

***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ Đề 1:

☞ Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ trên trục Ox có tọa độ là
A. $(0; 2; 0)$. **B.** $(0; 0; 5)$. **C.** $(1; 0; 0)$. **D.** $(0; 2; 5)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ trên trục Ox có tọa độ là $(1; 0; 0)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là
A. $(3; 0; -1)$. **B.** $(0; 1; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0; 1; 0)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là
A. $(3; -1; 0)$. **B.** $(0; 0; 1)$. **C.** $(0; -1; 0)$. **D.** $(3; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0; 0; 1)$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là
A. $(1; -2; 3)$. **B.** $(1; 2; -3)$. **C.** $(-1; -2; -3)$. **D.** $(-1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxz) là $(1; 0; 3)$. Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là $(1; -2; 3)$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ véc tơ $\vec{u}$ là

A. $(-2; 3; 1)$.

B. $(2; 3; -1)$.

C. $(2; -3; -1)$.

D. $(2; 3; 1)$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3; -1)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

A. 26.

B. 22.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\sqrt{22}$.

Lời giải

$$\overline{AB} = (2; 3; -3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} - \vec{v}$ là

A. $(3; 4; -3)$.

B. $(-1; 2; -3)$.

C. $(-1; 2; -1)$.

D. $(1; -2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u} - \vec{v} = (1 - 2; 3 - 1; -2 + 1) = (-1; 2; -1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$ cho hai vector $\vec{u} = (1; 2; -2)$ và $\vec{v} = (2; -2; 3)$. Tọa độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là

A. $(-1; 4; -5)$.

B. $(1; -4; 5)$.

C. $(3; 0; 1)$.

D. $(3; 0; -1)$.

Lời giải

Tọa độ của vector $\vec{u} + \vec{v} = (3; 0; 1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4; -2; 10)$

B. $(1; 3; 2)$

C. $(2; 6; 4)$

D. $(2; -1; 5)$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB, \text{ ta có tọa độ điểm } I \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1. \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$$

Vậy $I(2; -1; 5)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vector $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c} = (2; 6; -1)$.

B. $\vec{c} = (4; 6; -1)$.

C. $\vec{c} = (4; -6; -1)$.

D. $\vec{c} = (2; -6; -1)$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2; -6; -1)$$

Vậy chọn đáp án **D**

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vector $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 0; 3)$ là
A. $(2; 3; -1)$. **B.** $(3; 5; -2)$. **C.** $(2; -3; -1)$. **D.** $(3; -5; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (3; -5; -1)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $B(-2; 2; 0)$ và $C(4; 1; -1)$. Trên mặt phẳng (Oxz) , điểm nào dưới đây cách đều ba điểm A , B , C .
A. $M\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $N\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. **C.** $P\left(\frac{3}{4}; 0; \frac{-1}{2}\right)$. **D.** $Q\left(\frac{-3}{4}; 0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có: $A(2; 2; 2)$ và $PA = PB = PC = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

👉 Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn véc tơ $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (5; 7; 0)$, $\vec{c} = (3; -2; 4)$ và $\vec{d} = (4; 12; -3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba véc tơ không đồng phẳng.
- b) $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{d} - 2\vec{c}$.
- c) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{d} + \vec{c}|$.
- d) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (-7; 5; -1) \Rightarrow \vec{c} \cdot [\vec{a}, \vec{b}] = -35 \neq 0$ mệnh đề A đúng.

$2\vec{a} + 3\vec{b} = (19; 27; 2)$, $\vec{d} - 2\vec{c} = (-2; 16; -11)$ mệnh đề B sai.

$\vec{a} + \vec{b} = (7; 10; 1)$, $\vec{d} + \vec{c} = (7; 10; 1)$ mệnh đề C đúng.

