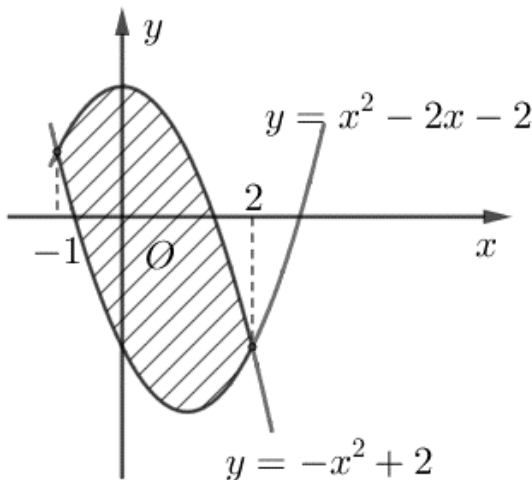


***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ **Đề 1:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng:



A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$$\int_{-1}^2 [(-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 2: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

C. $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

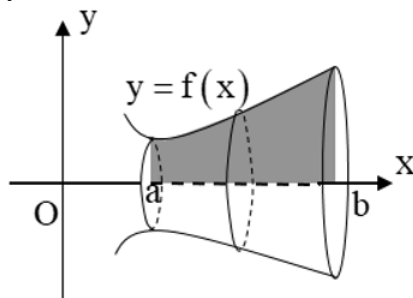
D. $V = \pi \int_a^b f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

Công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, xung quanh trục Ox là $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ có đồ thị như hình vẽ. Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây:



- A.** $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $S = \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $S = \pi \int_a^b f(x) dx$. **D.** $S = \int_a^b \pi^2 f^2(x) dx$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ quanh trục Ox được tính theo công thức $S = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 3$.

- A.** e^3 . **B.** $e^3 - 1$. **C.** $e^2 - 1$. **D.** $e(e^2 - 1)$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 3$ là $S = \int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 = e^3 - 1$.

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$; $y = x$ và hai đường thẳng $x = 2; x = 3$ bằng $a \ln 2 + b$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A.** 2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$; $y = x$ và hai đường thẳng $x = 2$; $x = 3$ là

$$S = \int_2^3 \left| \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} - x \right| dx = \int_2^3 \left| \frac{-x + 3}{x - 1} \right| dx = \int_2^3 \left| -1 + \frac{2}{x - 1} \right| dx =$$

$$= \left(-x + 2 \ln |x - 1| \right) \Big|_2^3 = (-3 + 2 \ln 2) + 2 = -1 + 2 \ln 2$$

Vậy $a = 2; b = -1 \Rightarrow a + b = 1$.

- Câu 6:** Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng
- A.** 8. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S = \int_0^2 |3x^2 + 1| dx = \int_0^2 (3x^2 + 1) dx = \left(x^3 + x \right) \Big|_0^2 = 10$.

- Câu 7:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, $y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là
- A.** $\ln 3$ **B.** $\ln 5$ **C.** $\ln 2$ **D.** $\ln 7$

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, $y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là:

$$S = \int_2^4 \left| \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - (x - 1) \right| dx = \int_2^4 \left| -\frac{1}{x - 1} \right| dx = \int_2^4 \frac{1}{x - 1} dx = \ln |x - 1| \Big|_2^4 = \ln \frac{4 - 1}{2 - 1} = \ln 3.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, $y = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 2, x = 4$ là $S = \ln 3$.

- Câu 8:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 + 11x - 6$, $y = 6x^2$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là
- A.** $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{18}{23}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 11x - 6 = 6x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$

Đặt $h(x) = (x^3 + 11x - 6) - 6x^2 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Bảng xét dấu

x	0	1	2
h(x)	-	0	+

Ta có:

$$S = \int_0^2 \left| (x^3 + 11x - 6) - 6x^2 \right| dx = \int_0^2 |x^3 - 6x^2 + 11x - 6| dx$$

$$S = -\int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx + \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) dx$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 + 11x - 6$, $y = 6x^2$ và hai đường thẳng là $S = \frac{5}{2}$.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = 2^x$, $y = -x + 6$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ bằng

A. $10 + \frac{3}{\ln 2}$.

B. $10 - \frac{3}{\ln 2}$.

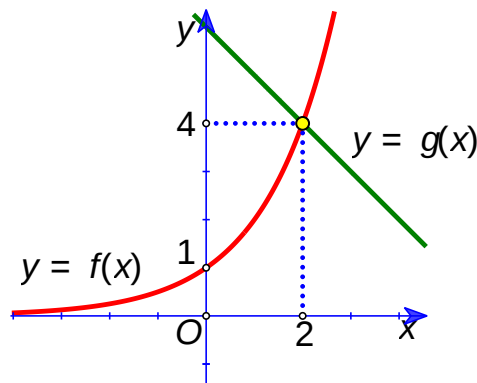
C. $10 - \frac{4}{\ln 2}$.

D. $10 + \frac{4}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có đồ thị của các hàm số $f(x) = 2^x$ và $g(x) = -x + 6$ như hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị, ta có diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx$$

$$= \int_0^2 (-x + 6 - 2^x) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_0^2 = -2 + 12 - \frac{4}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = 10 - \frac{3}{\ln 2}.$$

Câu 10: Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , $(-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3})$, mặt cắt là hình vuông có độ dài các cạnh là $\sqrt{3-x^2}$. Thể tích của vật thể đã cho bằng

- A.** $\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $4\pi\sqrt{3}$. **D.** $\pi\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích của mặt cắt hình vuông là $S(x) = (\sqrt{3-x^2})^2 = 3-x^2$.

Thể tích của vật thể đã cho là:

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(x) dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3-x^2) dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$$

Câu 11: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{5-x}$, $x \leq 5$, trục tung, trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

- A.** $\frac{25\pi}{2}$. **B.** $\frac{25}{2}$. **C.** 25π . **D.** $\frac{25}{4}$.

Lời giải

Chọn A

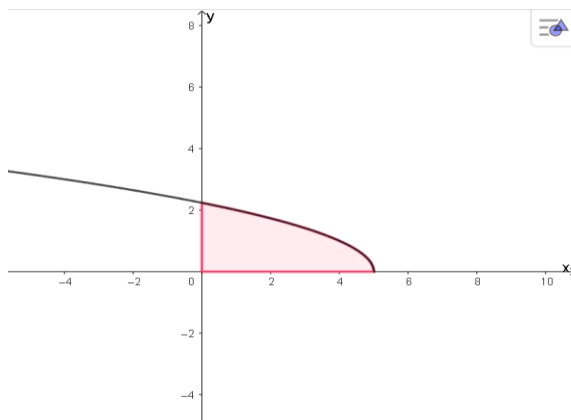
Xét phương trình hoành độ giao điểm hai hàm số $y = \sqrt{5-x}$, $y = 0$.

$$\sqrt{5-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5-x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$D \text{ là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị } \begin{cases} y = f(x) = \sqrt{5-x} \\ y = 0 \\ x = 0; x = 5 \end{cases}$$



Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là

$$V = \pi \int_0^5 (\sqrt{5-x})^2 dx = \pi \int_0^5 (5-x) dx = \pi \left(5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \frac{25\pi}{2}.$$

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình phẳng D là hình thang $OABC$ có $A(0;2), B(3;3), C(3;0)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $OABC$ quanh trục Ox bằng

A. 19.

B. 19π .

C. $\frac{15\pi}{2}$.

D. $\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn B

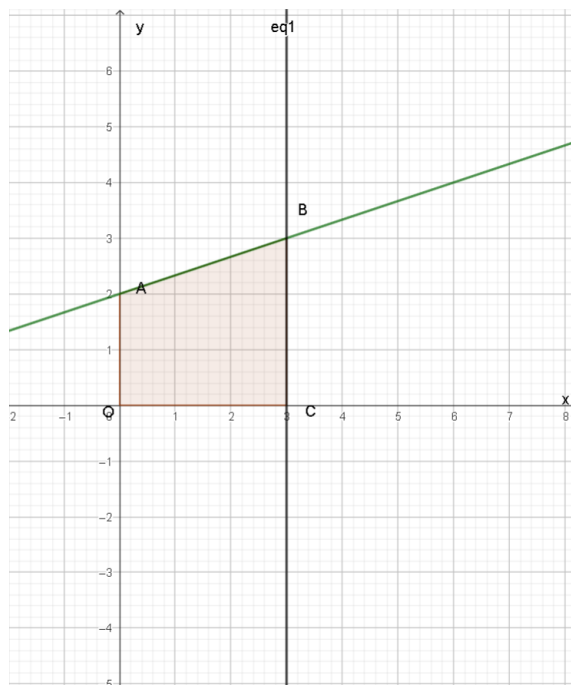
Có $\overrightarrow{AB} = (3;1)$ nên vptp của đường thẳng AB là $\vec{n} = (-1;3)$

Phương trình đường thẳng AB qua A , vptp $\vec{n}$ có dạng

$$-1(x-0) + 3(y-2) = 0 \Leftrightarrow -x + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{3} + 2$$

Khi đó D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = 0 \\ x = 0; x = 3 \end{cases}$$



Quay D quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^2}{3} + 2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^2}{9} + \frac{4}{3}x + 4 \right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{27} + \frac{2x^2}{3} + 4x \right) \Big|_0^3 = 19\pi.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = e^x$.

