

BÀI 2. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

*. Đề kiểm tra rèn luyện

♦ Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

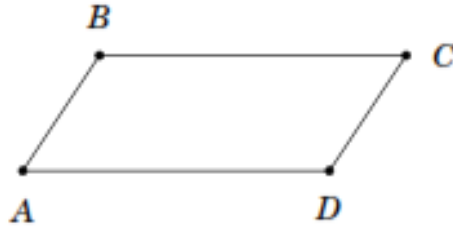
- A. $(-1;-1;-3)$. B. $(3;1;1)$. C. $(1;1;3)$. D. $(3;3;-1)$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2)) \text{ hay } \overrightarrow{AB} = (1;1;3).$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$.

Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.



- A. $(-4;-2;9)$. B. $(4;2;9)$. C. $(-2;4;-5)$. D. $(6;2;-3)$.

Lời giải

$$\text{Gọi } D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (x+3; y-1; z-2) \text{ và } \overrightarrow{BA} = (-1; -3; 7).$$

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành khi và chỉ khi: } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=-1 \\ y-1=-3 \\ z-2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \\ z=9 \end{cases}$$

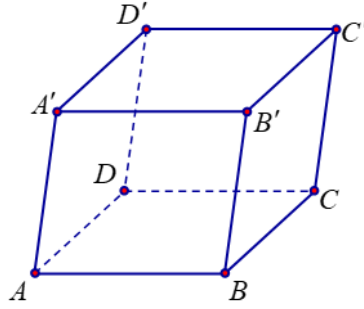
$$\Rightarrow C(-4;-2;9)$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$.

Tính tọa độ đỉnh C của hình hộp.

- A. $C(4;6;-5)$. B. $C(2;0;2)$. C. $C(3;5;-6)$. D. $C(3;4;-6)$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 0 \\ z_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2)$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$, $K(-1; 3; 1)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Tìm tọa độ vector $\overrightarrow{KP}$.

A. $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -11)$. **B.** $\overrightarrow{KP} = (8; 6; -11)$. **C.** $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -4)$. **D.** $\overrightarrow{KP} = (3; 3; -2)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2) \Rightarrow M(1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4) \Rightarrow N(3; 7; -4)$.

Vì P là điểm đối xứng với M qua N nên N là trung điểm của MP , ta suy ra được

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - x_M = x_P - x_N \\ y_N - y_M = y_P - y_N \\ z_N - z_M = z_P - z_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 5 \\ y_P = 9 \\ z_P = -10 \end{cases} \Rightarrow P(5; 9; -10).$$

Khi đó $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -11)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đoạn thẳng AB có $A(3; 1; -1)$ và $B(-1; 5; 7)$. Tọa độ trung điểm M của AB là

A. $M(2; 6; 6)$. **B.** $M(1; 3; 3)$. **C.** $M(-1; 3; -3)$. **D.** $\vec{a}(-2; -6; -6)$.

Lời giải

Tọa độ trung điểm M của AB là $M(1; 3; 3)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

A. $(10; -2; 13)$. **B.** $(-2; 2; -7)$. **C.** $(-2; -2; 7)$. **D.** $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a} = (4; -6; 6)$, $3\vec{b} = (0; 6; -3)$, $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$ suy ra
 $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$ biết $A(0; -2; 1)$, $B(1; 3; -2)$, $C(1; 0; 0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A.** $D(0; -5; 3)$. **B.** $D(0; 5; 3)$. **C.** $D(1; 5; -3)$. **D.** $D(0; -5; -3)$.

Lời giải

Gọi tọa độ điểm D là: $D(x; y; z)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{AB} = \vec{DC}$

Ta có: $\vec{AB} = (1; 5; -3)$; $\vec{DC} = (1 - x; -y; -z)$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 1 \\ -y = 5 \\ -z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow D(0; -5; 3).$$

Vậy điểm $D(0; -5; 3)$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 8: Cho điểm $M(3; -2; 0)$; $N(2; 4; 1)$. Tọa độ của $\vec{MN}$ là:

- A.** $(1; -6; -1)$. **B.** $(-1; 6; 1)$. **C.** $(1; 0; 6)$. **D.** $(-1; 6; -1)$.

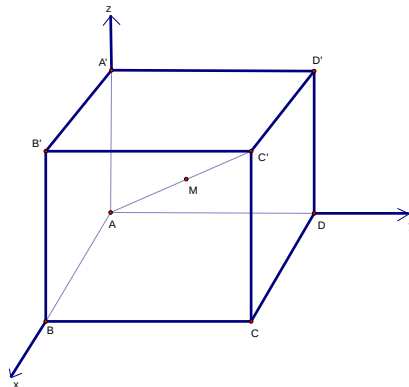
Lời giải

Ta có $\vec{MN} = (2 - 3; 4 + 2; 1 - 0) = (-1; 6; 1)$.

Câu 9: Một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với chiều rộng $AB = 4$, chiều dài $AD = 8$, chiều cao $AA' = 10$ được gắn vào hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Người ta muốn treo một bóng đèn ở tâm hình hộp. Tìm tọa độ vị trí điểm M để treo bóng đèn.

- A.** $M(4; 8; 5)$. **B.** $M(2; 4; 10)$. **C.** $M(4; 4; 5)$. **D.** $M(2; 4; 5)$.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $A(0; 0; 0)$, $C(4; 8; 10)$

Gọi M là tâm của hình hộp. Khi đó M là trung điểm của AC'

Suy ra $M(2;4;5)$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A.** $A'(1;-2;3)$. **B.** $A'(1;2;-3)$. **C.** $A'(-1;2;3)$. **D.** $A'(-1;2;-3)$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(1;2;3)$ lên Oy . Suy ra $H(0;2;0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA' .

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -1 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;2;-3).$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ tâm I có tọa độ các đỉnh $B(3;1;0)$, $D(0;4;-6)$. Tìm tọa độ điểm I .

- A.** $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-3\right)$. **B.** $I(3;5;-6)$. **C.** $I\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. **D.** $I(-3;5;-6)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ suy ra $\overrightarrow{BI} = (a-3;b-1;c)$, $\overrightarrow{ID} = (-a;4-b;-6-c)$.

