

CHƯƠNG 4. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

*. Đề kiểm tra rèn luyện

• Đề 1:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ khác $\vec{0}$. Tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{c} = (a_1b_3 - a_2b_1, a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3)$. B. $\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.
C. $\vec{c} = (a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1, a_2b_3 - a_3b_2)$. D. $\vec{c} = (a_1b_3 - a_3b_1, a_2b_2 - a_1b_2, a_3b_2 - a_2b_3)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây nhận $\vec{n} = (3; 1; -7)$ là một vector pháp tuyến?

- A. $3x + z + 7 = 0$. B. $3x - y - 7z + 1 = 0$. C. $3x + y - 7 = 0$. D. $3x + y - 7z - 3 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng $3x + y - 7z - 3 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 1; -7)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 2z + 2 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $B(4; 2; 1)$. B. $A(1; 2; 4)$. C. $D(2; 1; 4)$. D. $C(2; 4; -1)$.

Lời giải

♦ Thay tọa độ điểm $B(4; 2; 1)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 12 = 0 \text{ (Vô lí)} \Rightarrow \text{Điểm } B \notin (P).$$

♦ Thay tọa độ điểm $A(1; 2; 4)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow -3 = 0 \text{ (Vô lí)} \Rightarrow \text{Điểm } A \notin (P).$$

♦ Thay tọa độ điểm $D(2; 1; 4)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3.2 - 2.4 + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (Thỏa mãn)} \Rightarrow \text{Điểm } D \in (P).$$

♦ Thay tọa độ điểm $C(2; 4; -1)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta được:

$$3.2 - 2.(-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow 10 = 0 \text{ (Vô lí)} \Rightarrow \text{Điểm } C \notin (P).$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz có phương trình là

- A.** $2x - y = 0$. **B.** $x + y - z = 0$. **C.** $3y - 2z = 0$. **D.** $3x - z = 0$ vô số.

Lời giải

Gọi (P) là mặt phẳng chứa điểm A và trục Oz .

Oz đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (0; 0; 1)$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}, \overrightarrow{OA}] = (-2; 1; 0)$ và đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ nên có phương trình $2x - y = 0$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

- A.** $3x - 2y + 4z - 4 = 0$ **B.** $3x - 2y + 4z + 4 = 0$. **C.** $3x - 2y + 4z + 5 = 0$. **D.** $3x + 2y + 4z + 8 = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z - 5 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

Do (Q) song song với (P) nên (Q) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

Phương trình mặt phẳng $(Q): 3(x - 2) - 2(y + 1) + 4(z + 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4z + 4 = 0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

- A.** $3x + y + z - 6 = 0$. **B.** $6x - 2y - 2z - 1 = 0$. **C.** $3x - y - z + 1 = 0$. **D.** $3x - y - z = 0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB , suy ra $I(1; 1; 2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

(α) đi qua $I(1; 1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-6; 2; 2)$ làm một vector pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $-6(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 1 = 0$, $(Q): y = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A , vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $3x - y + 2z - 4 = 0$. **B.** $3x + y - 2z - 2 = 0$. **C.** $3x - 2z = 0$. **D.** $3x - 2z - 1 = 0$.

Lời giải

$(P): 2x - y + 3z - 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (2; -1; 3)$.

$(Q): y = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)} = (0; 1; 0)$.

Do mặt phẳng (R) vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có vector pháp tuyến $\vec{n}_{(R)} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] \Rightarrow \vec{n}_{(R)} = (-3; 0; 2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (R) là: $-3(x-1) + 0(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2z - 1 = 0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2;3;5)$, $B(3;2;4)$ và $C(4;1;2)$ có phương trình là

A. $3x - y + 2z - 4 = 0$. **B.** $x + y - 5 = 0$. **C.** $y - z + 2 = 0$. **D.** $2x + y - 7 = 0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; -3)$ suy ra $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; 0)$.

Vì $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \subset (ABC)$ nên (ABC) sẽ nhận $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ làm một vector pháp tuyến.

Hiển nhiên (ABC) đi qua $A(2;3;5)$ nên ta có phương trình của (ABC) là

$$1(x-2) + 1(y-3) + 0(z-5) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = 0$. **B.** $x - y - z - 2 = 0$. **C.** $4x + 2y + 2z + 4 = 0$. **D.** $2x + y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_1): x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = 0$ có $\frac{2}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \neq \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (P)$ không song

song với (Q_1) .

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_2): x - y - z - 2 = 0$ có $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow (P)$ không song song với (Q_2) .

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_3): 4x + 2y + 2z - 4 = 0$ có $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-4} \Rightarrow (P)$ song song với (Q_3) .

Xét $(P): 2x + y + z - 2 = 0$ và $(Q_4): 2x + y + z - 2 = 0$ có $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow (P)$ trùng với (Q_4) .

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $mx + (m-1)y + z - 10 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0$. Với giá trị nào của dưới đây của m thì (P) và (Q) vuông góc với nhau

- A.** $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

$(P): mx + (m-1)y + z - 10 = 0$ có VTPT $\vec{n}_P = (m; m-1; 1)$

$(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0$ có VTPT $\vec{n}_Q = (2; 1; -2)$.

