} : x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x} = -1$,

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} - (-1)x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 4}{x + 2} = -1$

(Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} : x \right) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2} - (-1)x \right] = -1$)

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ là đường thẳng có phương trình $y = -x - 1$.

Câu 8: Đường cong ở hình sau là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **B.** $y = x^3 - 4$. **C.** $y = x^2 - 4$. **D.** $y = -x^2 - 4$.

Lời giải

Xét dáng hình của đồ thị, ta loại được hàm số $y = x^2 - 4$ và $y = -x^2 - 4$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên ta loại hàm số $y = x^3 - 4$ và nhận hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 2	

- A.** $y = \frac{2x+1}{x-2}$. **B.** $y = \frac{2x-5}{x-2}$. **C.** $y = \frac{2x+1}{x+2}$. **D.** $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

Lời giải

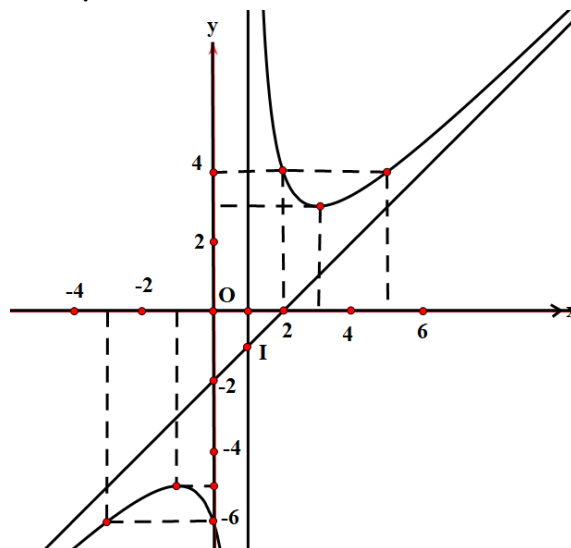
Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$ là nên loại hàm số

$$y = \frac{2x+1}{x+2} \text{ và } y = \frac{2x-1}{x+2}.$$

Ta nhận thấy hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định nên loại hàm số $y = \frac{2x-5}{x-2}$ và

$$\text{nhận hàm số } y = \frac{2x+1}{x-2}.$$

Câu 10: Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$. **B.** $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$. **C.** $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. **D.** $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$.

Lời giải

➤ Xét hàm số $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$. Vì đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$ không có đường tiệm cận. Suy ra phương án $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$ sai.

➤ Xét hàm số $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$.

$$y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1} = x + \frac{3}{x - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 1} = 0.$$

Do đó đường thẳng $y = x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Suy ra phương án $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$ sai.

➤ Xét hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x - 2 + \frac{4}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty.$$

Do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 1} = 0.$$

Do đó đường thẳng $y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Suy ra phương án $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ đúng.

➤ Xét hàm số $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$. Vì đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$ không có đường tiệm cận xiên nên phương án $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$ sai.

Câu 11: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 800 - 20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 19.

B. 20.

C. 21.

D. 22.

Lời giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích.

Ta có: $F(n) = (800 - 20n) \cdot n = 800n - 20n^2$.

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $F(n)$ đạt GTLN.

$$F'(n) = 800 - 40n$$

$$F'(n) = 0 \Leftrightarrow 800 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 20$$

Ta có bảng biến thiên:

n	$-\infty$	20	$+\infty$
$F'(n)$	+	0	-
$F(n)$	$-\infty$	8000	$-\infty$

Vậy phải thả 20 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 12: Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đạt cực đại tại điểm

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	6	-26	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Xét tính đúng hoặc sai của các mệnh đề sau:

a) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

- c) Giả sử hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó giá trị $x_1 \cdot x_2 = -1$.
- d) Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Khi đó, diện tích tam giác ABC là 12 với $C(-1; 2)$.

Lời giải

a) **Đúng** vì: $y' = 3x^2 - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(-1) = 3 \\ y(1) = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ 3 $+\infty$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ -1				

Từ BBT ta có:

Điểm cực tiểu của hàm số là $x = 1$.

b) **Sai** vì từ BBT ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) **Đúng** vì $x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

d) **Sai** vì $A(-1; 3), B(1; -1), C(-1; 2)$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

$$\cos BAC = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{2 \cdot 0 + (-4)(-1)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \sqrt{0^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin BAC = \sqrt{1 - \cos^2 BAC} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 1.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Chọn đúng hoặc sai?

a) Khi $m = 2$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2; 5]$ là 4.