- Diện tích hình học phẳng được giới hạn bởi hàm số đã cho, trục hoành, $x = -1$ và $x = 1$ là $\frac{e^2 - 1}{e}$.
- Với $a = \ln 4$ thì diện tích hình học phẳng được giới hạn bởi hàm số đã cho, các trục tọa độ và đường thẳng $x = a$ bằng 3.
- Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng $V = 2\pi(e^2 - 1)$.
- Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) đã cho tại điểm $x_0 = 0$. Diện tích hình học phẳng được giới hạn bởi đường thẳng d , trục hoành, $x = -1$ và $x = 1$ là 2.

Lời giải

a) Đúng.

Diện tích hình học phẳng được giới hạn bởi hàm số $y = e^x$, trục hoành, $x = -1$ và $x = 1$ là

$$S = \int_{-1}^1 |e^x| dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

b) Đúng.

Diện tích hình học phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 4$ là

$$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3.$$

c) Sai.

Ta có: $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$

d) Đúng.

Ta có: $y' = e^x \Rightarrow y'(0) = 1, y(0) = 1$

Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $x = 0$ là

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

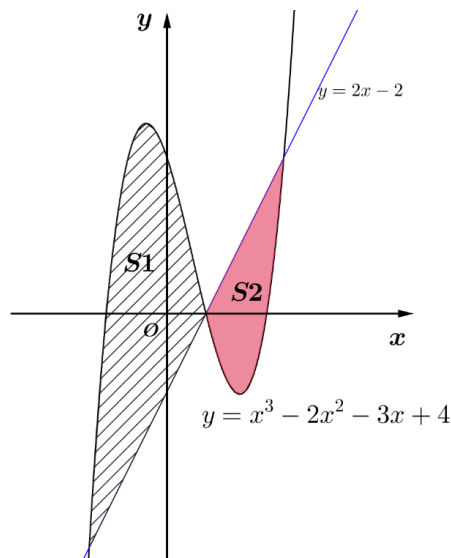
$$\Leftrightarrow y = 1(x - 0) + 1$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1$$

Diện tích hình học phẳng giới hạn bởi đường thẳng d , trục hoành, $x = -1$ và $x = 1$ là

$$S = \int_{-1}^1 |x + 1| dx = \int_{-1}^1 (x + 1) dx = \frac{1}{2} x^2 + x \Big|_{-1}^1 = 2.$$

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ (C) và đường thẳng $d : y = 2x - 2$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?.



a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2; -6), B(1; 0), C(3; 4)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành, đường thẳng $x = -1; x = 2$ bằng $\frac{21}{4}$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d bằng $\frac{253}{12}$.

d) Biết đường thẳng d cắt đồ thị (C) thành hai miền S_1 và S_2 . Tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{63}{16}$.

Lời giải

a) Đúng

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 & x = -2 \Rightarrow y = -6 \\ x = 1 & x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 & x = 3 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$. Vậy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm

$A(-2; -6), B(1; 0), C(3; 4)$.

b) Sai

Diện tích cần tính là: $S = \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - 3x + 4| dx = \frac{97}{12}$.

c) Đúng

Ta có (S): $\begin{cases} y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \\ y = g(x) = 2x - 2 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$. Ta có: $f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Diện tích: $S = S_1 + S_2 = \int_{-2}^1 |x^3 - 2x^2 - 5x + 6| dx + \int_1^3 |x^3 - 2x^2 - 5x + 6| dx = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12}$.

d) Sai

Ta có: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{63}{4}}{\frac{16}{3}} = \frac{189}{64}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \sqrt{x+2}$ ($x \geq -2$) và đường thẳng $y = x$.

a) Diện tích hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+2}$ ($x \geq -2$), trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ là $S_D = \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$ (đvdt).

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+2}$ và đường thẳng $y = x$, hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là $S = \frac{10}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{9}$ (đvdt).

c) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 3$ quanh trục Ox là 5π (đvtt).

d) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D quanh trục Ox là 6π (đvtt).

Lời giải

a) Đúng.

$$\text{Diện tích cần tìm là } S_D = \int_0^2 |\sqrt{x+2}| dx$$

Với $x \in [0; 2]$ thì $\sqrt{x+2} \geq 0$ nên

$$S_D = \int_0^2 |\sqrt{x+2}| dx = \int_0^2 \sqrt{x+2} dx = \int_0^2 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

b) Sai.

$$\text{Diện tích cần tìm là } S = \int_0^2 |\sqrt{x+2} - x| dx$$

Ta có $\sqrt{x+2} - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad (x \geq 0)$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \int_0^2 |\sqrt{x+2} - x| dx = \left| \int_0^2 (\sqrt{x+2} - x) dx \right| = \left| \int_0^2 \sqrt{x+2} dx - \int_0^2 x dx \right| = \left| \int_0^2 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^2 x dx \right| \\ &= \left| \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right| = \frac{10}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

c) Sai.

$$\text{Thể tích khối tròn xoay cần tìm là } V = \pi \int_1^3 x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{26}{3} \pi \text{ (đvtt)}.$$

d) Đúng.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x+2})^2 dx = 6\pi \text{ (đvtt)}.$$

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 - x}{x+1}$ và đường thẳng $d: y = 2$.

a) Diện tích hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số (C) , trục tung, trục hoành là $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$.

b) Diện tích hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số (C) , đường thẳng d , $x = 1$, $x = 2$ là $\frac{5}{2} + 2 \ln \frac{3}{2}$.

c) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D quanh trục Ox là $\left(\frac{20}{3}-12\ln 2\right)\pi$.

d) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng H quanh trục Ox là $\left(12\ln\frac{3}{2}-1\right)\pi$.

Lời giải

a) Đúng.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 - x}{x+1}$ và trục hoành

$$\frac{x^2 - x}{x+1} = 0, x \neq -1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số (C) , trục tung, trục hoành là

$$S_1 = \int_0^1 \left| \frac{x^2 - x}{x+1} \right| dx = \left| \int_0^1 \left(x - 2 + \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x+1| \right) \right|_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \text{ (đvdt)}.$$

b) Sai.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 - x}{x+1}$ và đường thẳng $d: y = 2$

$$\frac{x^2 - x}{x+1} = 2, x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 2(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \notin [1; 2] \\ x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \notin [1; 2] \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số (C) , đường thẳng $d: y = 2$, $x = 1$, $x = 2$ là

$$S_2 = \int_1^2 \left| \frac{x^2 - x}{x+1} - 2 \right| dx = \left| \int_1^2 \left(x - 4 + \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 2\ln|x+1| \right) \right|_1^2 = \frac{5}{2} - 2\ln\frac{3}{2} \text{ (đvdt)}.$$

c) Sai.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số (C) , trục tung, trục hoành khi quay quanh trục Ox là

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\frac{x^2 - x}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x - 2 + \frac{2}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 8 - \frac{12}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 8x - 12 \ln|x+1| - \frac{4}{x+1} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{25}{3} - 12 \ln 2 \right) \pi \text{ (đvdt)}.$$

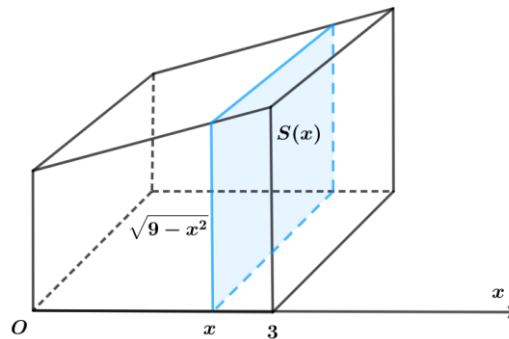
d) Đúng.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị hàm số (C) , đường thẳng d , $x=0$, $x=2$ khi quay quanh trục Ox là

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_1^2 2^2 dx - \pi \int_1^2 \left(\frac{x^2 - x}{x+1} \right)^2 dx \\ &= 4\pi - \pi \int_1^2 \left(x - 2 + \frac{2}{x+1} \right)^2 dx = 4\pi - \pi \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 8 - \frac{12}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= 4\pi - \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 8x - 12 \ln|x+1| - \frac{4}{x+1} \right) \Big|_1^2 \\ &= 4\pi - \left(5 + 12 \ln \frac{2}{3} \right) \pi = \left(12 \ln \frac{3}{2} - 1 \right) \pi \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x ($0 \leq x \leq 3$), ta được mặt cắt là một hình vuông có cạnh là $\sqrt{9-x^2}$ (xem hình dưới). Tính thể tích của vật thể đã cho.



Lời giải

Đáp số: 18.

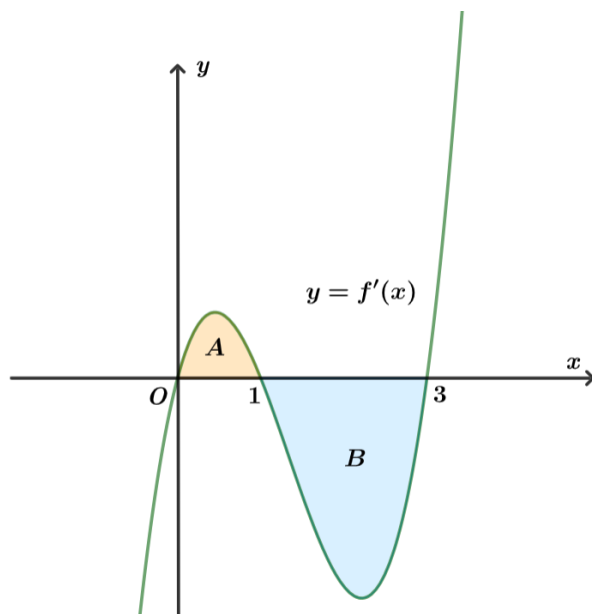
Ta có: mặt cắt của vật thể là một hình vuông có cạnh là $\sqrt{9-x^2}$ nên diện tích mặt cắt là:

$$S(x) = \left(\sqrt{9-x^2} \right)^2 = 9-x^2, \text{ do } 9-x^2 \geq 0, \forall x \in [0;3].$$

Thể tích của vật thể đã cho là:

$$V = \int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 (9-x^2) dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 18.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 4$ và $S_B = 10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0) = 2$.