(P) và (Q) vuông góc $\Leftrightarrow \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q \Leftrightarrow m \cdot 2 + (m-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A.** $d = \frac{5}{9}$. **B.** $d = \frac{5}{29}$. **C.** $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. **D.** $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Khoảng cách d từ A đến (P) là $d(A, (P)) = \frac{|3x_A + 4y_A + 2z_A + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{|3 - 8 + 6 + 4|}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow d(A, (P)) = \frac{5}{\sqrt{29}}$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$ là

- A.** $\frac{7}{\sqrt{14}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{14}}$. **C.** 14 . **D.** $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Lời giải

$(P): x + 2y + 3z - 1 = 0$ $(Q): x + 2y + 3z + 6 = 0$. Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \neq \frac{-1}{6}$

$$(P) // (Q) \text{ nên chọn } A(1;0;0) \in (P). \text{ Vì } (P) // (Q) \text{ nên } d((P);(Q)) = d(A,(Q)) \\ = \frac{|1+2.0+3.0+6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

Cách khác: Công thức tính nhanh: $(P): Ax + By + Cz + D_1 = 0; (Q): Ax + By + Cz + D_2 = 0$

$$(P) // (Q) \Rightarrow d((P);(Q)) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{Áp dụng công thức: } d((P);(Q)) = \frac{|-1-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}}.$$

 **Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian Oxyz với ba vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cho $A(1;1;2), B(2;-1;0), \vec{u} = (1;-2;-1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a) Tích có hướng của hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là vectơ $\vec{k}$.

b) $[\vec{u}, \vec{i}] = (0;1;2)$.

c) $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}] = (6;1;0)$.

d) $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (2;4;-3)$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

$$+ \text{Ta có } \begin{cases} \vec{i} = (1;0;0) \\ \vec{j} = (0;1;0) \end{cases} \Rightarrow [\vec{i}, \vec{j}] = (0;0;1) = \vec{k}.$$

$$+ \text{Ta có } \begin{cases} \vec{u} = (1;-2;-1) \\ \vec{i} = (1;0;0) \end{cases} \Rightarrow [\vec{u}, \vec{i}] = (0;-1;2).$$

$$+ \text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;-2;-2) \\ \vec{u} = (1;-2;-1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{u}] = (-2;-1;0).$$

$$+ \text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1;1;2) \\ \overrightarrow{OB} = (2;-1;0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (2;4;-3).$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;1;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;-2;1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

- a) Một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $[\overline{AB}, \overline{AC}]$.
- b) Vecto $\vec{n} = (1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .
- c) Vecto $\vec{u} = (1;1;0)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB .
- d) Vecto $\vec{v} = (1;2;3)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC .

Lời giải

a)	b)	c)	d)
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

+ Ta có một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $[\overline{AB}, \overline{AC}]$.

+ Ta có $\begin{cases} \overline{AB} = (2; -2; 2) \\ \overline{AC} = (2; -3; 1) \end{cases} \Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] = (4; 2; -2)$ là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) . Mà $\vec{n} = (1; 2; 3)$ không cùng phương với $[\overline{AB}, \overline{AC}]$ do $\frac{4}{1} \neq \frac{2}{2}$ nên $\vec{n} = (1; 2; 3)$ không là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

+ Ta có một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB là $[\overline{OA}, \overline{OB}] = (2; 2; 0)$. Mà $\vec{n} = (1; 1; 0)$ cùng phương với $[\overline{OA}, \overline{OB}]$ nên $\vec{n} = (1; 1; 0)$ cũng là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng đi qua O và chứa đường thẳng AB .

+ Ta có một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC là $[\overline{AB}, \overline{OC}] = (2; 0; -2)$. Mà $\vec{v} = (1; 2; 3)$ không cùng phương với $[\overline{AB}, \overline{OC}]$ nên $\vec{v} = (1; 2; 3)$ không phải là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng AB và OC .

Câu 3. Cho các điểm $A(1;-2;0)$; $B(2;-1;1)$; $C(1;1;2)$.

- a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + 2y - 3z - 3 = 0$.
- b) Phương trình mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với BC là $x - 2y - z - 5 = 0$.
- c) Phương trình mặt phẳng trung trực (β) của đoạn AC là $6y + 4z - 1 = 0$.
- d) Phương trình mặt phẳng (γ) chứa trục Ox và điểm C là $2y + z = 0$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1); \overrightarrow{AC} = (0; 3; 2)$

Vector pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -2; 3)$.

PT mặt phẳng (ABC) là: $-1(x-1) - 2(y+2) + 3z = 0$ hay $x + 2y - 3z + 3 = 0$

b) Vector pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (-1; 2; 1)$.

PT mặt phẳng (α) là: $-1(x-1) + 2(y+2) + 1z = 0$ hay $x - 2y - z - 5 = 0$

c) Ta có trung điểm của đoạn AC là $M\left(1; \frac{-1}{2}; 1\right)$

Vector pháp tuyến của (β) là $\vec{n} = \overrightarrow{AC} = (0; 3; 2)$.

PT mặt phẳng (β) là: $0(x-1) + 3\left(y + \frac{1}{2}\right) + 2(z-1) = 0$ hay $6y + 4z - 1 = 0$

d) Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0); \overrightarrow{OC} = (1; 1; 2)$

Vector pháp tuyến của (γ) là $\vec{n} = [\vec{i}, \overrightarrow{OC}] = (0; -2; 1)$.

PT mặt phẳng (ABC) là: $0x - 2y + 1z = 0$ hay $2y - z = 0$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 3 = 0$, $(Q): x + 2y - 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; 2; 3)$

a) Điểm A cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 5.

b) Mặt phẳng (Q) cắt mặt phẳng (P) .

c) Mặt phẳng $(R): 2x + 2y - z = 0$ cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 3.

d) Với mọi giá trị m thì hai mặt phẳng (P) và $(T): x + y + mz + 1 = 0$ cắt nhau.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
SAI	ĐÚNG	SAI	SAI

a) Ta có $d(A, (P)) = \frac{|2 + 4 - 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2$.

b) Ta có VTPT của hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_P = (2; 2; -1), \vec{n}_Q = (1; 2; -2)$.