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình bình hành tâm } I \text{ nên } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID} \Rightarrow \begin{cases} a-3 = -a \\ b-1 = 4-b \\ c = -6-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{5}{2} \\ c = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};-3\right).$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm đối xứng M' của M qua mặt phẳng (Oxz) .

- A.** $M'(-3;-5;7)$. **B.** $M'(3;5;-7)$. **C.** $M'(-3;5;7)$. **D.** $M'(3;-5;-7)$.

Lời giải

$$\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k} \Rightarrow M(3;5;-7).$$

Tọa độ hình chiếu của M lên mặt phẳng (Oxz) là $H(3;0;-7)$.

Gọi $M'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) , suy ra $\overline{MH} = \overline{HM'}$ mà

$$\overline{MH} = (0; -5; 0), \overline{HM'} = (a-3; b; c+7) \text{ nên } \begin{cases} a-3=0 \\ b=-5 \\ c+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ c=-7 \end{cases}. \text{ Vậy } M'(3; -5; -7).$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(8;4;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là điểm $(0;4;3)$.
- b) Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz là điểm $(0;0;3)$.
- c) Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng Oxz là điểm $(8;0;3)$.
- d) $\overline{OM} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

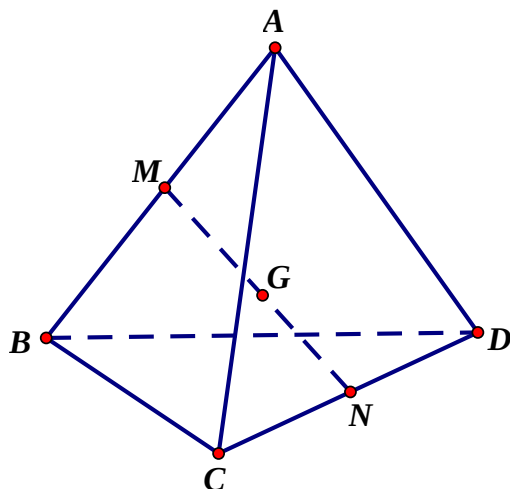
Lời giải

- a) Sai. Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là điểm $(8;0;0)$.
- b) Đúng. Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz là điểm $(0;0;3)$.
- c) Đúng. Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng Oxz là điểm $(8;0;3)$.
- d) Đúng. Vì $\overline{OM} = (8;4;3)$ nên $\overline{OM} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, G lần lượt là trung điểm của AB , CD , MN .

- a) $\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}$.
- b) $\overline{MC} + \overline{MD} = 2\overline{MN}$.
- c) $\overline{GA} + \overline{GB} = \overline{GC} + \overline{GD}$.
- d) $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{MN}$.

Lời giải



- a) Đúng: Do M là trung điểm của đoạn AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
- b) Đúng: Do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.
- c) Sai: Do G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.
 Mà $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$ $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$.
- d) Sai: Do $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$
 $= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) + 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MN}$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 7); B(5; 6; 3); C(-4; 7; 10)$.

- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB ?
- Tìm tọa độ trung điểm J của đoạn AC ?
- Tìm tọa độ trung điểm K của đoạn BC ?
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ?
- Tìm tọa độ trọng tâm Q của tam giác OAB ?

Lời giải

- Áp dụng công thức tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, ta được: $I(3; 2; 5)$.
- Áp dụng công thức tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, ta được: $J\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{17}{2}\right)$.
- Áp dụng công thức tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, ta được: $K\left(\frac{1}{2}; \frac{13}{2}; \frac{13}{2}\right)$.
- Áp dụng công thức tìm tọa độ trọng tâm của tam giác, ta được: $G\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{20}{3}\right)$.
- Áp dụng công thức tìm tọa độ trọng tâm của tam giác, ta được: $Q\left(2; \frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 7); B(5; 6; 3); C(-4; 7; 10); G(2; 5; 6)$.

- Tìm tọa độ điểm M đối xứng với điểm A qua B ?
- Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm B qua C ?
- Tìm tọa độ điểm B' đối xứng với điểm B qua trục Oy ?
- Tìm tọa độ điểm C' đối xứng với điểm C qua mặt phẳng tọa độ (Oxz) ?
- Tìm tọa độ điểm D sao cho G là trọng tâm của tam giác BCD ?
- Tìm tọa độ điểm K sao cho A là trọng tâm của tam giác KBG ?

Lời giải

a) Do điểm M đối xứng với điểm A qua B nên B là trung điểm của đoạn AM .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_M = 2x_B - x_A = 9 \\ y_M = 2y_B - y_A = 14 \\ z_M = 2z_B - z_A = -1 \end{cases} \Rightarrow M(9; 14; -1).$$

b) Do điểm N đối xứng với điểm B qua C nên C là trung điểm của đoạn BN .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_N = 2x_C - x_B = -13 \\ y_N = 2y_C - y_B = 8 \\ z_N = 2z_C - z_B = 17 \end{cases} \Rightarrow N(-13; 8; 17).$$

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B trên trục Oy . Ta được: $H(0; 6; 0)$.

Do điểm B' đối xứng với điểm B qua trục Oy nên H là trung điểm của đoạn BB' .

Vậy $B'(-5; 6; -3)$.

d) Gọi J là hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt phẳng tọa độ (Oxz) . Ta được:

$J(-4; 0; 10)$.

Do điểm C' đối xứng với điểm C qua mặt phẳng tọa độ (Oxz) nên J là trung điểm của đoạn CC' .

Vậy $C'(-4; -7; 10)$.

e) Do G là trọng tâm của tam giác BCD , nên:

$$\begin{cases} x_D = 3x_G - x_B - x_C = 5 \\ y_D = 3y_G - y_B - y_C = 2 \\ z_D = 3z_G - z_B - z_C = 5 \end{cases} \Rightarrow D(5; 2; 5)$$

f) Do A là trọng tâm của tam giác KBG . Tương tự $K(-4; -17; 12)$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 7); B(5; 6; 3); C(-4; 7; 10)$.

- Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành?
- Tìm tọa độ điểm M sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành?

Lời giải

a) Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$.