Lời giải

Đáp số: -4 .

Ta có:

Hình phẳng A được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành $y = 0$, trục tung $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ nên diện tích hình phẳng A là:

$$S_A = \int_0^1 |f'(x)| \, dx = \int_0^1 f'(x) \, dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0)$$

$$\Rightarrow f(1) = S_A + f(0) = 4 + 2 = 6.$$

Lại có:

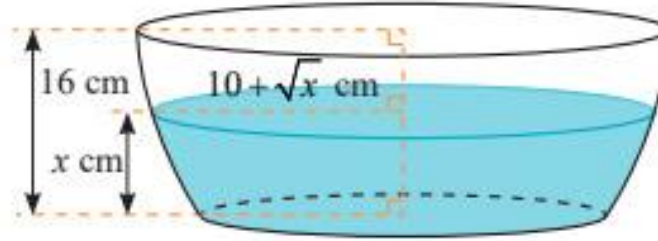
Hình phẳng B được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục hoành $y = 0$, đường thẳng $x = 1$ và đường thẳng $x = 3$ nên diện tích hình phẳng B là:

$$S_B = \int_1^3 |f'(x)| \, dx = -\int_1^3 f'(x) \, dx = -f(x) \Big|_1^3 = -[f(3) - f(1)] = -f(3) + f(1).$$

$$\text{Suy ra } f(3) = f(1) - S_B = 6 - 10 = -4.$$

$$\text{Vậy } f(3) = -4.$$

Câu 3. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như hình bên bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy x (cm) ($0 \leq x \leq 16$) thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $(10 + \sqrt{x})$ (cm). Tìm x (đơn vị cm, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) để dung tích nước trong chậu bằng nửa thể tích của chậu?



Lời giải

Đáp số: 8,94.

Dung tích nước trong chậu bằng nửa thể tích của chậu nên ta có phương trình

$$\pi \int_0^x (10 + \sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^{16} (10 + \sqrt{x})^2 dx \Leftrightarrow \pi \left(100x + \frac{40}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^x = \frac{1}{2} \pi \left(100x + \frac{40}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{16}$$

$$\Leftrightarrow 100x + \frac{40}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} = \frac{3872}{3}$$

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t > 0$)

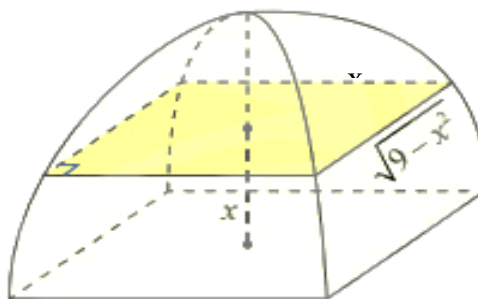
Ta được phương trình $100t^2 + \frac{40}{3}t^3 + \frac{t^4}{2} = \frac{3872}{3}$. Đặt $f(t) = 100t^2 + \frac{40}{3}t^3 + \frac{t^4}{2}$

$f'(t) = 200t + 40t^2 + 2t^3 > 0$ ($\forall t > 0$) nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $t \approx 2,990279433$

Vậy $x = t^2 \approx 8,94$ (cm)

Câu 4. Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như hình bên. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x (mét) ($0 \leq x \leq 3$) thì được hình chữ nhật có các kích thước lần lượt là x và $\sqrt{9 - x^2}$. Tính thể tích cái lều (đơn vị m^3).



Lời giải

Đáp số: 9.

Thể tích lều được tính bởi công thức $V = \int_0^3 (x\sqrt{9-x^2})dx = 9(m^3)$

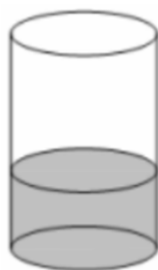
Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol(P): $y = -x^2 + 9$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi (P), trục Ox và hai đường thẳng $x = -2$, $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox.

Lời giải

Đáp số: $V = \frac{1204}{5}p$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành bởi (P), trục hoành, hai đường thẳng $x = -2$, $x = 2$ khi quay (P) quanh trục Ox là: $V = p \int_{-2}^2 y^2 dx = p \int_{-2}^2 (-x^2 + 9)^2 dx = \frac{1204}{5}p$

Câu 6. Một cái lu đựng nước có dạng hình trụ như hình vẽ. Biết rằng khi lượng nước trong lu là x (dm) ($0 < x \leq 9$) thì mặt nước là hình tròn có bán kính là $x(dm)$. Hãy tính dung tích của cái lu nước trên



Lời giải.

Đáp số: $V = 243p^2 (dm^3)$

Diện tích đáy của hình trụ là: $S = px^2$

Dung tích của lu nước là: $V = p \int_0^9 px^2 dx = 243p^2 (dm^3)$

---HẾT---

♦ **Đề 2:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ bằng

A. $\pi \int_0^3 |x^3 - 4x| dx$. **B.** $\int_0^3 |x^3 - 4x| dx$. **C.** $\pi \int_0^3 (x^3 - 4x)^2 dx$. **D.** $\int_0^3 (x^3 - 4x) dx$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ là $S = \int_0^3 |x^3 - 4x| dx$.

Câu 2. Viết công thức tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x = a$, $x = b$ ($a < b$), có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$) là $S(x)$.

A. $V = \pi^2 \int_a^b |S(x)| dx$. **B.** $V = \int_a^b S(x) dx$. **C.** $V = \pi \int_a^b S(x) dx$. **D.** $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx$.

Lời giải

Công thức tính thể tích là $V = \int_a^b S(x) dx$.

Câu 3. Công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) xung quanh trục Ox là

A. $V = \int_a^b |f(x)| dx$. **B.** $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay cần tìm được tính theo công thức: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 4. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$. **B.** $S = \int_0^2 2^x dx$. **C.** $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$. **D.** $S = \int_0^2 2^{2x} dx$.

Lời giải

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx$$

Câu 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 1$ bằng

A. $3\ln 3 - 2$. **B.** $2 - 3\ln 3$. **C.** $3\ln 3$. **D.** $4\ln 3 - 3$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_{-1}^1 \left| \frac{x-1}{x+2} \right| dx$

$$\text{Ta có: } \frac{x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Phương trình không có nghiệm thuộc $(1;1)$ nên ta có

$$S = \int_{-1}^1 \left| \frac{x-1}{x+2} \right| dx = \left| \int_{-1}^1 \left(\frac{x-1}{x+2} \right) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{3}{x+2} \right) dx \right| = \left| \left(x - 3 \ln|x+2| \right) \Big|_{-1}^1 \right| = |2 - 3 \ln 3| = 3 \ln 3 - 2.$$

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3 - x^2 + 3x - 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{19}{12}$.

D. $-\frac{19}{12}$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^2 |x^3 - x^2 + 3x - 3| dx$

$$\text{Ta có } x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Phương trình có một nghiệm $x = 1$ thuộc đoạn $[0; 2]$

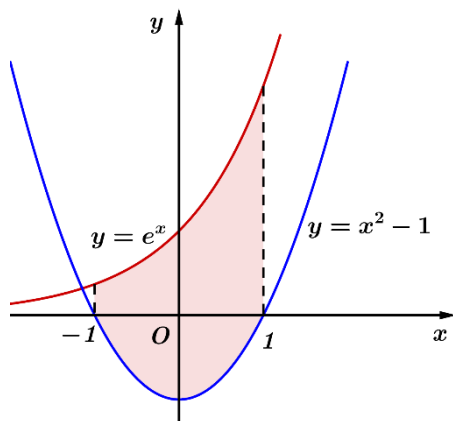
Vậy

$$S = \int_0^1 |x^3 - x^2 + 3x - 3| dx + \int_1^2 |x^3 - x^2 + 3x - 3| dx = \left| \int_0^1 (x^3 - x^2 + 3x - 3) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - x^2 + 3x - 3) dx \right|$$

.

$$= \left| \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_0^1 \right| + \left| \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_1^2 \right| = \left| -\frac{19}{12} \right| + \left| \frac{4}{3} - \left(-\frac{19}{12} \right) \right| = \frac{9}{2}.$$

Câu 7. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$ (tham khảo hình bên dưới) bằng