Hơn nữa $\frac{2}{1} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-1}{-2}$ nên hai vectơ $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$ không cùng phương.

Do đó hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

c) Ta có hai mặt phẳng (P) và (R) song song nhau.

Lấy điểm $O(0;0;0)$ thuộc mặt phẳng (R) .

$$d((R), (P)) = d(O, (P)) = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 1$$

d) Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n_p} = (2; 2; -1)$. Mặt phẳng (T) có VTPT là $\vec{n_t} = (1; 1; m)$.

Vì hai mặt phẳng (P) và (T) cắt nhau nên hai VTPT $\vec{n_p}$ và $\vec{n_t}$ không cùng phương.

$$\Rightarrow m \neq \frac{-1}{2}.$$

Vậy với $m \neq \frac{-1}{2}$ thì hai mặt phẳng (P) và (T) cắt nhau.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng $Ax + By + z + D = 0$, $(A, B, D \in \mathbb{R})$. Giá trị của biểu thức $A + B + D$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: -6

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$, điều kiện $a > 0; b > 0; c > 0$

Độ dài OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3

$$\text{Suy ra } \begin{cases} OB = 3OA \\ OC = 3OB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ c = 9a \end{cases}$$

Nên $A(a; 0; 0), B(0; 3a; 0), C(0; 0; 9a)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (α) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{3a} + \frac{z}{9a} = 1$.

$$\text{Vì } M(1; 2; 3) \in (\alpha) \text{ nên } \frac{1}{a} + \frac{2}{3a} + \frac{3}{9a} = 1 \Leftrightarrow 6 = 3a \Leftrightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{18} = 1 \Leftrightarrow (\alpha): 9x + 3y + z - 18 = 0$$

$$\Rightarrow A = 9, B = 3, D = -18 \Rightarrow A + B + D = -6.$$

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1; 2; 3)$, $B(1; 2; 5)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + z + 5 = 0$. Biết điểm M nằm trên mặt phẳng (α) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tung độ của điểm M.

Lời giải

Đáp án: 4

Gọi I là trung điểm của AB nên $I(1; 2; 4)$

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2 = MI^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IB} + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overline{MI}(\overline{IA} + \overline{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

$MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$(\alpha): x - 2y + z + 5 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 1)$

Do $M \in (\alpha)$ nên $M(x_0; y_0; z_0)$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α) .

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} M \in (\alpha) \\ \overline{IM} = k\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2y_0 + z_0 + 5 = 0 \\ x_0 - 1 = k \\ y_0 - 2 = -2k \\ z_0 - 4 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 4 \\ z_0 = 3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Vậy tung độ của điểm M là 4.

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + z + 1 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với (α) , cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện OABC bằng 6. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 1,60

Do (P) song song với (α) nên (P) có phương trình: $2x + 3y + z + m = 0$, điều kiện $m \neq 1$.

Khi đó: (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm là: $A\left(-\frac{m}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; -\frac{m}{3}; 0\right)$, $C(0; 0; -m)$, với $m < 0$.

Thể tích khối tứ diện OABC bằng 6 nên $\frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = 6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot \left|-\frac{m}{2}\right| \cdot \left|-\frac{m}{3}\right| \cdot |-m| = 6 \Leftrightarrow -\frac{m^3}{36} = 6 \text{ (do } m < 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow m^3 = -216 \Leftrightarrow m = -6 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Ta có: } (P): 2x + 3y + z - 6 = 0 \Rightarrow d(O; (P)) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}} \approx 1,60.$$

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(1; 4; 9)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O) sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính khoảng cách d từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) (kết quả là tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 5,14

Giả sử $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $OA + OB + OC = a + b + c$

$$M(1; 4; 9) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}\right)(a + b + c) = \left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\right) \geq (1 + 2 + 3)^2.$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq 36.$$

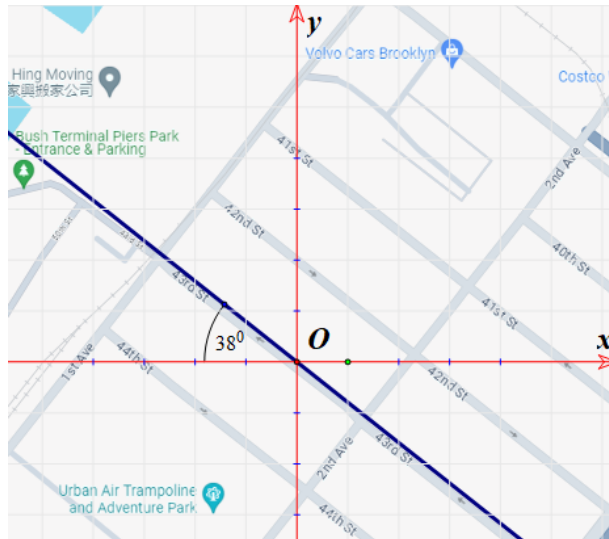
Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \end{cases} \xrightarrow{a+b+c=49} \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \\ c = 18 \end{cases}$. Nên $(P): \frac{x}{6} + \frac{y}{12} + \frac{z}{18} = 1$.

Vậy $d = \frac{36}{7} \approx 5,14$.