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (4; 12; -3) \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \text{ mệnh đề D đúng.}$$

Câu 2: Biết $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4), \vec{b} = (-1; 2; 3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $5z - x = 0$.
- b) $7x - y = 0$.
- c) $5y + 7z = 0$.
- d) $7x + y = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

Theo giả thiết ta có $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4), \vec{b} = (-1; 2; 3)$ nên

$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 3y + 4z = 0 \\ -1x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 3y + 4z = 0 \\ 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x + 3y + 4 \cdot \frac{-5}{7}y = 0 \\ z = \frac{-5}{7}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + y = 0 \\ 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

Câu 3: Cho tam giác ABC , biết $\vec{OA} = (2; 1; -3), \vec{OB} = (4; 3; -2), \vec{OC} = (0; 2; -1)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (xOy) tại điểm $M(x_M; y_M; z_M)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $BAC = 90^\circ$
- b) Tính chu vi tam giác ABC bằng $3(2 + \sqrt{2})$ (đơn vị dài)
- c) $x_M = y_M = 0$
- d) $x_M + y_M + z_M = 10$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a). Từ giả thiết ta được $A(2; 1; -3), B(4; 3; -2), C(0; 2; -1)$

nên $\vec{AB} = (2; 2; 1), \vec{AC} = (-2; 1; 2)$

Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2(-2) + 2 + 2 = 0$ vậy $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ nên tam giác ABC vuông tại A : $BAC = 90^\circ$

b) Ta có $AB = 3, AC = 3, BC = 3\sqrt{2}$ nên chu vi của tam giác ABC :

$$AB + AC + BC = 3(2 + \sqrt{2}) \text{ (đơn vị dài)}$$

c) Điểm $M \in (xOy)$ nên $z_M = 0$.

d) Giả sử điểm M chia đoạn AB theo tỷ số $k(k \neq 1)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_M = \frac{2-4k}{1-k} \\ y_M = \frac{1-3k}{1-k} \\ z_M = \frac{-3+2k}{1-k} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} (\neq 1) \Leftrightarrow M(8; 7; 0)$$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;1;0), B(1;1;3), C(2;-1;3), D(1;-1;0)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối đôi một bằng nhau.
- b) Góc giữa 2 đường thẳng AB và CD là $\varphi = \arccos 0,3$
- c) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD bằng 3
- d) Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{14}}{2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Áp dụng công thức tính độ dài đoạn thẳng ta tính được

$$AB = CD = \sqrt{10}; AC = BD = \sqrt{13}; AD = BC = \sqrt{5}$$

Vậy tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối đôi một bằng nhau

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 3), \overrightarrow{CD} = (-1; 0; -3)$ gọi φ là góc giữa AB và CD ,
 $\cos \varphi = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{|-8|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{4}{5}$

Vậy góc giữa AB và CD là $\varphi = \arccos 0,8$

c) Lấy I trung điểm của AB, J là trung điểm của CD

$\triangle ACD = \triangle BCD$ (c.c.c) nên 2 đường trung tuyến tương ứng $AJ = BJ$. Vậy $\triangle AIB$ cân đỉnh J nên IJ vuông góc với AB tại I . Tương tự $\triangle ICD$ cân đỉnh I nên IJ vuông góc với CD tại J . Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD ta được $I\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$ và $J\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{3}{2}\right)$
 vậy khoảng cách giữa AB và CD chính là độ dài đoạn vuông góc chung IJ .

$$d(AB; CD) = II = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + [1 - (-1)]^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = 2$$

d) Theo kết quả câu 3. Lấy G là trung điểm của IJ ta được:

$$GA = GB \text{ vì } \triangle GAB \text{ cân đỉnh } G$$

$$GC = GD \text{ vì } \triangle GCD \text{ cân đỉnh } G$$

$$\text{Mà } GA = \sqrt{GI^2 + IA^2} \text{ mà } GI = GJ, IA = ID$$

$$GC = \sqrt{GJ^2 + ID^2}$$

Do đó $GA = GB = GC = GD = R$

Do đó G : Tâm mặt cầu ngoại tuyến khối tứ diện $ABCD : G\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$ và bán kính của mặt cầu

$$\text{là } R = GA = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(G : cũng chính là trọng tâm của khối tứ diện đều $ABCD$)

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với: $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (3; -4; 6)$. Tìm độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC

Lời giải

Ta có

$$AB^2 = 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9, AC^2 = 3^2 + (-4)^2 + 6^2 = 61, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 3 + (-2)(-4) + 2 \cdot 6 = 23.$$

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 61 + 9 - 2 \cdot 23 = 24.$$

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9 + 61}{2} - \frac{24}{4} = 29.$$

$$\text{Vậy } AM = \sqrt{29}.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(1; 1; 0), C(0; 1; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành?