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -4 - x_D \\ 8 = 7 - y_D \\ -4 = 10 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -8 \\ y_D = -1 \\ z_D = 14 \end{cases} \Rightarrow D(-8; -1; 14).$$

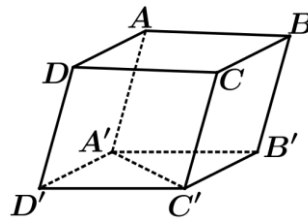
b) Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$.

$$ABMC \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x_M + 4 \\ 8 = y_M - 7 \\ -4 = z_M - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 15 \\ z_M = 6 \end{cases} \Rightarrow M(0; 15; 6).$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với các đỉnh $A(-1; 1; 2)$; $B(-3; 2; 1)$; $D(0; -1; 2)$ và $A'(2; 1; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp?

Lời giải

Ta có

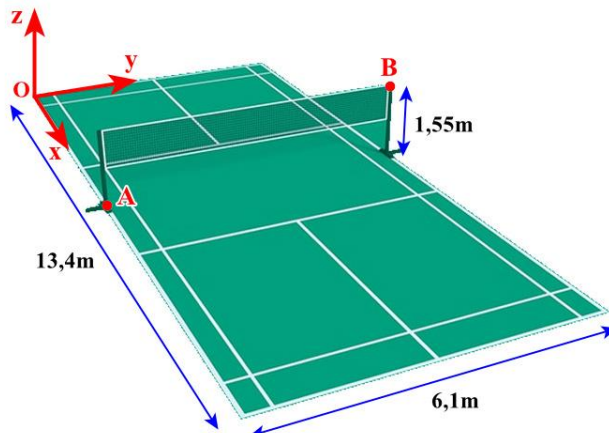


+ Do $ABCD$ là hình bình hành, nên tương tự câu 18, ta được: $C(-2; 0; 1)$.

+ Do $ACC'A'$ là hình bình hành, nên tương tự câu 18, ta được: $C'(1; 0; 1)$.

+ Tương tự, ta được: $B'(0; 2; 1)$; $D'(3; -1; 2)$.

Câu 3: Hình dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai điểm A, B như hình. Xác định tọa độ của $\overline{AB}$.

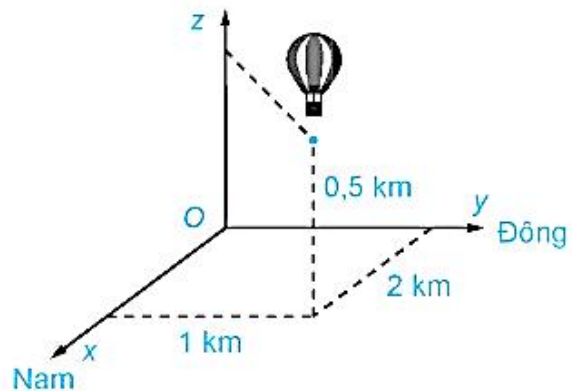


Lời giải

Ta có $A(6,7; 0; 0), B(6,7; 6,1; 1,55)$. Vậy tọa độ $\overline{AB}$ là:

$$\overline{AB} = (6,7 - 6,7; 6,1 - 0; 1,55 - 0) = (0; 6,1; 1,55).$$

Câu 4: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ m}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, Oy hướng về phía đông, Oz hướng



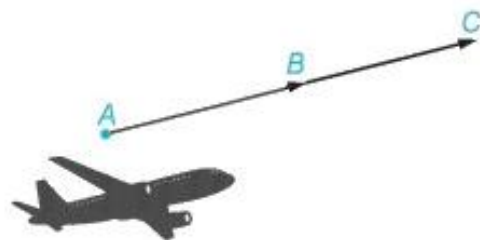
thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét. Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu.

Lời giải

Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{ m}$ nên có tọa độ là $(2; 1; 0,5)$.

Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5\text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{ km}$ nên có tọa độ là $(-1; -1,5; 0,8)$.

Câu 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến



điểm $B(940; 550; 8)$ trong vòng 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?

Lời giải

Gọi $C(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian từ B đến C nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (940 - 800; 550 - 500; 8 - 7) = (140; 50; 1)$. $\overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 8)$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 140 = x - 940 \\ 50 = y - 550 \\ 1 = z - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}. \text{ Vậy } C = (1080; 600; 9).$$

Câu 6: Một công ty viễn thông đang lên kế hoạch xây dựng một tháp viễn thông tại một thành phố để cung cấp dịch vụ tốt hơn. Công ty cần xác định vị trí của tháp sao cho có thể phủ sóng hiệu quả đến ba toà nhà quan trọng trong thành phố. Giả sử các toà nhà này được đặt tại các vị trí có tọa độ như sau:

Toà nhà $A(0; 0; 0)$

Toà nhà $B(6; 0; 0)$

Toà nhà $C(3; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$

Tháp viễn thông phải đặt ở vị trí sao cho tổng khoảng cách từ tháp đến 3 toà nhà là nhỏ nhất. Khi đó tổng khoảng cách từ vị trí của tháp đến ba toà nhà bằng bao nhiêu?



Lời giải

Đáp số: $\frac{3\sqrt{47}}{2}$.

Gọi vị trí tháp là $T(x; y; z)$. Vì $AB = AC = BC = 6$ nên tam giác ABC đều. Khi đó vị trí của tháp là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x = \frac{0+6+3}{3} = \frac{9}{3} \\ y = \frac{0+0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \\ z = \frac{0+0+2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \Rightarrow T\left(\frac{9}{3}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

Khi đó khoảng cách từ tháp đến các toà nhà là:

$$TA = TB = TC = \frac{\sqrt{47}}{2}.$$

$$\text{Vậy tổng khoảng cách cần tìm là: } S = TA + TB + TC = \frac{3\sqrt{47}}{2} \approx 10,28$$

♦ Đề 2:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$. Tọa độ $\vec{OA}$ là

- A.** $(3; 0; 0)$ **B.** $(3; -4; 0)$ **C.** $(0; -4; 0)$ **D.** $(0; 0; 0)$

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (0; -3; 2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$. **B.** $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
C. $\vec{a} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$. **D.** $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector $\vec{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2)) \text{ hay } \overrightarrow{AB} = (1;1;3).$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, vector đơn vị trên trục Oy là

- A.** $\vec{j} = (0;1;0)$. **B.** $\vec{i} = (1;0;0)$. **C.** $\vec{k} = (0;0;1)$. **D.** $\vec{n} = (1;1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A = (4;-2;3)$. Tìm vector $\overrightarrow{AO}$.