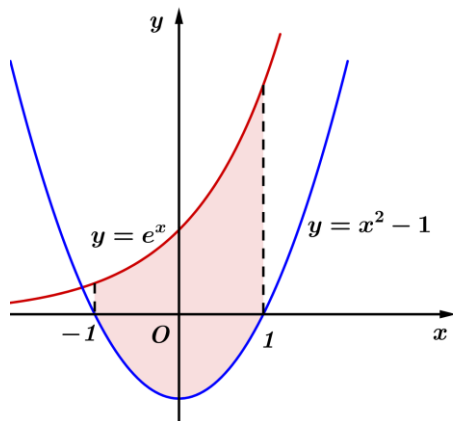
A. $\frac{3e^2 + 4e - 3}{3e}.$

B. $\frac{3e^2 + 4e - 3}{e}.$

C. $\frac{3e^2 + 4e + 3}{3e}.$

D. $\frac{3e^2 - 4e + 3}{3e}.$

Lời giải

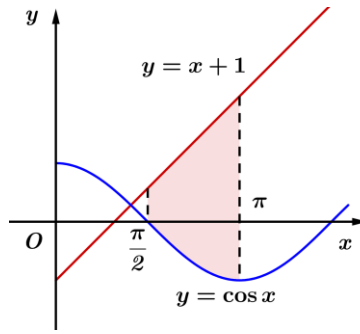


Xét $x \in [-1; 1]$, ta có: $\begin{cases} e^x > 0 \\ -(x^2 - 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow e^x - (x^2 - 1) > 0 \Rightarrow |e^x - (x^2 - 1)| = e^x - x^2 + 1.$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{-1}^1 |e^x - (x^2 - 1)| dx = \int_{-1}^1 (e^x - x^2 + 1) dx = \left(e^x - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{3e^2 + 4e - 3}{3e}.$$

Câu 8. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = x + 1$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ (tham khảo hình bên dưới) bằng



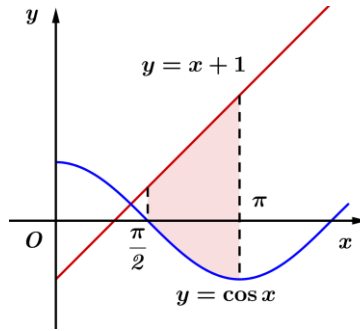
A. $\frac{3\pi^2 - 4\pi + 8}{8}$.

B. $\frac{3\pi^2 + 4\pi + 8}{2}$.

C. $\frac{3\pi^2 + 4\pi + 8}{6}$.

D. $\frac{3\pi^2 + 4\pi + 8}{8}$.

Lời giải

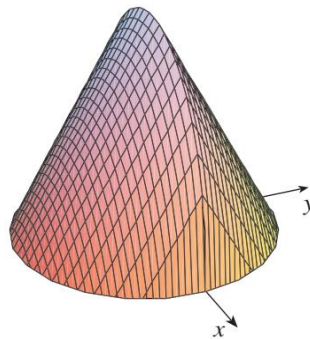


Xét $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, ta có: $\cos x \leq 1 < x + 1 \Rightarrow \cos x - (x + 1) < 0 \Rightarrow |\cos x - (x + 1)| = x + 1 - \cos x$.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x - (x + 1)| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x + 1 - \cos x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3\pi^2 + 4\pi + 8}{8}.$$

Câu 10. Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích của vật thể đó là



A. $V = \sqrt{3}$.

B. $V = 3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \pi$.

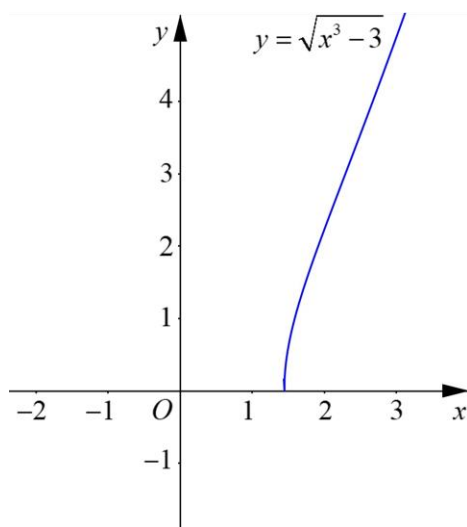
Lời giải

Tại vị trí có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì tam giác thiết diện có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

Do đó tam giác thiết diện có diện tích $S(x) = \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1-x^2)$.

Vậy thể tích V của vật thể là: $\int_{-1}^1 \sqrt{3}(1-x^2) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \sqrt{x^3 - 3}$ có đồ thị hàm số được biểu diễn trong hình bên dưới. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số trên và hai đường thẳng $x=2$ và $x=3$. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng



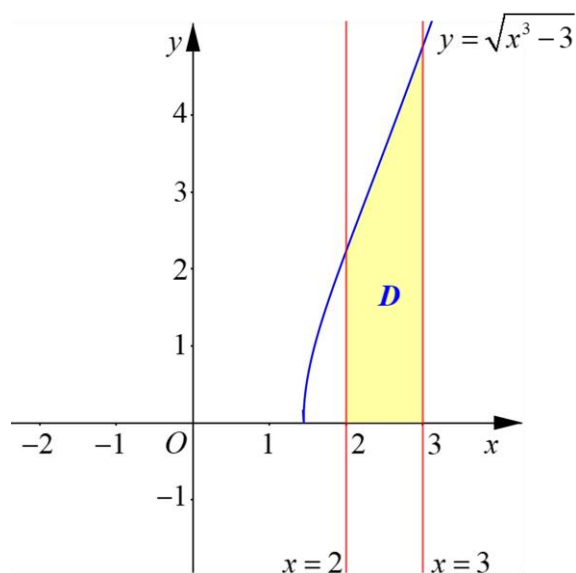
A. $3,56\pi$.

B. $\frac{53}{4}\pi$.

C. $\frac{53}{4}$.

D. $3,56$.

Lời giải

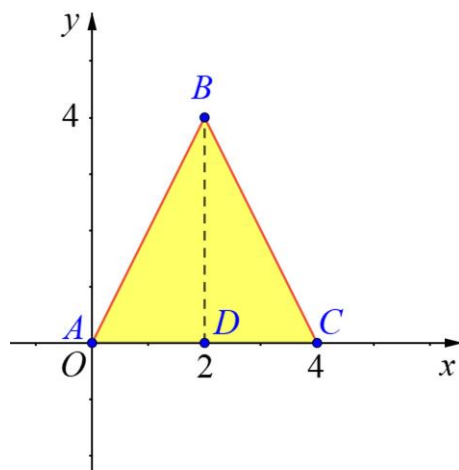


Ta xác định được hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^3 - 3}$ và hai đường $x=2$ và $x=3$ tại hình vẽ.

Áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay, ta có:

$$V = \pi \int_2^3 f^2(x) dx = \pi \int_2^3 \left(\sqrt{x^3 - 3} \right)^2 dx = \pi \int_2^3 (x^3 - 3) dx = \pi \left(\frac{x^4}{4} - 3x \right) \Big|_2^3 = \frac{53}{4} \pi.$$

Câu 12. Cho tam giác ABC với tọa độ các điểm $A(0;0)$, $B(2;4)$ và $C(4;0)$. Thể tích hình tròn xoay khi quay tam giác ABC quanh trục Ox bằng



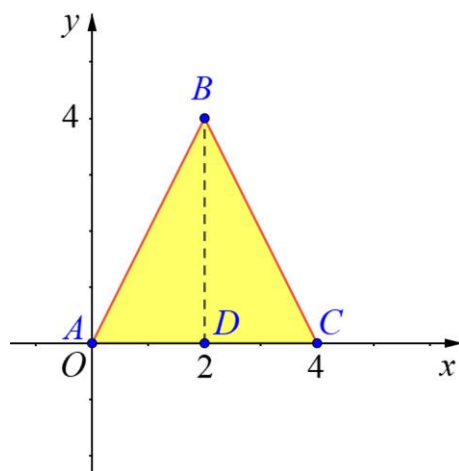
A. 16π .

B. $\frac{512}{3}\pi$.

C. $\frac{256}{3}\pi$.

D. 16 .

Lời giải



Nhận xét: Với D là trung điểm AC , bằng hình ảnh trực quan, ta thấy rằng tam giác ABC cân tại B ; $DB \perp Ox$, do đó thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác ABC quanh trục Ox sẽ gấp 2 lần thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác ABD quanh trục Ox .

Ta lập phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm A và B .

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;4)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d , suy ra vector pháp tuyến của d là $\vec{n} = (4;-2)$.

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;0)$, nhận $\vec{n} = (4;-2)$ làm vector pháp tuyến là:

$$4(x-0) + (-2)(y-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x.$$

Khi đó, quay tam giác ABD quanh trục Ox ta được thể tích khối tròn xoay là

$$\pi \int_0^4 f^2(x) dx = \pi \int_0^4 (2x)^2 dx = 4\pi \int_0^4 x^2 dx = 4\pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{256}{3} \pi.$$

Như vậy, khi quay tam giác ABC quanh trục Ox thì ta được thể tích khối tròn xoay là:

$$V = 2 \cdot \frac{256}{3} \pi = \frac{512}{3} \pi.$$

👉 Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 1: Cho hàm số $y = e^x$ có đồ thị (C) .

- a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ bằng e^3 .
- b) Khi $k = 4$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = k$ bằng 3.
- c) Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $x_0 = 1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ bằng $\frac{9e}{2}$.
- d) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ quanh trục Ox bằng e^6 .