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

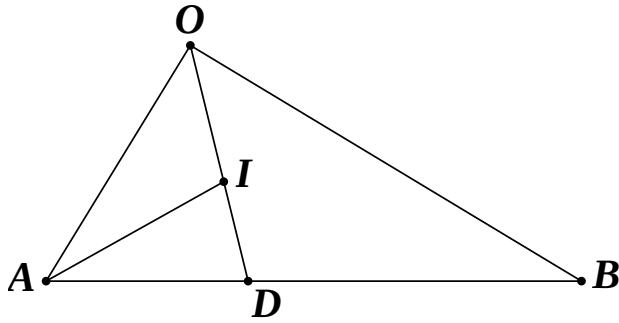
Ta có $\overrightarrow{AD} = (x - 1; y; z)$ và $\overrightarrow{BC} = (-1; 0; 1)$.

Suy ra $x = 0; y = 0; z = 1$.

Vậy $D(0; 0; 1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a - b + c$ bằng

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $OA = 3$, $OB = 4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O , ta có $\overrightarrow{DA} = -\frac{DA}{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{OA}{OB} \cdot \overrightarrow{DB}$, suy ra

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7}. \text{ Do đó } D\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}; 0\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}; 2\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}$.

$$\overrightarrow{ID} = -\frac{AD}{AO} \cdot \overrightarrow{IO} = -\frac{5}{7} \overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{7}{12} \overrightarrow{OD} \Rightarrow D(1; 1; 0)$$

Do đó $a - b + c = 0$.

Câu 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $AMB = BMC = CMA = 90^\circ$?

Lời giải

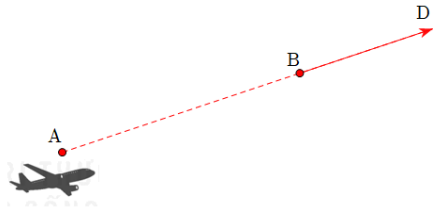
Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

Do $AMB = BMC = CMA = 90^\circ$ nên các tam giác $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMA$ vuông tại M .

Khi đó $IM = \frac{AB}{2}$; $JM = \frac{BC}{2}$; $KM = \frac{AC}{2}$. Mặt khác $AB = BC = AC = 2\sqrt{2}$.

Vậy $MI = MJ = MK = \sqrt{2}$. Khi đó M thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp đáy IJK và cách (IJK) một khoảng không đổi là $\sqrt{2}$. Khi đó có hai điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 5: Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước, ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo $D(x; y; z)$ khi đó $x + y + z = ?$



Lời giải

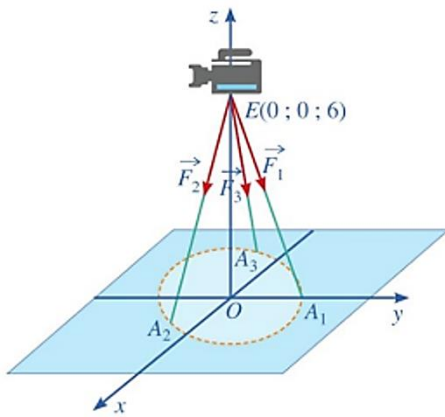
Gọi $D(x; y; z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút bay tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB = BD$. Do đó, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} = (140; 50; 1)$.

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{BD} = (x - 940; y - 550; z - 8) \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 140 \\ y - 550 = 50 \\ z - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}$$

Vậy $D(1080; 600; 9)$. Vậy tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $(1080; 600; 9)$.

$$x + y + z = 1689$$

Câu 6: Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0; 0; 6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0; 1; 0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N . Tìm được tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ khi đó tích vô hướng của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ bằng?



Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{EA_1} = (0; 1; -6); \overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6\right); \overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6\right) \Rightarrow EA_1 = EA_2 = EA_3 = \sqrt{37}$$

$$|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| \text{ vì đèn cân bằng và trọng lực của đèn tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ}$$

Do đó:

$$\vec{F}_1 = k\vec{EA}_1 = (0; k; -6k)$$

$$\vec{F}_2 = k\vec{EA}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k; -\frac{1}{2}k; -6k \right)$$

$$\vec{F}_3 = k\vec{EA}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k; -\frac{1}{2}k; -6k \right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -18k)$$

$$\text{Mà } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P} = (0; 0; -300) \Rightarrow -18k = 300 \Leftrightarrow k = \frac{50}{3}$$

$$\text{Vậy } \vec{F}_1 = \left(0; \frac{50}{3}; -100 \right); \vec{F}_2 = \left(\frac{25\sqrt{3}}{3}; -\frac{50}{6}; -100 \right); \vec{F}_3 = \left(-\frac{25\sqrt{3}}{3}; -\frac{50}{6}; -100 \right)$$

$$\text{Suy ra } \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \frac{88750}{9}$$

♦ **Đề 2:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A.** $(0; 2; -3)$. **B.** $(1; 0; -3)$. **C.** $(1; 2; 0)$. **D.** $(1; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Do điểm $A(1; 2; -3)$ nên hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(1; 2; 0)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

- A.** $(0; 1; 0)$. **B.** $(2; 1; 0)$. **C.** $(0; 1; -1)$. **D.** $(2; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(2; 1; -1)$ lên mặt phẳng (Ozx) là điểm có tọa độ $(2; 0; -1)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector $\vec{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(-1; -1; -3)$ **B.** $(3; 1; 1)$ **C.** $(1; 1; 3)$ **D.** $(3; 3; -1)$

Lời giải

Chọn C

$$\vec{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2)) \text{ hay } \vec{AB} = (1; 1; 3).$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vector $\overline{AB}$

có tọa độ là

A. $(1; 2; 3)$

B. $(-1; -2; 3)$

C. $(3;5;1)$

D. $(3;4;1)$

Lời giải

Chọn A

$$\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1; 2; 3)$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vector $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3; 4; 1)$.

B. $(-1; -2; 3)$.

C. $(3; 5; 1)$.

D. $(1; 2; 3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3).$$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

A. $(10; -2; 13)$.

B. $(-2; 2; -7)$.

C. $(-2; -2; 7)$.

D. $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\vec{a} = (4; -6; 6), 3\vec{b} = (0; 6; -3), -2\vec{c} = (-6; 2; -10) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7).$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 3; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; 1; 2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G(2; 1; 2)$.

B. $G(6; 3; 6)$.

C. $G\left(3; \frac{2}{3}; 3\right)$.

D. $G(2; -1; 2)$.

Lời giải

Tọa độ trọng tâm G là

$$\begin{cases} x_G = \frac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{3-1+1}{3} = 1 \\ z_G = \frac{4+0+2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; 2).$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

A. 120° .

B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{i} = (1; 0; 0).$$

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}.$$

Câu 10: Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$.

D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ } \vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3).$$

$$\text{Do đó, } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1.$$

Câu 11: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

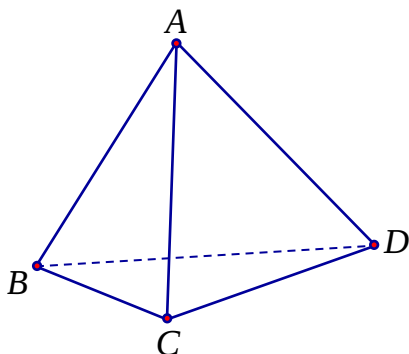
A. $AB \perp BD$.