- A.** $(-4;2;-3)$. **B.** $(-2;3;4)$. **C.** $(-2;4;3)$. **D.** $(4;2;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;7)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ các điểm A_1, A_2, A_3 ?

Lời giải

$$\text{Ta có } A_1(1;0;0); A_2(0;-2;0); A_3(0;0;7).$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;7)$. Gọi A_1, A_2, A_3 là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy); (Oxz); (Oyz)$. Tìm tọa độ các điểm A_1, A_2, A_3 ?

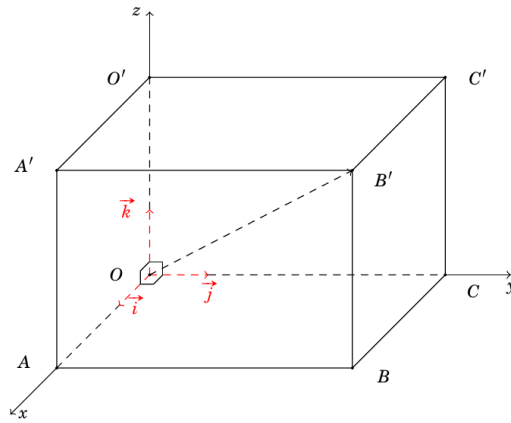
Lời giải

$$\text{Ta có } A_1(1;-2;0); A_2(1;0;7); A_3(0;-2;7).$$

Câu 9: [Mức độ 2] Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'B'C'$ có cạnh $OA=4$, $OC=6$, $OO'=3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O ; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó tọa độ điểm B' là

- A.** $B'(6;3;4)$. **B.** $B'(6;4;3)$. **C.** $B'(4;6;3)$. **D.** $B'(4;3;6)$.

Lời giải



Áp dụng quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow B'(4;6;3)$.

Câu 10: [Mức độ 2] Cho điểm $M(3;-2;0); N(2;4;1)$. Tọa độ của $\overrightarrow{MN}$ là:

- A. $(1;-6;-1)$. B. $(-1;6;1)$. C. $(1;0;6)$. D. $(-1;6;-1)$.

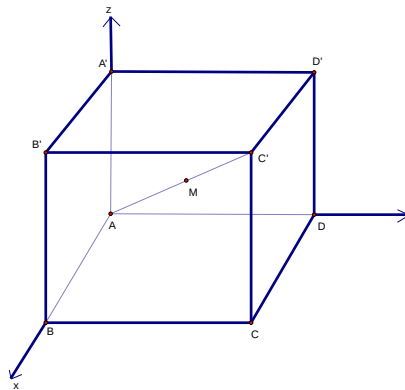
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2-3; 4+2; 1-0) = (-1;6;1)$.

Câu 11: [Mức độ 2] Một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với chiều rộng $AB = 4$, chiều dài $AD = 8$, chiều cao $AA' = 10$ được gắn vào hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ. Người ta muốn treo một bóng đèn ở tâm hình hộp. Tìm tọa độ vị trí điểm M để treo bóng đèn.

- A. $M(4;8;5)$. B. $M(2;4;10)$. C. $M(4;4;5)$. D. $M(2;4;5)$.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $A(0;0;0), C(4;8;10)$

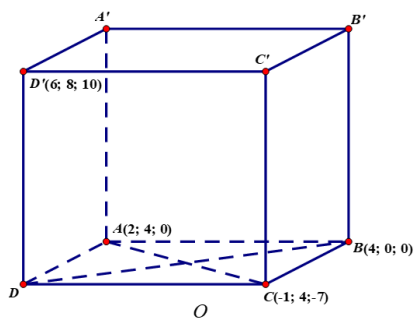
Gọi M là tâm của hình hộp. Khi đó M là trung điểm của AC'

Suy ra $M(2;4;5)$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

- A. $B'(8;4;10)$ B. $B'(6;12;0)$ C. $B'(10;8;6)$ D. $B'(13;0;17)$

Lời giải



Giả sử $D(a; b; c)$, $B'(a'; b'; c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17)$, $\overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases}. \text{ Vậy } B'(13; 0; 17).$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, G lần lượt là trung điểm của AB , CD , MN .

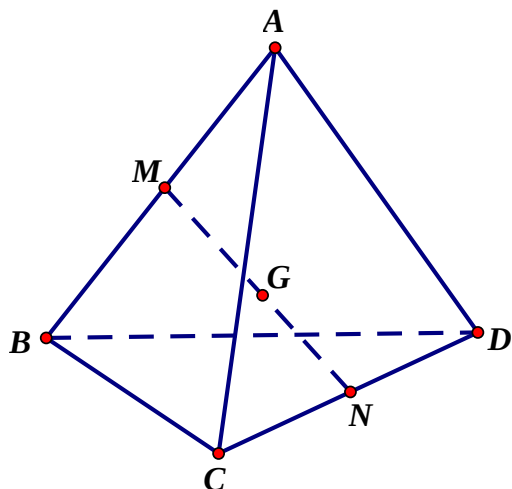
a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.

c) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.

d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải



a) Đúng: Do M là trung điểm của đoạn AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) Đúng: Do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.

c) Sai: Do G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Mà $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$ $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$.

d) Sai: Do $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$
 $= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) + 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MN}$

Câu 2: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{D'A'}) = 45^\circ$.

c) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$.

d) $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}a^2$.

Lời giải

a) Đúng: Theo quy tắc hình hộp

b) Sai: Do $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DA} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{D'A'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}) = 135^\circ$.

c) Đúng: Do $\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{A'C'} \Rightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$.

d) Sai: Do $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = a^2$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (3; 1; 5)$.