- b) Khi $m = 2$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 5]$ là $\frac{7}{4}$.
- c) Khi $m < -1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 4]$ là $y(4)$.
- d) Khi $\min_{[2; 4]} y = 3$ thì giá trị của tham số m là $1 \leq m < 3$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$.

- a) Khi $m = 2$ thì $y' = \frac{-1-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định, do đó hàm số cũng nghịch biến trên $[2; 5]$.

Vậy $\max_{[2; 5]} y = y(2) = 4$. **Chọn D**

- b) Theo ý a) ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định, do đó hàm số cũng nghịch biến trên $[2; 5]$. Vậy $\min_{[2; 5]} y = y(5) = \frac{7}{4}$. **Chọn D**

- c) Với $m < -1 \Rightarrow -1-m > 0 \Rightarrow y' > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng xác định, do đó hàm số cũng đồng biến trên $[2; 4]$ suy ra $\min_{[2; 4]} y = y(2)$. **Chọn S**

d)

TH1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow y' > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $[2; 4]$

Khi đó $\min_{[2; 4]} y = y(2) \Leftrightarrow 3 = 2 + m \Leftrightarrow m = 1$ (ktm)

TH2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow y' < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $[2; 4]$

Khi đó $\min_{[2; 4]} y = y(4) \Leftrightarrow 3 = \frac{4+m}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (tm) mà $m \notin [1; 3)$. **Chọn S**

Câu 3: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		1			$+\infty$
	$-\infty$		-3		

Khi đó hàm số trên nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

b) Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

c) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x^{2017}(x-1)^{2018}(x+1) \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

d) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Khi đó $a + b = 2$.

Lời giải

a) Đúng.

Dựa vào BBT hàm số hàm số nghịch biến trên $(-2; 0)$.

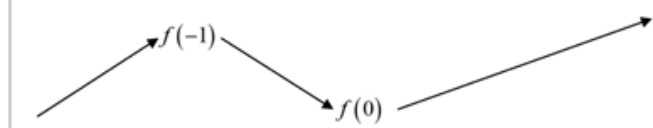
b) Đúng.

Có $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in (2; +\infty)$ nên hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

c) Sai.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{2017}(x-1)^{2018}(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Vậy hàm số chỉ có hai điểm cực trị.

d) Đúng.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2a, y'' = 6x - 6$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2; -2)$ cần có:

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 6 \cdot 2 - 6 > 0 \\ 4a + b - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } a + b = 2.$$

Câu 4: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(-2; +\infty)$ bằng -3 .

b) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng -1 .

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên $[2; 3]$ bằng 3 .

d) Một hãng được phẩm cần một số lọ đựng thuốc dạng hình trụ với dung tích $16\pi \text{ cm}^3$. Để ít tổn nguyên liệu sản xuất nhất thì bán kính đáy R của lọ bằng 2 cm .

Lời giải

a) Đúng.

Dựa vào BBT suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $(-2; +\infty)$ bằng -3 .

b) Sai.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 4x - 7, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in (-2; 1) \\ x = \frac{7}{3} \notin (-2; 1) \end{cases}$$

$$y(-2) = -1, y(1) = -7, y(-1) = 5. \text{ Vậy } \max_{[-2; 1]} y = y(-1) = 5.$$

c) Sai.

$$\text{Có } y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \geq 0, \forall x \in [2; 3] \text{ nên hàm số } y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \text{ đồng biến trên } [2; 3].$$

$$\text{Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số } y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \text{ trên } [2; 3] \text{ bằng } y(3) = \frac{7}{2}.$$

d) Đúng.

$$\text{Ta có } V = \pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{R^2}.$$

Để ít tổn nguyên liệu nhất thì diện tích toàn phần của lọ phải nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } S_{\text{tp}} = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R} = 2\pi R^2 + \frac{16\pi}{R} + \frac{16\pi}{R} \geq 3\sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{16\pi}{R} \cdot \frac{16\pi}{R}} = 24\pi.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 2\pi R^2 = \frac{16\pi}{R} \Leftrightarrow R = 2(\text{cm}).$$

Câu 1: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200?

Lời giải

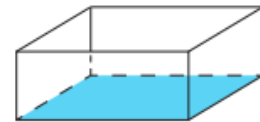
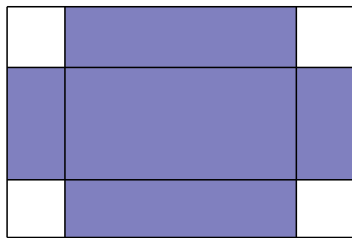
Đáp số: 9.