Câu 5. Manhattanhenge (Hình 1) là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng 38° so với hướng tây (Hình 2).



Hình 1



Hình 2

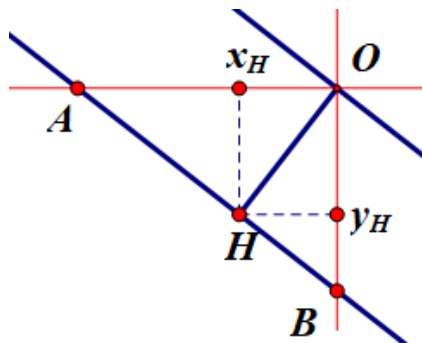
Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau $30m$ và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng

$$(Q): x + ay + bz + c = 0, \text{ với } c = \frac{m}{\sin n^\circ}. \text{ Tính } m + n.$$

Lời giải

Đáp án: 68

Gọi A, B là giao điểm của mp (Q) với trục Ox và Oy , H là hình chiếu vuông góc của O lên AB .



Vì khoảng cách giữa hai mặt phẳng bằng $30m$ nên $OH = 30$

Theo giả thiết, ta có góc $OAH = 38^\circ$, khi đó $OA = \frac{OH}{\sin 38^\circ} = \frac{30}{\sin 38^\circ}$,

$$x_H = -OH \cos 52^\circ = -30 \cos 52^\circ, \quad y_H = -OH \cos 38^\circ = -30 \cos 38^\circ$$

Tọa độ điểm $A\left(-\frac{30}{\sin 38^\circ}; 0; 0\right)$, $H(-30 \cos 52^\circ; -30 \cos 38^\circ; 0)$ chọn VTPT

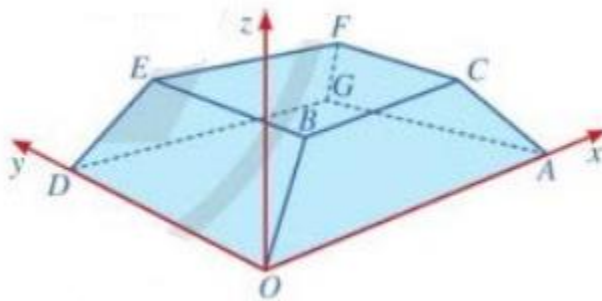
$$\vec{n} = \left(1; \frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ}; 0\right)$$

Mặt phẳng (Q) đi qua A vuông góc OH nhận $\vec{n}$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình

$$\left(x + \frac{30}{\sin 38^\circ}\right) + \frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ} y = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\cos 38^\circ}{\cos 52^\circ} y + \frac{30}{\sin 38^\circ} = 0$$

Vậy $m + n = 68$.

Câu 6. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100m$, chiều rộng $OD = 60m$ và tọa độ điểm $B(10; 10; 8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax + y + cz + d = 0$. Tính giá trị biểu thức $a + c + d$.



Lời giải

Đáp án: -10

Gắn hình chóp cắt vào hệ trục $Oxyz$, ta có:

$$O(0; 0; 0), A(100; 0; 0), G(100; 60; 0), D(0; 60; 0), B(10; 10; 8)$$

$$\text{Do } \overrightarrow{OA} = (100; 0; 0), \overrightarrow{OB} = (10; 10; 8) \text{ nên } \vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; -100; 1000).$$

Suy ra mặt phẳng $(OACB)$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (0; 1; -10)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ là $y - 10z = 0$.

Do đó $a = 0, c = -10, d = 0$. Vậy $a + c + d = 0 - 10 + 0 = -10$.

♦ **Đề 2:**

 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vector $\vec{b} = (1; 0; 2)$.

Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\vec{c} = (2; 6; -1)$. **B.** $\vec{c} = (4; 6; -1)$. **C.** $\vec{c} = (4; -6; -1)$. **D.** $\vec{c} = (2; -6; -1)$

Lời giải

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2; -6; -1).$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z + 2 = 0$. Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_2(2; 3; 1)$. **B.** $\vec{n}_3(2; 3; 2)$. **C.** $\vec{n}_1(2; 3; 0)$. **D.** $\vec{n}_4(2; 0; 3)$.

Lời giải

Véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_2(2; 3; 1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

A. $P(0; 0; -5)$. **B.** $M(1; 1; 6)$. **C.** $Q(2; -1; 5)$. **D.** $N(-5; 0; 0)$.

Lời giải

Ta có $1 - 2 \cdot 1 + 6 - 5 = 0$ nên $M(1; 1; 6)$ thuộc mặt phẳng (P) .

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$ và $B(3; 0; 2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $x + y + z - 3 = 0$. **B.** $2x - y + z + 2 = 0$. **C.** $2x + y + z - 4 = 0$. **D.** $2x - y + z - 2 = 0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Suy ra $I(1; 1; 1)$.

Ta có $\vec{AB} = (4; -2; 2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm I của AB và nhận $\vec{AB}$ làm vtpt, nên có phương trình là $(\alpha): 2x - y + z - 2 = 0$.

- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.
- A.** $x - 2y + 3z + 12 = 0$. **B.** $x - 2y - 3z - 6 = 0$. **C.** $x - 2y + 3z - 12 = 0$. **D.** $x - 2y - 3z + 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$ là $1(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z + 12 = 0$.

- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .
- A.** $2x - 3y - z - 20 = 0$. **B.** $3x - y + 3z - 25 = 0$. **C.** $2x - 3y - z + 8 = 0$. **D.** $3x - y + 3z - 13 = 0$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 6; 2) = -2(2; -3; -1)$$

(P) đi qua $A(5; -4; 2)$ nhận $\vec{n} = (2; -3; -1)$ làm VTPT

Do đó, phương trình mặt phẳng (P) : $2(x - 5) - 3(y + 4) - 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - z - 20 = 0$

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$ $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là
- A.** $3x + 2z + 1 = 0$. **B.** $x + 2y - 2z + 1 = 0$. **C.** $x + 2y - 2z - 1 = 0$. **D.** $3x + 2z - 1 = 0$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; -2; 2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) cần tìm.

$\vec{n} = -\overrightarrow{BC} = (1; 2; -2)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x + 2y - 2z + 1 = 0$.

- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 4)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là
- A.** $2x - 2y + 4z - 21 = 0$. **B.** $3x - 2y + z - 12 = 0$. **C.** $2x - 2y + 4z + 21 = 0$. **D.** $3x - 2y + z + 12 = 0$

Lời giải

Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

$$3(x - 2) - 2(y + 1) + (z - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 12 = 0.$$

- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1; 2; -3)$ đến mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$.

A. $\frac{11}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } d(M; (P)) = \frac{|1 + 2.2 + 2.(-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-11|}{3} = \frac{11}{3}.$$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = -12$.

B. $S = 2$.

C. $S = -4$.

D. $S = -2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-6; 3; 1).$$

$$\overrightarrow{n_{(Q)}} = (3; 1; 1) \text{ là VTPT của mp}(Q).$$

$\text{Mp}(P)$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q) .

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(Q)}}] = (2; 9; -15) \text{ là VTPT của mp}(P)$$

$$\text{Vì } A(3; 2; 1) \in (P) \Rightarrow (P): 2x + 9y - 15z - 9 = 0 \text{ hoặc } (P): -2x - 9y + 15z + 9 = 0$$

$$\text{Mặt khác } (P): ax + by + cz - 9 = 0 \Rightarrow a = 2; b = 9; c = -15.$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = 2 + 9 + (-15) = -4.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là

A. $M(0; -3; 0)$.

B. $M(0; 3; 0)$.

C. $M(0; -2; 0)$.

D. $M(0; 1; 0)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M \in Oy \Rightarrow M(0; y; 0).$$

$$\text{Theo giả thiết: } d(M; (P)) = d(M; (Q)) \Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-y-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -3.$$

$$\text{Vậy } M(0; -3; 0).$$

Câu 12: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

A. $x + y - z + 6 = 0$; $x + y - z = 0$.

B. $x + y - z + 6 = 0$.

C. $x - y - z + 6 = 0$; $x - y - z = 0$.

D. $x + y + z + 6 = 0$; $x + y + z = 0$.

Lời giải

Gọi mặt phẳng (α) cần tìm.

Vì $(\alpha) // (\beta)$ nên phương trình (α) có dạng: $x + y - z + c = 0$ với $c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lấy điểm $I(-1; -1; 1) \in (\beta)$.

Vì khoảng cách từ (α) đến (β) bằng $\sqrt{3}$ nên ta có:

$$d(I, (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|-1-1-1+c|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|c-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=6 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện } c \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{)}.$$

Vậy phương trình (α) là: $x + y - z + 6 = 0$; $x + y - z = 0$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, Cho tam giác ABC với $A(1;1;1), B(1;2;2), C(4;1;0)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\overrightarrow{AB} = (0;1;1)$.
- b) Tích có hướng của hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là $\vec{a} = (-1;3;-3)$.
- c) $\overrightarrow{BC}, \vec{b} = (6;-2;-4)$ là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (ABC) .
- d) Vector pháp tuyến của mặt phẳng (AOB) là: $\vec{n} = (1;1;2)$.

Lời giải

a) Đúng.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (0;1;1)$$

b) Đúng.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (0;1;1), \overrightarrow{AC} = (3;0;-1)$$

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1;3;-3)$$

c) Sai.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = (3;-1;-2)$$

Do đó $\vec{b} = 2\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC}, \vec{b}$ là hai vector cùng phương. Do đó $\overrightarrow{BC}, \vec{b}$ **không** phải là cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (ABC) .

d) Sai

Mặt phẳng (AOB) có cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{OA} = (1;1;1), \overrightarrow{OB} = (1;2;2)$ nên có vector pháp tuyến là: $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0;-1;1)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, Cho các điểm $A(1;-2;-1), B(4;1;2), C(2;3;1)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB} = (3; 3; 3)$.

b) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C có vector pháp tuyến là: $\vec{a} = (3; 1; -4)$.

d) Mặt phẳng (α) đi qua A đồng thời song song với Oy và đường thẳng BC có vector pháp tuyến là: $\vec{n} = (1; 0; 2)$.

Lời giải

a) Đúng

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (3; 3; 3)$$

b) Đúng

Hai vector $\overrightarrow{AB} = (3; 3; 3), \overrightarrow{AC} = (1; 5; 2)$ không cùng phương nên 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

c) Đúng

Mặt phẳng (ABC) có cặp vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (3; 3; 3), \overrightarrow{AC} = (1; 5; 2)$ nên có vector pháp tuyến là: $\vec{b} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-9; -3; 12)$. Do đó $\vec{a} = (3; 1; -4)$ cũng là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .

d) Sai.