- a) $\overset{1}{a} + \overset{1}{b} = (4; 3; 2)$.
- b) $\overset{1}{2a} - \overset{1}{3b} = (-7; 1; 21)$.
- c) $\overset{1}{a} \cdot \overset{1}{b} = 10$.
- d) $\cos(\overset{r}{a}, \overset{r}{b}) = -\frac{\sqrt{10}}{7}$.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có $\overset{1}{a} + \overset{1}{b} = (1+3; 2+1; -3+5) = (4; 3; 2)$
- b) Sai: $\overset{1}{2a} - \overset{1}{3b} = (2-9; 4-3; -6-15) = (-7; 1; -21)$
- c) Sai: $\overset{1}{a} \cdot \overset{1}{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 = -10$
- d) Đúng: $\cos(\overset{r}{a}, \overset{r}{b}) = \frac{\overset{1}{a} \cdot \overset{1}{b}}{|\overset{r}{a}| \cdot |\overset{r}{b}|} = \frac{-10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = -\frac{\sqrt{10}}{7}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; -1; 1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) $\overset{uuu}{AB} = (1; 2; 4)$.
- b) $\overset{uuu}{DC} = (1-x_D; -1-y_D; 1-z_D)$.
- c) $\overset{uuu}{DC} = \overset{uuu}{AB}$.
- d) $x_D + y_D + z_D = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

- a) Ta có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2) \Rightarrow \overset{uuu}{AB} = (1; 2; 4)$. Suy ra a) đúng.
- b) Ta có $C(1; -1; 1); D(x_D; y_D; z_D) \Rightarrow \overset{uuu}{DC} = (1-x_D; -1-y_D; 1-z_D)$. Suy ra b) đúng.
- c) Do hình bình hành $ABCD$ có $\overset{uuu}{AB} = \overset{uuu}{DC}$. Suy ra c) đúng.
- d) Do hình bình hành $ABCD$ có $\overset{uuu}{AB} = \overset{uuu}{DC}$.

$$\text{Mà } \overset{uuu}{AB} = (1; 2; 4); \overset{uuu}{DC} = (1-x_D; -1-y_D; 1-z_D) \Rightarrow \begin{cases} 1=1-x_D \\ 2=-1-y_D \\ 4=1-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=0 \\ y_D=-3 \\ z_D=-3 \end{cases}$$

Vậy $D(0; -3; -3)$. Suy ra d) sai.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(3; -7; 4)$ trên trục Oy là điểm $H(a; b; c)$. Khi đó giá trị của $a - b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời:

7			
---	--	--	--

Ta có: Hình chiếu của điểm $M(3; -7; 4)$ trên trục Oy là điểm $H(0; -7; 0)$

$$\Rightarrow a = 0; b = -7; c = 0$$

$$\text{Vậy } a - b + c = 7.$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(0; 1; 2)$, $N(2; 0; 1)$, $P(0; 0; -1)$, $Q(2; 1; 0)$. Điểm nào trong 4 điểm đó thuộc mặt phẳng (Oxy) . Hãy tính tổng $T = 2a + 3b + 4c$ (Giả sử điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) có dạng $H(a; b; c)$)

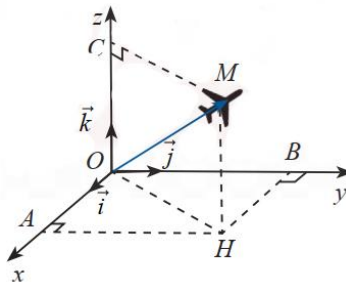
Lời giải

Trả lời:

7			
---	--	--	--

Điểm $Q(2; 1; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) . Suy ra $T = 2a + 3b + 4c = 7$.

Câu 3: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ (như hình vẽ).



Gọi H là hình chiếu vuông góc của $M(a; b; c)$ xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm $S = a + b + c$ (kết quả làm tròn đến 1 chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Trả lời:

8	1	,	9
---	---	---	---

$$\text{Ta có: } OC = MH = OM \cdot \sin(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 50 \cdot \sin 48^\circ \approx 37,16$$

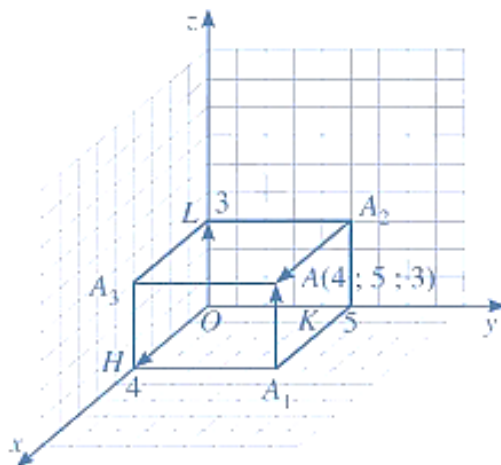
$$OH = OM \cdot \cos(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 50 \cdot \cos 48^\circ = 50 \cdot \cos 48^\circ \approx 33,46$$

$$OA = OH \cdot \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 33,46 \cdot \cos 64^\circ = 33,46 \cdot \cos 64^\circ \approx 14,67$$

$$OB = OH \cdot \cos(90^\circ - (\vec{i}, \overrightarrow{OH})) = 33,46 \cdot \cos(90^\circ - 64^\circ) = 33,46 \cdot \cos 26^\circ \approx 30,07$$

$$\text{Suy ra } M(14,67; 30,07; 37,16) \Rightarrow S = a + b + c = 14,67 + 30,07 + 37,16 = 81,9$$

Câu 4: Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_2A}$ ở Hình 30.



Hình 30

Lời giải

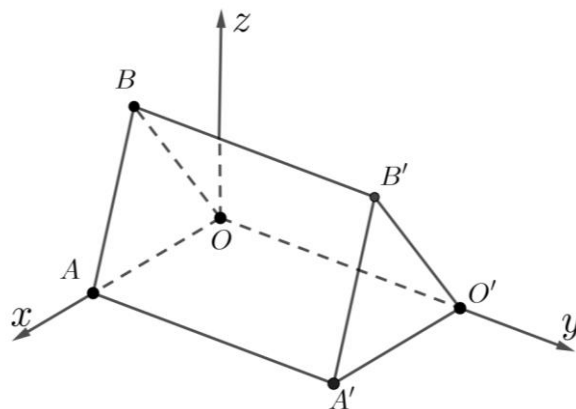
Trong Hình 30, ta có: $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{OH}$ mà $L(0; 0; 3)$ và $H(4; 0; 0)$.