B. $AB \perp BC$.

C. $AB \perp AC$.

D. $AB \perp CD$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (0; 0; -4), \overrightarrow{AC} = (1; 0; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 \neq 0 \Rightarrow AB \text{ và } AC \text{ không vuông góc.}$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các vec tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\vec{c} \perp \vec{b}$.

b) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

c) $\vec{a} \perp \vec{b}$.

d) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = 1$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

Ta có: $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2$ nên $\vec{c} \not\perp \vec{b}$ nên a sai

$$|\vec{c}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1+1=0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = 0$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các vectơ $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -3)$, $\vec{u} = (11; -6; 5)$, $\vec{v} = (13; -7; 4)$, $\vec{n} = (5; 0; -6)$, $\vec{m} = (7; -10; 12)$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

b) $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

c) $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

d) $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

• $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 3(3; -2; 1) - 2(-1; 1; -2) + (2; 1; -3) = (13; -7; 4) = \vec{v}$. Nên a đúng.

• $2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = 2(3; -2; 1) + 3(-1; 1; -2) + (2; 1; -3) = (5; 0; -7) \neq \vec{n}$. Nên b sai.

• $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = 2(3; -2; 1) - 3(-1; 1; -2) + (2; 1; -3) = (11; -6; 5) = \vec{u}$. Nên c đúng.

• $3\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c} = 3(3; -2; 1) - 2(-1; 1; -2) - 2(2; 1; -3) = (7; -10; 13) \neq \vec{m}$. Nên d sai.

Câu 3: Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

b) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

c) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

- Xét a: $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ đúng.
- Xét b: $\vec{a} = 2(1; -1; -2) \neq \vec{b} = (1; -1; 1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. b sai.
- Xét c: $|\vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ đúng
- Xét d: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ đúng

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4; 2; -1)$, $B(1; -1; 2)$ và $C(0; -2; 3)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\overline{AB} = (-3; -3; 3)$
b) $|\overline{AB}| = 3\sqrt{3}$
c) Tọa độ điểm M sao cho $\overline{AB} + \overline{CM} = \vec{0}$ là $(3; 1; 0)$
d) Tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) , sao cho A, B, N thẳng hàng là $(3; 1; 0)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

- a) b) $\overline{AB} = (1-4; -1-2; 2+1) = (-3; -3; 3) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$
c) Gọi $M(x; y; z)$ thì $\overline{MC} = (-x; -2-y; 3-z)$.

$$\text{Vì } \overline{AB} + \overline{CM} = \vec{0} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{MC} \Rightarrow \begin{cases} -x = -3 \\ -2-y = -3 \\ 3-z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1; 0).$$

- d) Vì N thuộc mặt phẳng (Oxy) nên tọa độ điểm N là $N(x; y; 0)$

Ta có: $\overline{AN}(x-4; y-2; 1); \overline{BN}(x-1; y+1; -2)$

Để A, B, N thẳng hàng thì hai vector $\overline{AN}, \overline{BN}$ cùng phương. Do đó, $\overline{AN} = k\overline{BN}$ (với k là số thực bất kì)

$$\text{Suy ra, } \begin{cases} x-4 = k(x-1) \\ y-2 = k(y+1) \\ 1 = -2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-4 = -\frac{1}{2}(x-1) \\ y-2 = -\frac{1}{2}(y+1) \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } N(3; 1; 0)$$

Câu 5: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -2; 1); B(1; 0; -2); C(3; 1; -2); D(-2; -2; -1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a). Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Tam giác ACD là tam giác vuông tại A .

c) Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tù.

d) Tam giác ABD là tam giác cân tại B .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; -3) ; \overrightarrow{CD} = (-5; -3; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3; 3; -3) ; \overrightarrow{BD} = (-3; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-2; 0; -2)$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -6; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) = 0.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng hay bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng. Vậy đáp án A sai.

$$\text{Lại có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + (-3) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow AC \perp AD.$$

$\Rightarrow$ tam giác ACD là tam giác vuông tại A . Vậy đáp án B đúng.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = -14 < 0 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) < 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ là góc tù. Vậy đáp án C đúng.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{14} \text{ hay } AB = BD \Rightarrow \text{tam giác } ABD \text{ là tam giác cân tại } B. \text{ Vậy đáp án D đúng.}$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, Tam giác ABC với $A(1; -3; 3)$; $B(2; -4; 5)$, $C(a; -2; b)$ nhận điểm $G(1; c; 3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a + b + c$ bằng.