Lời giải

a) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ là

$$S = \int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 = e^3 - 1.$$

b) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = k$ ($k > 0$) bằng 3 nên ta có: $\int_0^k e^x dx = 3 \Leftrightarrow e^x \Big|_0^k = 3 \Leftrightarrow e^k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = \ln 4$.

c) Đúng.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $x_0 = 1$ là $y = e(x - 1) + e \Leftrightarrow y = ex$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$

$$\text{là } S = \int_0^3 (ex) dx = e \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9e}{2}.$$

d) Sai.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$ quanh trục Ox là

$$V = \int_0^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^3 = \frac{1}{2} (e^6 - 1).$$

Câu 2: Cho hàm số bậc hai $y = -x^2 + 5x$ và đường thẳng $y = 2x$.

a) Tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là $A(0;0)$ và $B(3;6)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$, trục hoành là $\frac{27}{2}$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x, y = 2x$ là $\frac{9}{2}$

d) Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x; y = 2x$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x; y = 2x$ và trục hoành. Tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ bằng $\frac{27}{6}$.

Lời giải

a) Đúng.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ và đường thẳng $y = 2x$.

Ta có: $-x^2 + 5x = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$. Khi đó ta có 2 giao điểm $A(0;0); B(3;6)$.

b) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$, trục hoành là

$$S = \int_0^5 |-x^2 + 5x| dx = \frac{125}{6}.$$

c) Đúng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x, y = 2x$ là

$$S_1 = \int_0^3 |-x^2 + 3x| dx = \frac{9}{2}.$$

d) Sai.

Ta có: $S_2 = S - S_1 = \frac{125}{6} - \frac{9}{2} = \frac{49}{3}$.

Khi đó $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{98}$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \sqrt{2x}$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 2$.

a) Diện tích hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \sqrt{2x}$, trục tung, trục hoành, $x = 4$ bằng $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

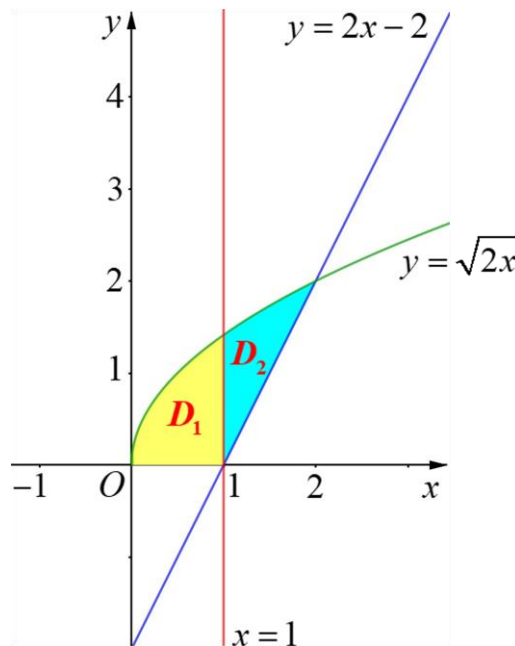
b) Diện tích hình phẳng H giới hạn bởi đường thẳng $(d): y = 2x - 2$ và đồ thị $(C): y = \sqrt{2x}$, và trục hoành bằng $\frac{5}{3}$

c) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d quanh trục Ox , $x = 3$; $x = 6$ bằng 165π

d) Cho hình H giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \sqrt{2x}$, đường thẳng $(d): y = 2x - 2$ và trục hoành. Công thức tính thể tích của vật thể sinh ra khi cho hình H quay quanh trục hoành là $V = \pi \int_0^2 \left| (\sqrt{2x})^2 - (2x - 2)^2 \right| dx$

Lời giải

a) Đúng.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 4$ là

$$S = \int_0^4 \sqrt{2x} dx = \frac{1}{3} (2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

b) Đúng.

Đồ thị:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\cdot \quad \sqrt{2x} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x = (2x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 10x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\cdot \quad 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\cdot \quad \sqrt{2x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\text{Diện tích hình } (H): S = S_{D_1} + S_{D_2} = \int_0^1 \sqrt{2x} dx + \int_1^2 (\sqrt{2x} - 2x + 2) dx = \frac{5}{3}$$

- c) Sai. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi qua bởi đồ thị d quanh trục hoành và hai đường thẳng $x = 3$; $x = 6$ quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_3^6 (2x - 2)^2 dx = \pi \frac{1}{6} (2x - 2)^3 \Big|_3^6 = 156\pi$$

d) Sai.

Cho H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \sqrt{2x}$, đường thẳng $(d): y = 2x - 2$ và trục hoành. Công thức tính thể tích của vật thể sinh ra khi cho hình H quay quanh trục hoành là: $V = \pi \left[\int_0^1 2x dx + \int_1^2 (2x - 2)^2 dx \right]$

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ và đường thẳng $(d): y = x - 3$.

a) Công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$(C): y = \frac{2x-3}{x+1}, \text{ trục hoành, } x = 2, x = 3 \text{ quanh trục hoành là: } V = \int_2^3 \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)^2 dx$$

b) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ với hai trục tọa độ có diện tích nhỏ hơn 2.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ và đường thẳng $(d): y = x - 3$ là $12 - 5\ln 5$

d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ và đường thẳng $(d): y = x - 3$ quanh trục hoành là: $V = \pi \int_0^4 \left| \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)^2 - (x-3)^2 \right| dx.$

Lời giải

a) Sai.

Công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

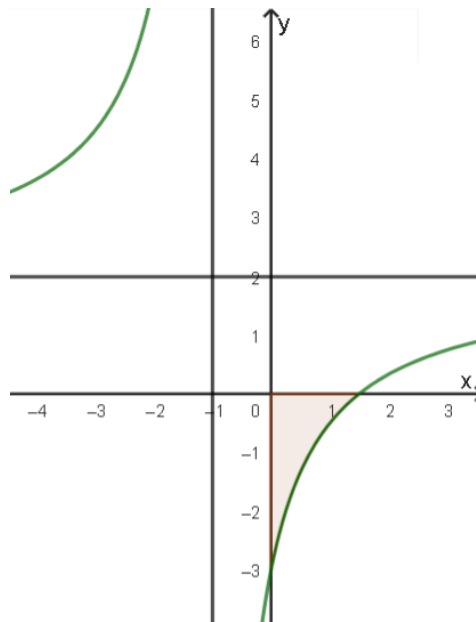
$$(C): y = \frac{2x-3}{x+1}, \text{ trục hoành, } x=2, x=3 \text{ quanh trục hoành là: } V = \pi \int_2^3 \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)^2 dx$$

b) Đúng.

Giao điểm với trục hoành $\left(\frac{3}{2}; 0 \right)$

Diện tích hình phẳng:

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}} \left| \frac{2x-3}{x+1} \right| dx = - \int_0^{\frac{3}{2}} 2 - \frac{5}{x+1} dx = - \left(2x - 5 \ln(x+1) \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = -3 + 5 \ln \frac{5}{2} \approx 1,58$$



c) Đúng.

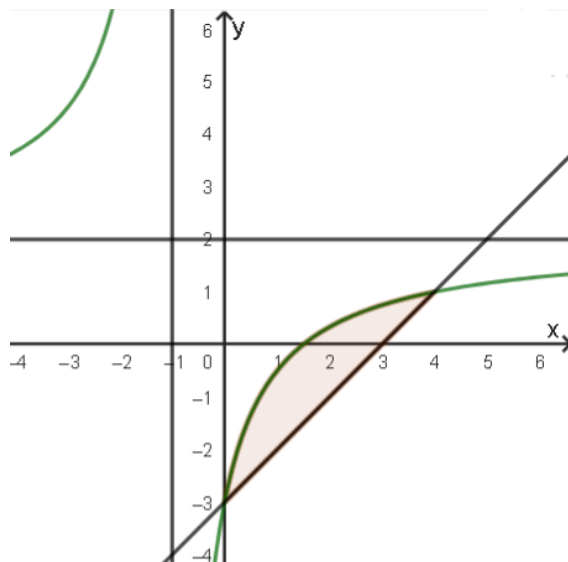
Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ và đường thẳng

$(d): y = x-3$.

$$\text{Ta có } \frac{2x-3}{x+1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng:

$$S = \int_0^4 \left| \frac{2x-3}{x+1} - (x-3) \right| dx = \int_0^4 \left(-x+5 - \frac{5}{x+1} \right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 5x - 5 \ln(x+1) \right) \Big|_0^4 = 12 - 5 \ln 5$$



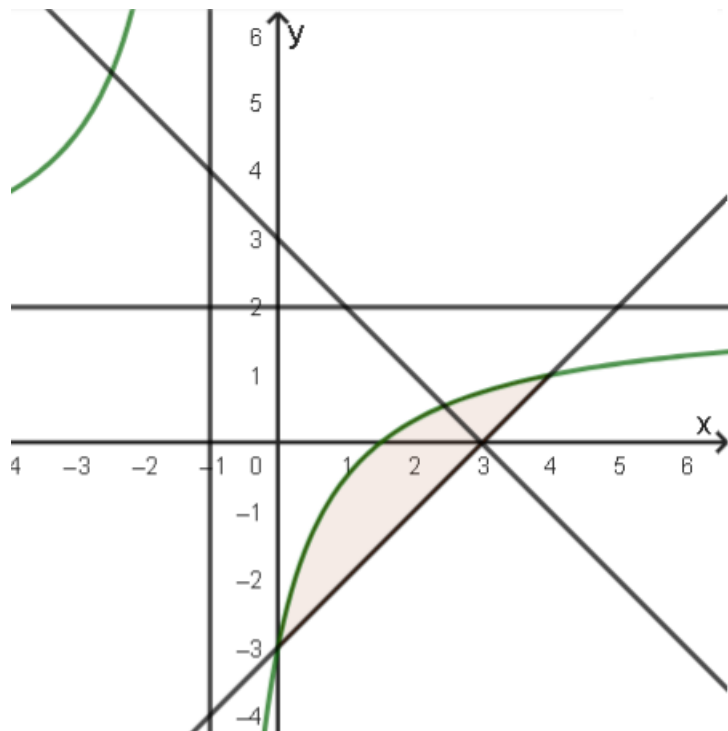
d) Sai.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ và đường thẳng $(d): y = -x+3$.