Do đó, $\overrightarrow{A_1A} = (0; 0; 3)$ và $\overrightarrow{A_2A} = (4; 0; 0)$.

Câu 5: Những căn lều gỗ trong Hình 1 được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong Hình 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như Hình 2 (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a + b + c$ (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Vì điểm A' có tọa độ là $(240; 450; 0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450cm và 240cm. Suy ra $A'A = 450\text{cm}$ và $A'O' = 240\text{cm}$. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120; 0; 300)$, do đó $A'B' = |\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{cm})$.

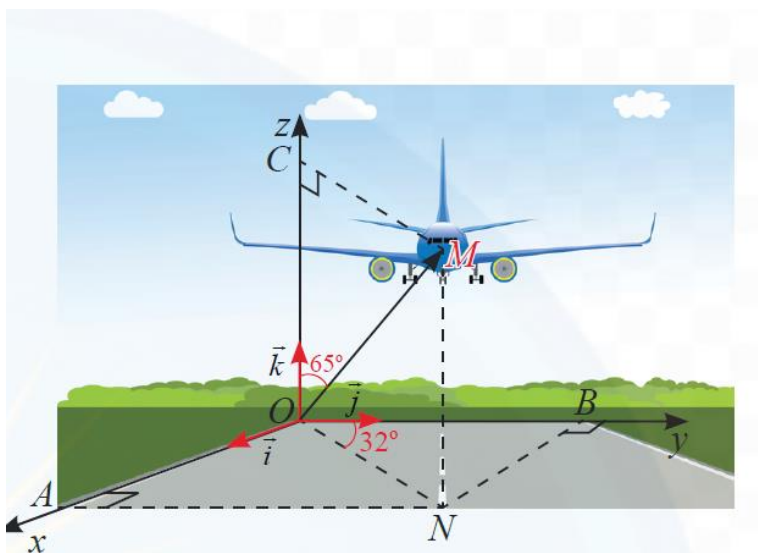
Vì $O'O = A'A = 450\text{cm}$ và O' nằm trên trục Oy nên tọa độ của điểm O' là $(0; 450; 0)$.

Do đó $\overline{O'B'} = (120; 0; 300)$ và $O'B' = |\overline{O'B'}| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323 \text{ (cm)}.$

Vậy mỗi căn lều gỗ có chiều dài là 450cm, chiều rộng là 240cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

$$\Rightarrow a+b+c=1013.$$

Câu 6: Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $NOB = 32^\circ$, $MOC = 65^\circ$. Tìm toạ độ điểm M .



Lời giải

Tam giác OCM vuông tại C có

$$OC = OM \cdot \cos 65^\circ = 14 \cdot \cos 65^\circ \approx 5,9 \text{ v\aa } CM = OM \cdot \sin 65^\circ = 14 \cdot \sin 65^\circ \approx 12,7.$$

$$ON = CM, AN = OB.$$

Có $AON = 90^\circ - BON = 58^\circ$

Tam giác OAN vuông tại A có

$$OA = ON \cdot \cos 58^\circ = 12,7 \cdot \cos 58^\circ \approx 6,7 \text{ và } AN = ON \cdot \sin 58^\circ = 12,7 \cdot \sin 58^\circ \approx 10,8.$$

$$\overrightarrow{OM} = OA\vec{i} + OB\vec{j} + OC\vec{k} = 6,7\vec{i} + 10,8\vec{j} + 5,9\vec{k}.$$

Vậy $M(6, 7; 10, 8; 5, 9)$.

♦Đề 3:

☞ **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;-3)$. M_1 là hình chiếu của M trên mặt phẳng tọa độ Oxy , M_1 có tọa độ là:

- A.** $M_1(0;-2;-3)$. **B.** $M_1(-1;2;3)$. **C.** $M_1(1;-2;0)$. **D.** $M_1(0;2;3)$.

Lời giải

Chọn C

M_1 là hình chiếu M trên mặt phẳng tọa độ Oxy nên $\begin{cases} x_{M_1} = x_M = 1 \\ y_{M_1} = y_M = -2 \end{cases}$.

M_1 thuộc phẳng tọa độ Oxy nên M_1 có tọa độ là: $M_1(1;-2;0)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có $M_1(-1;0;0), M_2(0;2;0), M_3(0;0;-3)$ lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz , tọa độ điểm M là:

- A.** $M_1(1;-2;3)$. **B.** $M_1(-1;2;3)$. **C.** $M_1(-1;2;-3)$. **D.** $M_1(-1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn C

$M_1(-1;0;0), M_2(0;2;0), M_3(0;0;-3)$ lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz

$$\text{ nên } \begin{cases} x_M = x_{M_1} = -1 \\ y_M = y_{M_2} = 2 \\ z_M = z_{M_3} = -3 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2;-3).$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;3)$. Biểu diễn $\overrightarrow{OA}$ theo các véc tơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

A. $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

B. $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

C. $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

D. $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Lời giải

Chọn A

Điểm $A(2;-2;3)$ nên $\overrightarrow{OA} = (2;-2;3)$ do đó $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1;0;-2)$. Xác định tọa độ điểm A biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

- A.** $A(1;0;2)$. **B.** $A(1;0;-2)$. **C.** $A(-1;0;2)$. **D.** $A(-1;0;-2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{OA}(1; 0; -2) \Rightarrow A(1; 0; -2)$$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = 2\vec{j} - \vec{i} + \vec{k}$. Tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là:

- A.** $\vec{u}(2; -1; 1)$. **B.** $\vec{u}(-1; 2; 1)$. **C.** $\vec{u}(2; -1; -1)$. **D.** $\vec{u}(-1; 1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6: Cho $A(1; 1; -2)$ và $B(2; -1; 0)$. Hãy xác định tọa độ của $\overrightarrow{AB}$?

- A.** $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -2)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 2)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (3; 0; -2)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -1; 3)$ và $B(1; 3; -2)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ là

- A.** $\overrightarrow{AB} = (0; 4; -5)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (0; -4; 5)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (2; 4; 5)$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (0; 4; -5).$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (3; 2; -1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A.** $(1; 2; 4)$. **B.** $(-2; -2; 3)$. **C.** $(4; 2; 1)$. **D.** $(2; 2; -3)$.