Ta có $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t \Rightarrow f'(t) = -3t^2 + 90t + 600$.

Tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200 nên $f'(t) > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t + 600 > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t - 600 > 0 \Leftrightarrow 10 < t < 20$.

Vậy có 9 ngày tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200.

Câu 2: Trong một trò chơi, mỗi đội chơi được phát một tấm bìa hình chữ nhật kích thước 21 cm, 29,5 cm. Nhiệm vụ của mỗi đội là cắt ở bốn góc của tấm bìa này bốn hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm bìa lại và dán keo để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật như hình vẽ.



Đội nào thiết kế được chiếc hộp có thể tích lớn nhất sẽ dành chiến thắng. Hãy xác định cạnh của hình vuông bị cắt để thu được hộp có thể tích lớn nhất. (Coi mép dán không đáng kể, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 4,03 cm.

Gọi cạnh của hình vuông bị cắt ở bốn góc là: x .

Điều kiện: $0 < 2x < 21 \Leftrightarrow 0 < x < 10,5$, đơn vị cm .

Ta có kích thước của khối hộp chữ nhật là: x , $21 - 2x$; $29,5 - 2x$.

Thể tích của khối hộp là: $V = (21 - 2x) \cdot (29,5 - 2x) \cdot x = 619,5x - 101x^2 + 4x^3 = f(x)$.

Thể tích khối hộp lớn nhất khi hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$f'(x) = 12x^2 - 202x + 619,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \approx 12,80 \\ x_1 \approx 4,03 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	10,5	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$		$f(x_2)$	$+\infty$

Suy ra $\max_{(0;10,5)} f(x) = f(x_1)$.

Vậy cạnh của hình vuông xấp xỉ 4,03 cm.

Câu 3 : Điểm cực tiểu x_{CT} của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ là:

Lời giải

Ta có:

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1) = -5 \\ y(-3) = 27 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	27	-5	$+\infty$	

$\Rightarrow x=1$ là điểm cực tiểu.

Câu 4 : Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2)x - m + 1$ đạt cực đại tại $x=1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + (m^2 + 2)$.

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 + 2)x - m + 1$ đạt cực đại tại $x=1$.

$$\Leftrightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 6m + m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=5 \end{cases}$$

+ Với $m=1$ ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

$$y' = 3x^2 - 6x + 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow \text{hàm số không có cực trị.}$$

+ Với $m=5$ ta có: $y = x^3 - 15x^2 + 27x - 4$

$$y' = 3x^2 - 30x + 27$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 30x + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 9 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	1	9	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$		9		$+\infty$
				-247	

Từ bảng biến thiên ta có với $m=5$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 5 : Cho hàm số $y = \frac{x-m^2-1}{x-m}$ có bao nhiêu giá trị nguyên m thỏa mãn $\max_{[0;4]} y = -6$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Có $y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x-m)^2} > 0, \forall x \in D$ (do $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$).

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Khi đó $\max_{[0;4]} y = y(4)$.

Để hàm số đã cho có giá trị lớn nhất trên $[0;4]$ bằng -6 thì

$$\begin{cases} m \notin [0;4] \\ y(4) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ \frac{3-m^2}{4-m} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ m^2 + 6m - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0;4] \\ \begin{cases} m = 3 \\ m = -9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m = -9.$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6 : Biết tích các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-4}{x^2+2(m-2)x+m^2+1}$

có đúng 2 đường tiệm cận là $\frac{a}{b}, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a^2 + b^2$.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 + 2(m-2)x + m^2 + 1$.

Dễ thấy đồ thị không có tiệm cận xiên.

Đồ thị có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$ do $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-4}{x^2+2(m-2)x+m^2+1} = 0$.

Do đó, để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì hàm số chỉ có đúng 1 đường tiệm cận đứng.

Khi đó, $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 2$ hoặc $f(x) = 0$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(2) = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - m^2 - 1 > 0 \\ 4 + 2(m-2) \cdot 2 + m^2 + 1 = 0 \\ (m-2)^2 - m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 3 > 0 \\ m^2 + 4m - 3 = 0 \\ -4m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{4} \\ m = -2 \pm \sqrt{7} \\ m = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 + \sqrt{7} \\ m = -2 - \sqrt{7} \\ m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy tích tất cả các giá trị thực của tham số m là: $P = (-2 + \sqrt{7}) \cdot (-2 - \sqrt{7}) \cdot \frac{3}{4} = -3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{-9}{4}$.

Do đó $a = -9, b = 4$ nên $P = a^2 + b^2 = 81 + 4 = 85$.