Lời giải

$$\begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a + b + c = -2$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -2)$, $B(2; -3; 5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là $(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng?

Lời giải

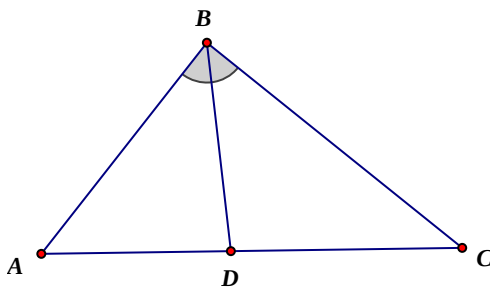
Gọi $M(x; y; z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2(2-x) \\ 1-y = -2(-3-y) \\ -2-z = -2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Suy ra $a+3b+c=0$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a+b+2c$ bằng

Lời giải



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x;y;z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*).

Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$\text{Do đó (*)} \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a+b+2c = 5.$$

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm $a+b+c$

Lời giải

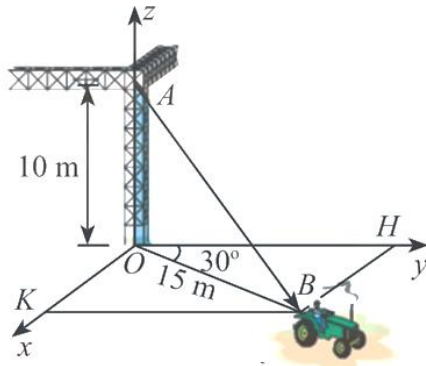
Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4;1;1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD+BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.3.(AD+3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có
$$\begin{cases} a-1=\frac{4}{3} \\ b-2=\frac{1}{3} \\ c-1=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{3} \\ b=\frac{7}{3} \\ c=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=6.$$

Câu 5: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như Hình với độ dài đơn vị trên các trục toạ độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}=(a;b;c)$, khi đó $a+c=?$



Lời giải

$$\overrightarrow{OA}=10\vec{k} \Rightarrow A(0;0;10)$$

$$\text{Ta có: } OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

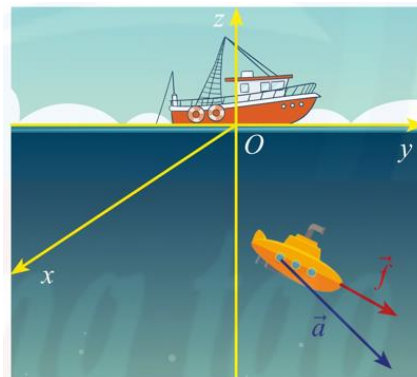
$$OK = OB \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$$

$$\text{Vậy } a+c=2,5$$

Câu 6: Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f}=(5;4;-2)$ giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a}=(70;20;-40)$. Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



Lời giải

Công sinh bởi lực $\vec{f}$ là: $A = \vec{f} \cdot \vec{a} = 5.70 + 4.20 - 2 \cdot (-40) = 510J$

•Đề 3:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Lời giải

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(-1; 2; -3).$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là :

- A.** $I(-2; 2; 1)$. **B.** $I(1; 0; 4)$. **C.** $I(2; 0; 8)$. **D.** $I(2; -2; -1)$.

Lời giải

Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$.

$$\text{Trung điểm } I \text{ có tọa độ: } \begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(-2) + 2}{2} = 0 \\ \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4).$$

Câu 3: Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3), B(-1; 2; 5), C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A.** $G(0; 0; 3)$. **B.** $G(0; 0; 9)$. **C.** $G(-1; 0; 3)$. **D.** $G(0; 0; 1)$.

Lời giải

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC bằng

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 - 1 + 0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2 + 2 + 0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3 + 5 + 1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0; 0; 3)$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

- A.** $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4; 9; 8)$.
C. $B(5; 3; -7)$. **D.** $B(5; -3; -7)$.