Lời giải

$$\vec{u} + \vec{v} = (1 + 3; 0 + 2; 2 - 1) = (4; 2; 1).$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (5; -1; 2)$ và $\vec{v} = (-1; 2; 1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} - \vec{v}$ là

- A.** $(4; -1; 1)$. **B.** $(6; -3; 1)$. **C.** $(-6; 3; -1)$. **D.** $(-4; 1; -1)$.

Lời giải

$$\vec{u} - \vec{v} = (5 + 1; -1 - 2; 2 - 1) = (6; -3; 1).$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1; -1; 1), B(5; 0; 2), C(0; 4; 3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A.** $G\left(3; \frac{5}{2}; 3\right)$. **B.** $G(2; -1; 2)$. **C.** $G\left(3; -\frac{5}{2}; 3\right)$. **D.** $G(2; 1; 2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_G = \frac{1+5+0}{3} = 2 \\ y_G = \frac{-1+0+4}{3} = 1 \\ z_G = \frac{1+2+3}{3} = 2 \end{cases}$$

Vậy $G(2;1;2)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -1; 5)$. Tọa độ vectơ $-5\vec{a}$ là

A. $(-10; 5; -25)$

B. $(10; -5; 25)$

C. $(7; 4; 10)$

D. $(-3; 6; 0)$

Lời giải

Ta có $-5\vec{a} = (-5.2; -5.(-1); -5.5) = (-10; 5; -25)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa 2 điểm $M(1; -3; 7)$ và $N(2; 3; -1)$ là

A. 101.

B. 10.

C. $\sqrt{101}$.

D. 11.

Lời giải

Ta có: $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2} = \sqrt{1 + 36 + 64} = \sqrt{101}$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, G lần lượt là trung điểm của AB , CD , MN .

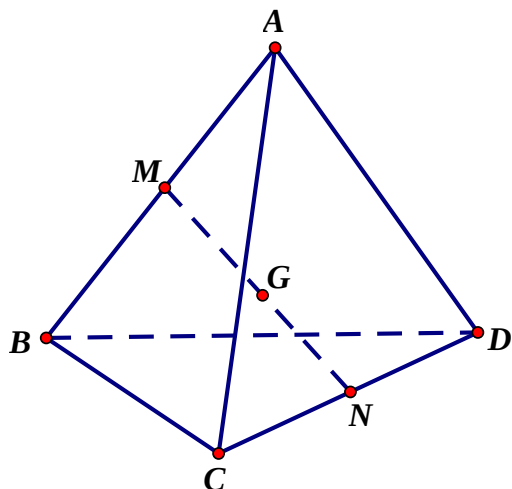
a) $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$.

b) $\vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MN}$.

c) $\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{GC} + \vec{GD}$.

d) $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{MN}$.

Lời giải



a) Đúng: Do M là trung điểm của đoạn AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b) Đúng: Do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.

c) Sai: Do G là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Mà $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$ $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$.

d) Sai: Do $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$
 $= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) + 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MN}$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; 4)$, $B(4; -2; 1)$, $C(3; 4; 7)$

a) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G(\frac{1+4+3}{3}; \frac{2+(-2)+4}{3}; \frac{4+1+7}{3}) = G(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; 4)$.

b) Tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành là $D(0; 8; 10)$.

c) Tọa độ điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MB = 2MA$ là $M(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{10}{3})$.

d) $\cos \hat{BAC} = \frac{11\sqrt{2}}{34}$.

Lời giải

a) Đúng: Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G(\frac{1+4+3}{3}; \frac{2+(-2)+4}{3}; \frac{4+1+7}{3}) = G(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; 4)$$

b) Đúng: Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành $\hat{A}B = \hat{D}C$

$$\hat{A} \begin{cases} 3- & x = 3 \\ 4- & y = -4 \\ 7- & z = -3 \end{cases} \hat{D} \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow D(0; 8; 10)$$

c) Đúng: Gọi $M(x; y; z)$, ta có M thuộc đoạn AB và $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}$

$$\begin{cases} 4-x = -2(1-x) \\ 2-y = -2(2-y) \\ 1-z = -2(4-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{3} \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow M\left(2; \frac{2}{3}; 3\right).$$

d) Sai: $\overrightarrow{AB} = (3; -4; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 2; 3)$, ta có

$$\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-11}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{17}} = -\frac{11\sqrt{2}}{34}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{m} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

a) $\vec{u} = (3; 1; -2)$.

b) $\vec{v} = (2; -1; 0)$.

c) $2\vec{u} = (6; 1; -2)$.

d) $\vec{m} = (0; 2; -1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Ta có $\vec{u} = (3; 1; -2)$. Suy ra a) đúng.

b) Ta có $\vec{v} = (2; 0; -1)$. Suy ra b) sai.

c) Ta có $2\vec{u} = (6; 2; -4)$. Suy ra c) sai.

d) Ta có $2\vec{u} = (6; 2; -4)$, $3\vec{v} = (6; 0; -3)$

Do đó $\vec{m} = 2\vec{u} - 3\vec{v} = (0; 2; -1)$. Suy ra d) đúng.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

- a) Ta có $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$. Suy ra a) đúng.
- b) Ta có $A(1; -2; 3)$, $C(3; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (2; 1; -1)$. Suy ra b) sai.
- c) Do $3\overrightarrow{AC} = (6; 3; -3)$; $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$. Suy ra c) sai.
- d) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$; $\overrightarrow{AC} = (2; 1; -1) \Rightarrow \frac{-3}{2} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Suy ra d) đúng.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(600; 400; 8)$ đến điểm $B(800; 500; 10)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là gì?

Lời giải

Đáp số: $C(1000; 600; 12)$.

Vì máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay trong 10 phút tiếp theo nên dễ thấy máy bay sẽ đến vị trí C sao cho B là trung điểm AC . Khi đó $C(1000; 600; 12)$.

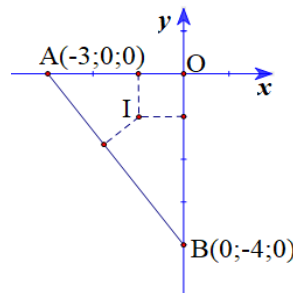
Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -4; 0)$. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác OAB . Tính độ dài đoạn thẳng IJ .