Vector $\vec{j} = (0; 1; 0)$ có giá song song mặt phẳng (α) ; vector $\overrightarrow{BC} = (-2; 2; -1)$ có giá song song mặt phẳng (α) . Hai vector $\vec{j}, \overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó: mặt phẳng (α) có cặp vector chỉ phương $\vec{j} = (0; 1; 0), \overrightarrow{BC} = (-2; 2; -1)$ nên mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến là: $\vec{n} = [\vec{j}, \overrightarrow{BC}] = (-1; 0; 2)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 0), B(1; 0; 2), C(2; 1; 3)$, và mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 7 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến là $(2; 1; 1)$.

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(3; 1; 5)$.

c) Mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng 6.

Lời giải

a) Sai.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB}(0; -2; 2), \overrightarrow{BC}(1; 1; 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (-4; 2; 2) = 2(-2; 1; 1) = 2\vec{n}$$

Mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến: $\vec{n}(-2; 1; 1)$.

b) Đúng

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $-2(x-1)+1(y-2)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -2x+y+z=0$.

Thay toạ độ điểm $M(3;1;5)$ vào phương trình mặt phẳng (ABC) : $-2.3+1+5=0$: thoả mãn.

c) Sai.

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) : $\vec{n_p} = (1; -1; 2)$.

$\vec{n_p} \cdot \vec{n} = -2.1 - 1.1 + 1.2 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Mặt phẳng (ABC) không vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Sai.

$$d(A; (P)) = \frac{|1 - 2 + 2.0 + 7|}{\sqrt{1+1+4}} = \sqrt{6}.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c đều dương.

a) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

b) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $G(1;2;3)$ sao cho G là trọng tâm ΔABC là $6x+3y+2z+18=0$

c) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $H(1;1;1)$ sao cho H là trực tâm ΔABC là $x+y+z-3=0$

d) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2;-2;3)$ sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng có công sai bằng 2. Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α) bằng $\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, khi đó $T = m + n = 19$.

Lời giải

a) Đúng

Theo phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (ABC) có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

b) Sai

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ ta có } \begin{cases} \frac{a}{3} = 1 \\ \frac{b}{3} = 2 \\ \frac{c}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

$$\text{Mặt phẳng } (ABC) \text{ có phương trình } \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$$

c) Đúng

$$\text{Vì } H(1;1;1) \text{ là trực tâm } \Delta ABC \text{ ta có } \begin{cases} H \in (ABC) \\ \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ -b + c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$$

Phương trình (ABC) là: $x + y + z - 3 = 0$

d) Đúng

Giả sử mặt phẳng (α) cắt tia Ox tại điểm có hoành độ bằng a ($a > 0$) khi đó phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{a+2} + \frac{z}{a+4} = 1$.

Do (α) đi qua điểm $M(2; -2; 3)$ nên ta có $\frac{2}{a} + \frac{-2}{a+2} + \frac{3}{a+4} = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy (α) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6)$.

Gọi $d = d(O, (ABC))$.

Áp dụng công thức tính nhanh ta có $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{49}{144}$
 $\Rightarrow d^2 = \frac{144}{49} \Rightarrow d = \frac{12}{7}$.

Vậy: $T = m + n = 19$.

📖 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 4; 5), B(3; 4; 0), C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 3x + 3y - 2z - 29 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt GTNN. Tính tổng $a + b + c$.

Lời giải

Chọn điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(2; 1; 1)$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= MA^2 + MB^2 + 3MC^2 \\ &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 \\ &= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 \end{aligned}$$

$$T_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$$

Suy ra, M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P)

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_{\Delta}} = \overrightarrow{n_p} = (3; 3; -2)$$

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$M \in \Delta \Rightarrow M(2 + 3t; 1 + 3t; 1 - 2t)$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 3(2 + 3t) + 3(1 + 3t) - 2(1 - 2t) - 29 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(5; 4; -1)$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 5 + 4 - 1 = 8.$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) , (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của mặt phẳng (P) là $ax + by + 2z + d = 0$ với $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Giá trị của d bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC) \text{ là: } \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0$$

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ABC) nên (P) có dạng:
 $6x + 3y + 2z + d = 0 \quad (d \neq -12)$

Vì (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) nên ta có:
 $d(D; (P)) = d((ABC); (P)) \Leftrightarrow d(D; (P)) = d(A; (P)) \Leftrightarrow |36 + d| = |12 + d| \Leftrightarrow d = -24.$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.

Câu 3. Cho hai điểm $A(3; -1; 2), B(2; 3; -3), C(-2; 1; -2)$ và mặt phẳng (Oyz) . Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oyz) sao $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ có giá trị min. Tính tổng $a - 2b + c$.

Lời giải

Gọi $I(a; b; c)$, sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I$ là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow I(1; 1; -1)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \\ &= 3MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}), \text{ (mà } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}) \\ &= 3MI^2 + (\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}) \end{aligned}$$

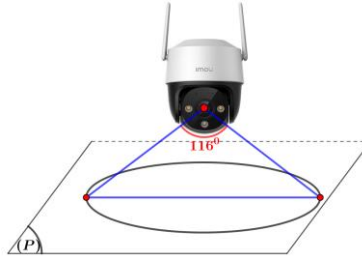
Vì điểm I, A, B, C cố định nên $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}$ có giá trị không đổi.

Để $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ có giá trị min $\Leftrightarrow MI$ min.

Mà I cố định nên M là hình chiếu của I lên (Oyz) , suy ra $M(0; 1; -1)$.

Vậy $a - 2b + c = 0 - 2 \cdot 1 - 1 = -3$.