Lời giải

Giả sử $B(x_B; y_B; z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}. \text{ Vậy } B(5; -3; -7).$$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$.

Câu 6: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ **B.** $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ **C.** $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ **D.** $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

Khi đó: $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Lời giải

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$.

Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow (-1).1 + 0.1 + 1.1 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

Nên diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 9: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $O(0;0;0)$, $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tất cả giá trị của m để 4 điểm O, A, B, C đồng phẳng?

- A.** $m=14$. **B.** $m=-14$. **C.** $m=7$. **D.** $m=-7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB} = (1;2;1)$, $\overrightarrow{OC} = (4;3;m)$. Bốn điểm O, A, B, C đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}].\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 5.4 - 2.3 - 1.m = 0 \Leftrightarrow m = 14$.

Vậy $m = 14$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2;1;-1)$; $\vec{b} = (1;3;m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- A.** $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-2$

Lời giải

$$(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v} = 1$.

- A.** $m=4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Ta có: $\vec{u}.\vec{v} = 1 \Leftrightarrow 3 - m = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; -2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

- A.** $x + y = 1$. **B.** $x + y = 17$. **C.** $x + y = -\frac{11}{5}$. **D.** $x + y = \frac{11}{5}$.

Lời giải

Có $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (x+1; y-2; 1)$.

A, B, C thẳng hàng $\hat{U} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\hat{U} \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \hat{U} \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ P } x + y = 1.$$

👉 Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}(1; -2; 0)$ và $\vec{b}(-2; 3; 1)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\vec{a}\vec{b} = -8$.
- b) $2\vec{a} = (2; -4; 2)$.
- c) $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; -1)$.
- d) $|\vec{b}| = 14$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$\vec{a}\vec{b} = -8$$

$$2\vec{a} = (2; -4; 0)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; 1)$$

$$|\vec{b}| = 14$$

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (2; -1; -1)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Vec tơ cùng vuông góc với vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có tọa độ bằng $(-5; -7; -3)$.
- b) Vector $\vec{a}$ không cùng phương với vector $\vec{b}$.
- c) Vector $\vec{a}$ không vuông góc với vector $\vec{b}$.
- d) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------------	---------------	---------------	----------------

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = (5; 7; 3)$ nên **a** sai.

Do $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{-1}$ nên vector $\vec{a}$ không cùng phương với vector $\vec{b}$ nên **b** sai.

Do $\vec{a}\vec{b} = 1.2 + (-2)(-1) + 3(-1) = 1$ nên vector $\vec{a}$ không vuông góc với vector $\vec{b}$ nên **c** sai.

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ **d** đúng.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm: $A(1; -1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(1; 0; 1)$.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tam giác ABC vuông tại A .
- b) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- c) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

d) B là trung điểm của AC .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; 1; 0)$ mà $\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \neq 0$ nên tam giác ABC không vuông tại A .

Trung điểm AC là điểm $I(1; 0; 1) \neq B$

Câu 4: Trong hệ trục $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Diện tích của tam giác ABC bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)

b) Gọi $D(x; y; z)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi đó $x + y + z = 3$

c) Độ dài đường cao của tam giác ABC hạ từ A bằng $AH = \frac{\sqrt{30}}{5}$ (đơn vị dài)

d) Thể tích của khối chóp $SABCD$ với đỉnh $S(0; 3; 4)$ bằng 2 (đvtt)

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{AC} = (1; 1; 1)$

$$\text{Tính } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1; 2; -1) \neq \vec{0}$$

Do đó: 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (đvdt)}$$

b) $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}. \text{ Gọi } D(x; y; z) \text{ ta có: } \overrightarrow{AD} = (x-1; y; z); \overrightarrow{BC} = (2; 1; 0)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Đáp số: $D(3; 1; 0)$

$$\text{c) Diện tích } \triangle ABC = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{6}}{BC}. \text{ Ta có } BC = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{30}}{5} \text{ (đơn vị dài)}$$

d) Thể tích của khối chóp $SABCD = V$

$$\text{Ta có } V = 2V_{SABC} = \frac{1}{3} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AS}|$$