Ta có $\frac{2x-3}{x+1} = -x+3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x-3}{x+1}$ và đường thẳng $(d): y = x-3$ quanh trục hoành là:

$$V = \left[\pi \int_0^{\sqrt{6}} (x-3)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)^2 dx \right] + \left[\pi \int_{\sqrt{6}}^4 \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)^2 dx - \pi \int_3^4 (x-3)^2 dx \right].$$



Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. *Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6*

Câu 1. Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 4$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và x . Thể tích vật thể là bao nhiêu?

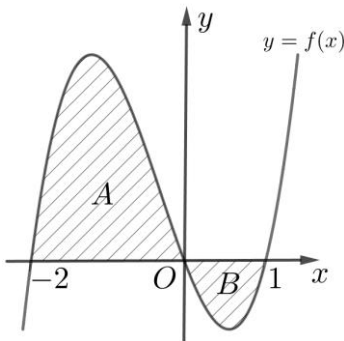
Lời giải

Đáp số: 63.

Diện tích thiết diện là: $S(x) = 3x^2$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_1^4 3x^2 dx = 63$.

Câu 2. Biết rằng $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ được biểu diễn trong hình bên dưới.



Biết rằng diện tích các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 5, S_B = 2$. Nếu $F(-2) = 1$ thì $F(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

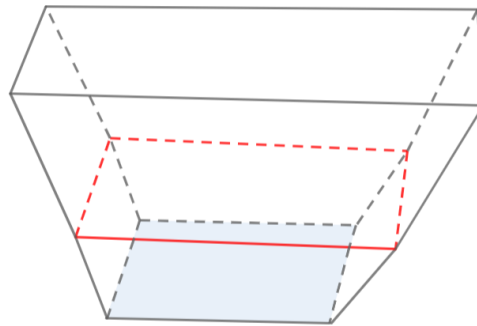
Đáp số: 4.

Theo đề bài ta có:

$$S_A = \int_{-2}^0 f(x)dx = F(0) - F(-2) = 5; S_B = \int_0^1 -f(x)dx = F(0) - F(1) = 2$$

$$\text{Từ đó suy ra : } S_A - S_B = F(1) - F(-2) = 3 \Leftrightarrow F(1) = 4.$$

- Câu 3.** Một dụng cụ đựng nước có dạng như hình bên. Nếu cắt dụng cụ bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x (cm) ($0 \leq x \leq 5$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có chiều dài là $2x$ (cm) và chiều rộng là $\sqrt{x+3}$ (cm). Dung tích của dụng cụ trên là bao nhiêu ? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng phân chục).



Lời giải

Đáp số: 62,6

Diện tích của mặt cắt là: $S(x) = 2x \cdot \sqrt{x+3}$ (cm²)

Ta có: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là: $V = \int_0^5 2x\sqrt{x+3}dx \approx 62,6$ (cm³).

- Câu 4.** Một chiếc đèn cỏi có hình như bên. Nếu cắt đèn bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x (dm) ($0 \leq x \leq 4$) thì được thiết diện là hình tròn có bán kính $\sqrt{4-x}$ (dm). Thể tích của chiếc đèn cỏi là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng phân chục).



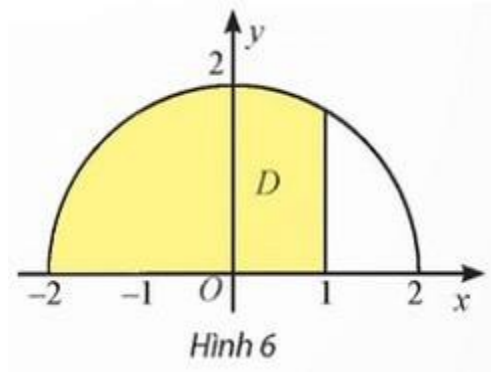
Lời giải

Đáp số: 25,1

Diện tích của mặt cắt là: $S(x) = \pi(\sqrt{4-x})^2$ (dm²)

Ta có: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4-x})^2 dx \approx 25,1$ (dm³)

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ nửa đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$ nằm phía trên trục Ox . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ (Hình 6). Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay D quanh trục Ox .



Lời giải

Đáp số: 9π .

Phương trình đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$ là $x^2 + y^2 = 4$.

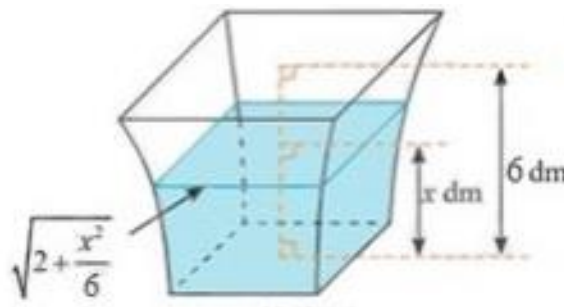
Do nửa đường tròn nằm phía trên trục Ox , nên ta có $y \geq 0$.

Suy ra phương trình nửa đường tròn là $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Hình phẳng D (phần được tô đậm) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$. Do đó, thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là

$$V = \pi \int_{-2}^1 \left(\sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-2}^1 (4 - x^2) dx = \pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = 9\pi.$$

Câu 6. Một bình chứa nước có dạng như hình vẽ. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) ($0 \leq x \leq 6$) thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2 + \frac{x^2}{6}}$ (dm). Tính dung tích của bình.



Lời giải

Đáp số: 24.

Chọn trục Ox vuông góc với mặt đáy của bình sao cho đáy nhỏ, đáy to của bình vuông góc với Ox lần lượt tại $x = 0$ và $x = 6$.

Diện tích mặt nước ở chiều cao x là $S(x) = \left(\sqrt{2 + \frac{x^2}{6}} \right)^2 = 2 + \frac{x^2}{6}$.

Khi đó, dung tích của bình là $V = \int_0^6 S(x) dx = \int_0^6 \left(2 + \frac{x^2}{6} \right) dx = \left(2x + \frac{x^3}{18} \right) \Big|_0^6 = 24 \text{ (dm}^3\text{)}.$

---HẾT---

♦ **Đề 3:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

A. $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$. **B.** $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$. **C.** $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. **D.** $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Lời giải

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Câu 2: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 2x dx$. **B.** $S = \pi \int_0^2 x^2 dx$. **C.** $S = \pi \int_0^2 2x dx$. **D.** $S = -\int_0^2 x dx$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S = \int_0^2 2x dx$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Ta có: $S = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}$.

Câu 4: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 2$ và trục hoành.

A. $S = \frac{20}{3}$. **B.** $S = \frac{16}{3}$. **C.** $S = \frac{13}{6}$. **D.** $S = \frac{13}{3}$.

Lời giải

Ta có: $S = \int_0^2 |x^2 + 2| dx = \int_0^2 (x^2 + 2) dx = \frac{20}{3}$.

Câu 5: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2024^x$, trục Ox , trục Oy , $x = 2$.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

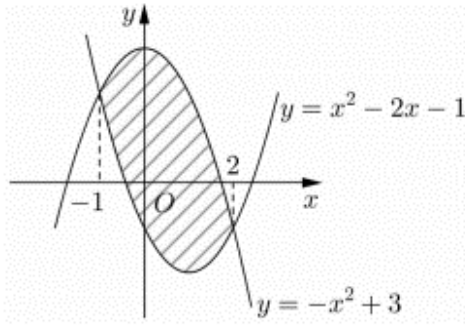
A. $S = \pi \int_0^2 2024^x dx$. **B.** $S = \int_0^2 2024^x dx$. **C.** $S = \pi \int_0^2 2024^{2x} dx$. **D.** $S = \int_0^2 2024^{2x} dx$.

Lời giải

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2024^x$, trục Ox , trục Oy , $x = 2$ là

$$S = \int_0^2 2024^x dx.$$

Câu 6: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$. **B.** $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$. **C.** $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$. **D.** $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $-x^2 + 3 \geq x^2 - 2x - 1$, $\forall x \in [-1; 2]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

A. $\frac{e^2 - 1}{2}$. **B.** $\frac{e^2 + 1}{2}$. **C.** $\frac{e^2 + 1}{4}$. **D.** $\frac{e^2 - 1}{4}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ của đường cong $y = x \ln x$ và trục hoành là

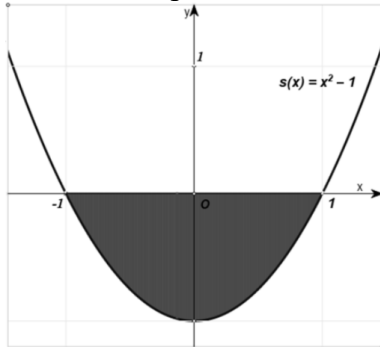
$$x \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

$$S = \int_1^e |x \ln x| dx = \int_1^e x \ln x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } S = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Câu 8: Diện tích phần tô đậm của hình vẽ dưới đây là



A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. $\frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Diện tích phần tô đậm của hình vẽ là $S = \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx = \frac{4}{3}$.