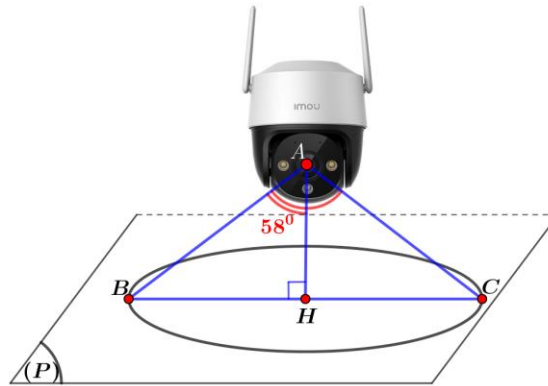
- Câu 4.** Biết góc quan sát ngang của một camera là 116° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 13 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có đường kính bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số hàng chục)



Lời giải

Gọi A, B, C là các điểm như hình vẽ bên dưới và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) .

Hình vẽ



Theo đề $BAC = 116^\circ \Rightarrow BAH = 58^\circ$.

Khi đó $AH = d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 - 2 \cdot 5 + 13|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2$ (đvdd).

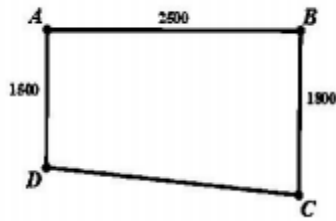
Xét tam giác ABH vuông tại H , ta có:

$$\tan BAH = \frac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \tan 58^\circ \cdot 2 = 2 \tan 58^\circ \text{ (đvdd)}.$$

Suy ra $BC = 2BH = 2 \cdot 2 \tan 58^\circ \approx 6,4$ (đvdd)

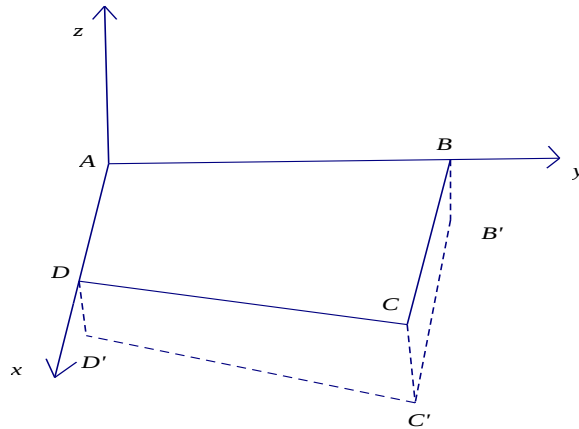
Vậy vùng quan sát của camera trên mặt phẳng (P) là hình tròn có đường kính khoảng 6,4 (đvdd).

- Câu 5.** Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D , như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\text{m}$, $AD = 15\text{m}$, $BC = 18\text{m}$. Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B , C , D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm , $a\text{cm}$, 6cm tương ứng. Giá trị của a là

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B , C , D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm , $a\text{cm}$, 6cm tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

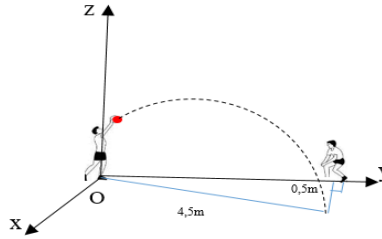
Theo bài ra có bốn điểm A ; B' ; C' ; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D')$: $x + y + 250z = 0$.

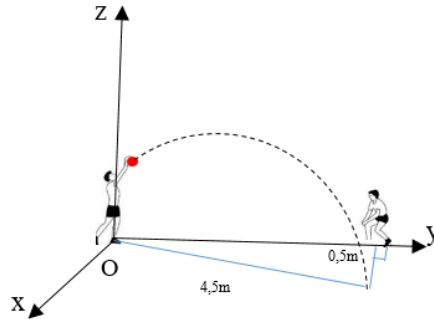
Do $C'(1800; 2500; -a) \in (AB'D')$ nên có: $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

Vậy $a = 17,2\text{cm}$.

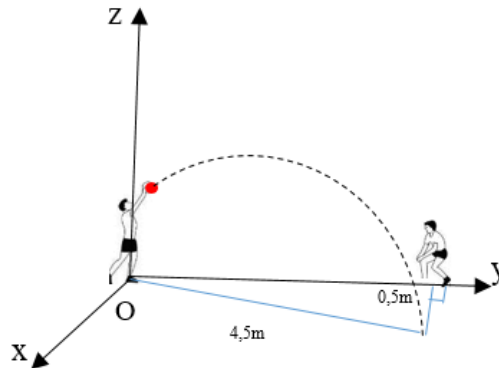
Câu 6. Trong tiết thể dục học về kỹ thuật chuyển bóng hơi, Nam và An đang tập chuyển bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An $0,5\text{m}$ và cách Nam $4,5\text{m}$ được mô tả bằng hình vẽ bên dưới



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + \frac{1}{2}y + cx + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Khi đó giá trị của $a + c + d$ bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là điểm mà quả bóng chạm đất.

Khi đó $x_M = 0,5$, $y_M = \sqrt{4,5^2 - 0,5^2} = 2\sqrt{5}$

Vì $(\alpha) \perp (Oxy)$ nên (α) có véc tơ chỉ phương $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Mà (α) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM} = (0,5; 2\sqrt{5}; 0)$

Khi đó véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}_\alpha = [\vec{k}, \overrightarrow{OM}] = (-2\sqrt{5}; 0,5; 0)$.