Tính $\overrightarrow{AS} = (-1; 3; 4)$ do kết quả câu 1

$$\text{Nên } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \overrightarrow{AS} = 1 + 6 - 4 = 3 > 0$$

Do đó $V = 1$ (đvtt)

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a + b + c = ?$

Lời giải

$$\text{Gọi điểm } M(x; y; z). \text{ Khi đó: } \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2(-2 - x) \\ y - 2 = 2(-1 - y) \\ z - 1 = 2(4 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Vậy $M(0; 0; 3)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Lời giải

$$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2); \overrightarrow{NP}(2; m-2; 1).$$

$$\text{Tam giác } MNP \text{ vuông tại } N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m - 2 = -2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5; 1; 5)$; $B(4; 3; 2)$; $C(-3; -2; 1)$. Điểm $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a + 2b + c = 3.$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 1; 2)$, $\vec{v} = (-1; m; m-2)$. Khi $[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{14}$ thì tổng tất cả các giá trị của m thỏa mãn bằng?

Lời giải

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (-m-2; -m; m+1) \Rightarrow \|\vec{u}, \vec{v}\| = \sqrt{(m+2)^2 + m^2 + (m+1)^2} = \sqrt{3m^2 + 6m + 5}$$

$$|[\vec{u}, \vec{v}]| = \sqrt{14} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 5 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

$$S = -2$$

Câu 5: Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a} = (300; 200; 400)$. Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A .



Tính tốc độ của máy bay B .

Lời giải

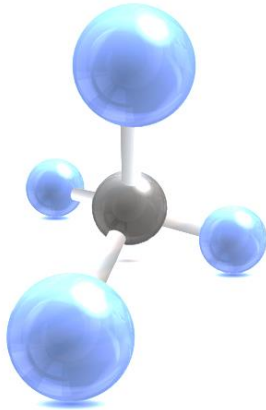
$$\text{Ta có: } 3\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.300 = x \\ 3.200 = y \\ 3.400 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 900 \\ y = 600 \\ z = 1200 \end{cases} \Rightarrow \vec{b} = (900; 600; 1200)$$

$$\text{Tốc độ của máy bay } B \text{ là: } |\vec{b}| = \sqrt{900^2 + 600^2 + 1200^2} \approx 1615,55 \text{ km/h}$$

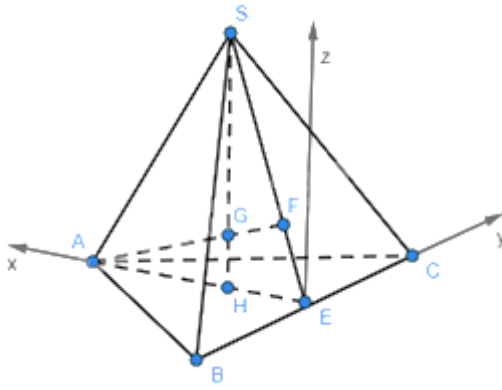
Câu 6: Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó.

Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện.

Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết $H-C-H$ là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Tìm độ lớn góc liên kết này.



Lời giải



Từ hình vẽ ta thấy góc liên kết là góc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS})$

Ta có: $AE \perp BC, SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AE \\ SH \perp BC \end{cases}$ nên ta có hệ trục tọa độ như hình với E trùng với gốc tọa độ O

Giả sử các cạnh của tứ diện có độ dài là a

$$\text{Ta có: } SE = AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$$

$$HE = \frac{AE}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow H\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$$

$$SH = \sqrt{SE^2 - HE^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\text{Lại có: } \frac{FE}{SE} = \frac{HE}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow FH \parallel SA \text{ và } AF \text{ cắt } SH \text{ tại } G \text{ nên } \frac{GH}{GS} = \frac{GF}{GE} = \frac{FH}{SA} = \frac{HE}{AE} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow GH = \frac{1}{4}SH = \frac{1}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{GA} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; -\frac{a\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow GA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\overrightarrow{GS} = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{4}\right) \Rightarrow GS = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS}) = \frac{-\frac{a\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GS}) \approx 109,5^\circ$$