Câu 9: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 3$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_{-2}^3 (-x^2 + 1) dx$.

B. $V = \int_{-2}^3 (-x^2 + 1)^2 dx$.

C. $V = \int_{-2}^3 |(-x^2 + 1)| dx$.

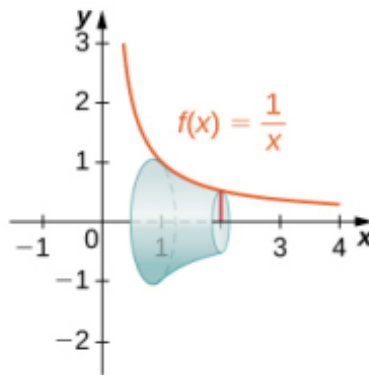
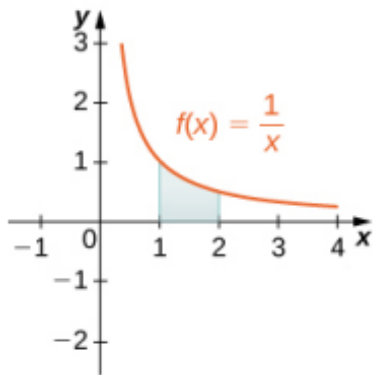
D. $V = \pi \int_{-2}^3 (-x^2 + 1)^2 dx$.

Lời giải

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_{-2}^3 (-x^2 + 1)^2 dx.$$

Câu 10: Cho khối tròn xoay như hình vẽ



Thể tích của khối tròn xoay đó là

- A.** π . **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** 2π . **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Thể tích cần tìm là: $V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}$.

Câu 11: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \cos \frac{x}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = \pi$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox là

- A.** $\frac{\pi^2}{2}$. **B.** $\pi^2 - \pi$. **C.** $\pi^2 - 1$. **D.** 2π .

Lời giải

Thể tích cần tìm là: $V = \pi \int_0^\pi \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 + \cos x) dx = \frac{\pi}{2} (x + \sin x) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$.

Câu 12: Cho hình phẳng (S) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2 - x^3}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay (S) quanh Ox là

- A.** $\frac{58}{7}\pi$. **B.** 4π . **C.** $\frac{20}{7}\pi$. **D.** $\frac{27}{6}\pi$.

Lời giải

Thể tích cần tìm là: $V = \pi \int_{-1}^1 (2 - x^3) dx = \pi \left(2x - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_{-1}^1 = 4\pi$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

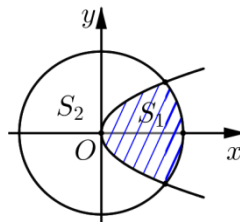
a) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và các đường $x = a$, $x = b$ ($a < b$) được xác định bởi công thức $S = \int_a^b f(x) dx$.

b) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$ và các đường $x = 0$, $x = 2$.

Khi đó ta có $S = \int_0^2 2^x dx$.

c) Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$, $y = 2x$ và các đường $x = -1$, $x = 1$ được xác định bởi công thức $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx$.

d) Biết rằng đường parabol $(P): y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1 , S_2 (hình bên). Khi đó $S_2 - S_1 = ap - \frac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b + c$ bằng 15.



Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

b) Ta có $S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx$ (do $2^x > 0, \forall x \in [0; 2]$).

c) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - x = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = \pm \sqrt{3} \notin [-1; 1] \end{cases}$ Do đó

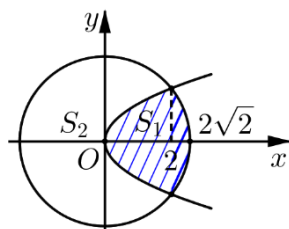
$$S = \int_{-1}^0 |x^3 - x - 2x| dx + \int_0^1 |x^3 - x - 2x| dx \stackrel{\text{xét dấu}}{=} \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx.$$

d) Diện tích hình tròn $S = 8p$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (C) là

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Suy ra } S_1 = 2 \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2} dx = \frac{4}{3} + 2p.$$



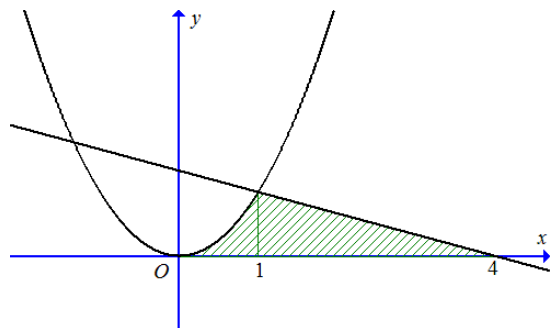
Suy ra $S_2 = S - S_1 = 6p - \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = 4p - \frac{12}{3}$. Vậy $a + b + c = 15$.

Câu 2: Cho đường $y = x^2$ có đồ thị là (P) , $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ có đồ thị là (d) và trục hoành.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi (P) , trục hoành và đường thẳng $x = 1$

Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (d) , trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 4$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi (P) , (d) và trục hoành.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $S_1 = \frac{1}{3}$

b) $S_2 = \frac{3}{2}$

c) $S = S_1 + S_2$

d) $S = \frac{11}{6}$

Lời giải

a) Đ
b) S
c) S
d) Đ

a) $S_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, do đó: $S_1 = \frac{1}{3}$ là mệnh đề đúng

b) $S_2 = \int_0^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx = \frac{8}{3}$, do đó: $S_2 = \frac{3}{2}$ là mệnh đề sai

c) $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) dx = \frac{11}{6} \neq S_1 + S_2$, do đó: $S = S_1 + S_2$ là mệnh đề sai

$$\text{d) } S = S = \int_0^1 |x^2| dx + \int_1^4 \left| -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right| dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x \right) \Big|_1^4 = \frac{11}{6}, \text{ do đó:}$$

$S = \frac{11}{6}$ là mệnh đề đúng

Câu 3: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}, y = 2e^x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$.

a) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ là $S = \pi \int_0^4 x dx$.

b) Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox . Khi đó, $V = 2\pi(e^8 - 1)$

c) Diện tích của hình H là $S_H = 2e^4 - \frac{16}{3}$.

d) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là $2\pi(e^8 - 5)$

Lời giải

a) Sai

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ là $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$.

b) Đúng

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox .

$$\text{Khi đó, } V = \pi \int_0^4 (2e^x)^2 dx = \pi \int_0^4 4e^{2x} dx = 2\pi e^{2x} \Big|_0^4 = 2\pi(e^8 - 1)$$

c) Sai

$$\text{Diện tích của hình H là } S_H = \int_0^4 |2e^x - \sqrt{x}| dx = \int_0^4 (2e^x - \sqrt{x}) dx = \left(2e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right) \Big|_0^4 = 2e^4 - \frac{22}{3}.$$

(Vì $2e^x - \sqrt{x} > 0, \forall x \in [0; 4]$)

d) Đúng

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^4 \left| (2e^x)^2 - (\sqrt{x})^2 \right| dx = \pi \int_0^4 |4e^{2x} - x| dx = \pi \int_0^4 (4e^{2x} - x) dx = \pi \left(2e^{2x} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 2\pi(e^8 - 5)$$

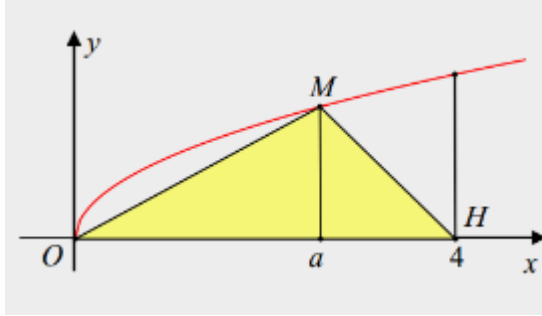
Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

a) Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là $\int_0^4 \sqrt{x} dx$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $\frac{19}{6}$.

c) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$ và trục hoành Ox là 8π .

d) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$ và trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M .



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó $a = 3$.

Lời giải

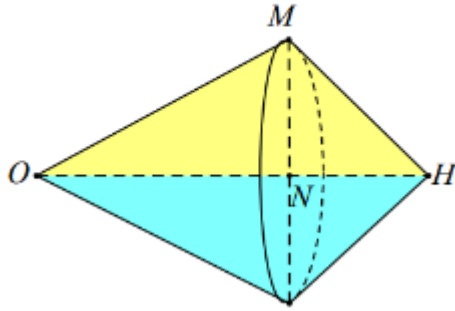
a) Đ
b) S
c) Đ
d) Đ

a) Ta có $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$. Vậy a) Đúng.

b) $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$. Vậy b) Sai

c) Ta có $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$. Vậy c) Đúng

d) $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2} = 4\pi$



Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Suy ra $r = MN = y_M = y(a) = \sqrt{a}$.

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}. \text{ Suy ra } 4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3$$

Vậy d) Đúng.