Lời giải

Đáp số: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (-3; 0; 0) \Rightarrow OA = 3$; $\overrightarrow{OB} = (0; -4; 0) \Rightarrow OB = 4$; $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 0) \Rightarrow AB = 5$.

$\triangle OAB$ vuông tại O , nằm trong mặt phẳng (Oxy) .



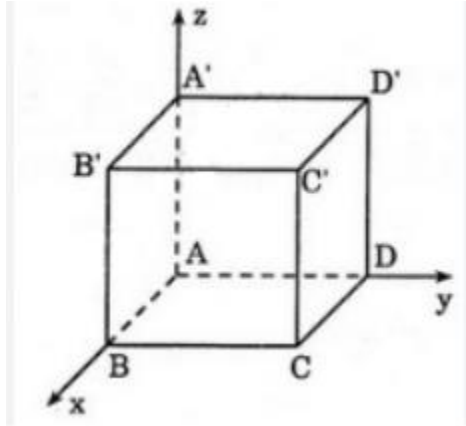
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6; \quad p = \frac{OA + OB + AB}{2} = 6 \Rightarrow r = \frac{S_{OAB}}{p} = 1.$$

$\Rightarrow I(-1; -1; 0)$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle OAB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên J là trung điểm của $AB \Rightarrow J\left(-\frac{3}{2}; -2; 0\right)$.

$$\overline{IJ} = \left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right) \Rightarrow IJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0), B(2;0;0); D(0;2;0); A'(0;0;2)$. Tìm tọa độ điểm C'



Lời giải

Đáp số: $C'(2;2;2)$.

Ta có: $A(0;0;0), B(2;0;0); D(0;2;0); A'(0;0;2)$

$\Rightarrow C(2;2;0); B'(2;0;2); D'(0;2;2); C'(2;2;2)$.

Câu 4: Gạch ống là một sản phẩm được tạo hình thành từ đất sét và nước, được kết hợp lại với nhau theo một công thức chung hợp lý mới có thể tạo ra hồ hợp dẻo quánh, sau đó chúng được đổ vào khuôn, rồi đem phơi hoặc sấy khô và cuối cùng là đưa vào lò nung. Một viên gạch hình hộp chữ nhật có kích thước dài $20cm$, rộng $8cm$. Bên trong có bốn lỗ hình trụ bằng nhau có đường kính $2,5cm$.



Tính thể tích đất sét để làm một viên gạch. (Lấy $\pi = 3,14$).

Lời giải

Đáp số: 887,5

Thể tích viên gạch không tính bốn lỗ hình trụ là: $V_1 = 8.8.20 = 1280(cm^2)$

Thể tích bốn lỗ hình trụ là: $V_2 = 4.\pi.\left(\frac{2,5}{2}\right)^2.20 = 392.5(cm^2)$

Thể tích viên gạch viên gạch là: $V_1 - V_2 = 1280 - 392.5 = 887.5(cm^2)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ biết $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$.

$H(x_0; y_0; z_0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 3,09 .

$$\overrightarrow{BC} = (1; -1; 3); \overrightarrow{BH} = (x_0; y_0 - 2; z_0)$$

$$\text{Vì } B, C, H \text{ thẳng hàng nên } \overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}, t \in R. \text{ Ta có } \begin{cases} x_0 = t \\ y_0 - 2 = -t \\ z_0 = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Nên $H(t; 2-t; 3t) \in BC$.

Khi đó: $\overrightarrow{AH} = (t-2; 2-t; 3t)$.

Mà H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC nên

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t-2-2+t+9t=0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{11}.$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{4}{11}; \frac{18}{11}; \frac{12}{11}\right) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = \frac{34}{11} \approx 3,09.$$

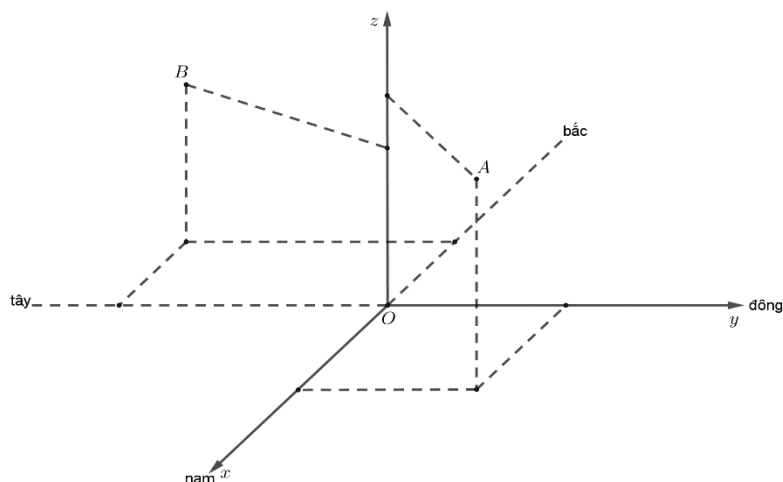
Câu 6: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2,5 km về phía nam và 2 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1,5 km về phía bắc và 3 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,6 km. Người ta cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu cho hai khinh khí cầu sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó tới hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Giả sử vị trí cần tìm cách địa điểm hai khinh khí cầu bay lên là a km theo hướng nam và b km theo hướng tây. Tính tổng $2a + 3b$.

Lời giải

Đáp số: 3

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía

đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ), đơn vị đo lấy theo kilômét.



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai ở vị trí A, B . Ta có $A\left(\frac{5}{2}; 2; \frac{4}{5}\right), B\left(-\frac{3}{2}; -3; \frac{3}{5}\right)$.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxy) , $C\left(\frac{5}{2}; 2; -\frac{4}{5}\right)$. Khi đó $I = BC \cap (Oxy)$

.

$$\overrightarrow{BC} = \left(4; 5; -\frac{7}{5}\right). \quad I \in (Oxy) \Rightarrow I(x; y; 0) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \left(x + \frac{3}{2}; y + 3; -\frac{3}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI} \text{ cùng phương nên } \frac{x + \frac{3}{2}}{4} = \frac{y + 3}{5} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{7}{5}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{14} \\ y = -\frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{14} \\ b = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 3.$$