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

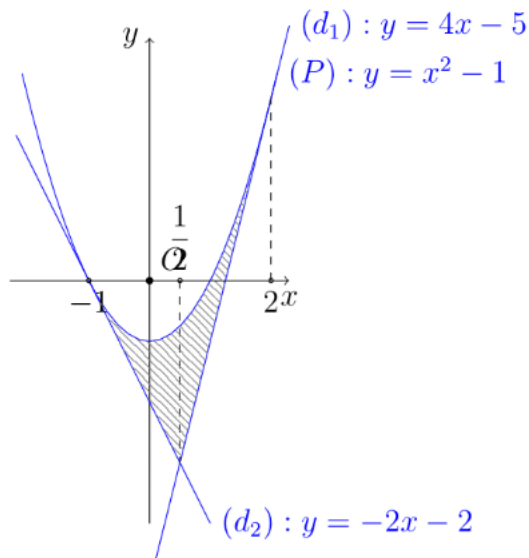
Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(P): y = x^2 - 1$ và hai tiếp tuyến của (P) tại $A(-1;0)$ và $B(2;3)$. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Điền đáp án:.....

Lời giải

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $A(-1;0)$ là $d_2: y = -2x - 2$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $B(2;3)$ là $d_1: y = 4x - 5$



Theo hình vẽ ta suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^2 - 1 - (-2x - 2)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^2 - 1 - (4x - 5)) dx \\
&= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x + 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\
&= \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 4x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \\
&= \frac{9}{4} = 2,25
\end{aligned}$$

Câu 2: Gọi S là diện tích mặt phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $y = kx + 1$ với k là tham số thực. Tìm k để S nhỏ nhất.

Điền đáp án:.....

Lời giải

Ta có $x^2 + 2x - 3 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - (k - 2)x - 4 = 0$

Do $\Delta = 16 > 0$ PT trên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases}$

Giả sử $x_1 < x_2 \Rightarrow S = \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - (k - 2)x - 4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{k - 2}{2} x^2 - 4x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right|$

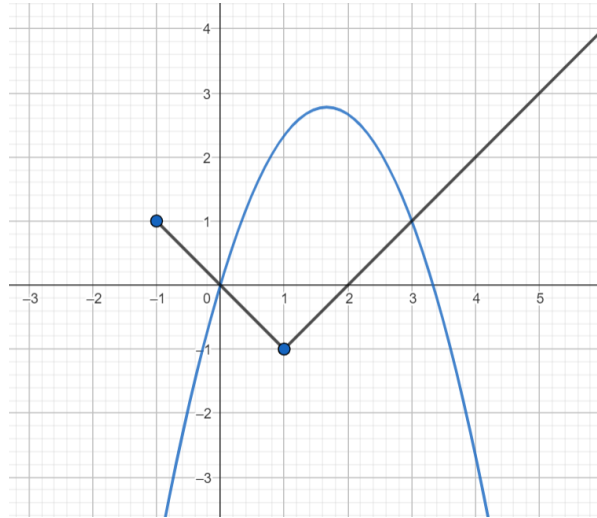
$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{3} (x_2^3 - x_1^3) - \frac{k - 2}{2} (x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1) \right| = \left| (x_2 - x_1) \left[\frac{1}{3} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) - \frac{k - 2}{2} (x_1 + x_2) - 4 \right] \right| \\
&= \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} \left| \frac{1}{3} [(x_2 + x_1)^2 - x_1 x_2] - \frac{k - 2}{2} (x_1 + x_2) - 4 \right| = \sqrt{(k - 2)^2 + 16} \left| \frac{(k - 2)^2}{6} + \frac{8}{3} \right|
\end{aligned}$$

Vậy S nhỏ nhất khi $k = 2$.

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \frac{10}{3}x - x^2$ và $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Điền đáp án:.....

Lời giải



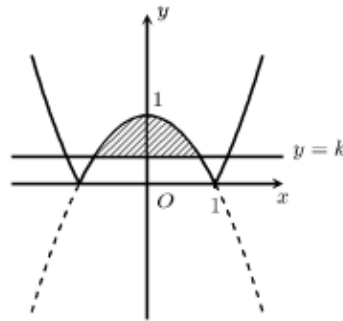
Khi $x \leq 1$ ta xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{10}{3}x - x^2 = -x$ giải ra nghiệm $x = 0$

Khi $x > 1$ ta xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{10}{3}x - x^2 = x - 2$ giải ra nghiệm $x = 3$

Vậy diện tích hình phẳng là

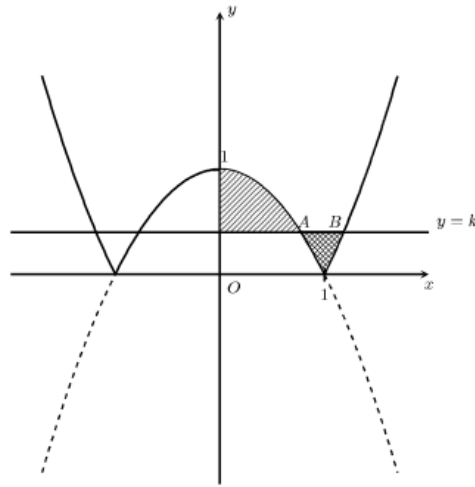
$$S = \int_0^1 \left(\frac{10}{3}x - x^2 + x \right) dx + \int_1^3 \left(\frac{10}{3}x - x^2 - x + 2 \right) dx = \frac{13}{2}.$$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên. Khi đó $k = \sqrt[m]{n} - p$ thì giá trị của $m + n + p$ bằng bao nhiêu?



Điền đáp án:.....

Lời giải



Gọi S là diện tích hình phẳng (H) . Lúc đó $S = 2S_1 + 2S_2$, trong đó S_1 là diện tích phần gạch sọc ở bên phải Oy và S_2 là diện tích phần gạch ca rô trong hình vẽ bên.

Gọi A, B là các giao điểm có hoành độ dương của đường thẳng $y = k$ và đồ thị hàm số $y = |x^2 - 1|$, trong đó $A(\sqrt{1-k}; k)$ và $B(\sqrt{1+k}; k)$.

Theo yêu cầu bài toán $S = 2 \cdot 2S_1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$.

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1-k}} (1-x^2-k) dx = \int_{\sqrt{1-k}}^1 (k-1-x^2) dx + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k-x^2+1) dx.$$

$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}.$$

$$+ (1-k)\sqrt{1-k} + (1+k)\sqrt{1+k} - \frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k} - (1+k) + \frac{1}{3}.$$

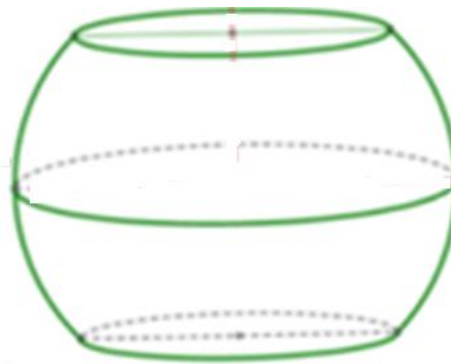
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+k})^3 = 2.$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt[3]{4} - 1 = \sqrt[n]{n} - p$$

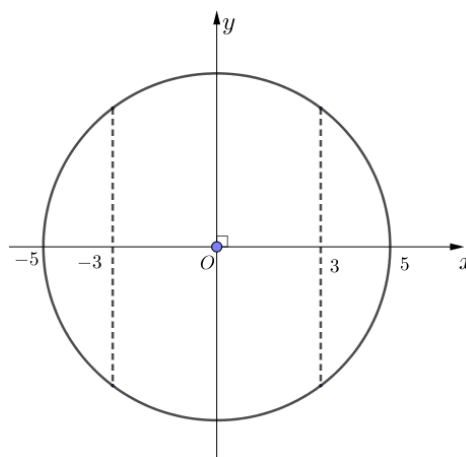
$$\text{Vậy } m = 3; n = 4; p = 1 \Rightarrow m + n + p = 8$$

Câu 5: Một khối cầu có bán kính là 5(dm), người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng 3(dm) để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước mà chiếc lu chứa được (quy tròn đến hàng đơn vị của decimét khối).



Điền đáp án:.....

Lời giải



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$.

Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5.

Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C) , trục Ox , hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là một nửa của cái lu.

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}.$$

$$\Rightarrow \text{Nửa trên trục } Ox \text{ của } (C) \text{ có phương trình } y = \sqrt{25 - x^2}.$$

Do đó, thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^3 (25 - x^2) dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 66\pi.$$

$$V = 2V_1 = 132\pi (\text{dm}^3) \approx 415 (\text{dm}^3).$$

Vậy thể tích nước mà chiếc lu chứa được khoảng 415dm^3 .

Câu 6: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + 2m$, với $m > 0$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$; $x = 0$ và $x = 4$. Khi $S = 8$ thì m bằng?

Điền đáp án:.....

Lời giải

Trả lời: $m = 1$

Theo đề ta có $\int_0^4 f(x)dx = F(4) - G(0) + 2m$ và $F(x) \Big|_0^4 = F(4) - G(0) + 2m$

$$\Rightarrow F(4) - F(0) = F(4) - G(0) + 2m \Rightarrow G(0) - F(0) = 2m. \quad (1)$$

Mặt khác, do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có $G(x) - F(x) = C$ (không đổi) với mọi $x \in \mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $G(x) - F(x) = 2m > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó ta có } S = \int_0^4 |G(x) - F(x)|dx = \int_0^4 2m \cdot dx = 2mx \Big|_0^4 = 8m.$$

Theo đề ta có $8m = 8 \Rightarrow m = 1$.