Vậy $(\alpha): -2\sqrt{5}x + 0,5y = 0$ nên $a = -2\sqrt{5}; b = 0,5; c = 0; d = 0 \Rightarrow a + b + c + d \approx -4,5$.

♦Đề 3:

👉 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Trong không gian Oxyz, mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là

- A.** $\vec{n}_\alpha = (1; -1; 2)$ **B.** $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 2)$ **C.** $\vec{n}_\alpha = (2; 2; 4)$ **D.** $\vec{n}_\alpha = (1; -1; 1)$

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; -1; 2)$

Câu 2: Trong không gian Oxyz, mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-5} = 1$ có vectơ pháp tuyến là

- A.** $\vec{n}_\alpha = (15; 10; -6)$ **B.** $\vec{n}_\alpha = (2; 3; 5)$ **C.** $\vec{n}_\alpha = (15; 10; 6)$ **D.** $\vec{n}_\alpha = (2; 3; -5)$

Lời giải

Mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-5} = 1$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{-5}\right) = \frac{1}{30}(15; 10; -6)$

Câu 3: Khoảng cách từ $A(0; 2; 1)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 5 = 0$ bằng:

- A.** $\frac{6}{\sqrt{14}}$ **B.** 6 **C.** 4 **D.** $\frac{4}{\sqrt{14}}$

Lời giải

Ta có $d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 + 3 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$.

Câu 4: Khoảng cách từ $M(1; -1; -2)$ đến mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$ bằng:

- A.** $\frac{1}{7}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$ **C.** $\sqrt{7}$ **D.** $\frac{2}{7}$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$ hay $(P): 6x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Do đó $d(M, (P)) = \frac{|6 + 3 - 4 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{1}{7}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z - 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đã cho là

- A.** $\frac{4}{9}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 4

Lời giải

Lấy $A(1; 1; 3) \in (P)$.

Do (P) song song với (Q) nên ta có $d((P), (Q)) = d(A, (Q)) = \frac{|1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}$

Câu 6: Trong không gian Oxyz, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để khoảng cách từ điểm $I(2; -1; -2)$ đến mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$ bằng 2.

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$ hoặc $m = -21$.

C. $m = 1$ hoặc $m = 21$. **D.** $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Lời giải

Ta có: $d(I; (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|11 - m|}{5} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 21 \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 4 = 0$; $(Q): 5x - 3y - 2z - 7 = 0$. Vị trí tương đối của $(P) \& (Q)$ là

A. Song song. **B.** Cắt nhưng không vuông góc.

C. Vuông góc. **D.** Trùng nhau.

Lời giải

$\vec{n}_{(P)} = (2; -3; 1); \vec{n}_{(Q)} = (5; -3; -2) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} \neq k \cdot \vec{n}_{(Q)} (k \neq 0)$.

$\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} \neq 0$.

Vậy vị trí tương đối của $(P) \& (Q)$ là cắt nhưng không vuông góc.

Câu 8: Giá trị của m để hai mặt phẳng $(\alpha): 7x - 3y + mz - 3 = 0$ và $(\beta): x - 3y + 4z + 5 = 0$ vuông góc với nhau là

A. 6.

B. -4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha = (7; -3; m)$.

Mặt phẳng (β) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = (1; -3; 4)$.

$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow 7 + 9 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 12 = 0$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A. $(0; 4; 0)$

B. $(0; 6; 0)$

C. $(0; 3; 0)$

D. $(0; -4; 0)$

Lời giải

Gọi $M = Oy \cap (P) \Rightarrow M(0; b; 0)$. $M \in (P) \Rightarrow 3b - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 4$.

Vậy $M(0; 4; 0)$.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -3; 1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A. $z = 1$.

B. $z = 2$.

C. $z = -3$.

D. $z = 0$.

Lời giải

Mặt phẳng (Oxy) nhận vector đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vector pháp tuyến

Mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -3; 1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) cũng nhận vector $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vector pháp tuyến nên có phương trình: $0.(x - 2) + 0.(y + 3) + 1.(z - 1) = 0 \Rightarrow z = 1$.

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(2; -1; 4)$ và mặt phẳng (P): $3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

A. $2x - 2y + 4z - 21 = 0$. **B.** $x - 2z + 1 = 0$

C. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

D. $3x - 2y + z + 12 = 0$.

Lời giải

Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

$$3(x - 2) - 2(y + 1) + (z - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 12 = 0.$$

Câu 12: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và song song với CD.

A. $4x - 5y + z + 24 = 0$. **B.** $x - 2z + 1 = 0$

C. $10x + 9y + 5z - 74 = 0$.

D. $10x + 9y + 5z + 74 = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-4; 5; -1), \overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}] = (10; 9; 5)$$

Ta có mp (P) đi qua $A(5; 1; 3)$ và nhận $\vec{n} = (10; 9; 5)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình

$$10(x - 5) + 9(y - 1) + 5(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 10x + 9y + 5z - 74 = 0.$$

 **Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 1; 0)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(1; 1; 1)$.

b) Phương trình mặt phẳng (P) là $x + y - z + 1 = 0$.

c) Mặt phẳng (P) cắt trục Ox tại điểm $M(-1; 0; 0)$.

d) Điểm $N(1; -2; 0)$ thuộc mặt phẳng (P).

Lời giải

+ Ta có: $\overline{AB}=(2;-3;-1)$; $\overline{AC}=(-2;0;-2)$.

$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 6; -6)$. Suy ra $\vec{n}(1;1;1)$ không là vector pháp tuyến của (P) . Nên a) sai

+ Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6}[\overline{AB}; \overline{AC}] = (1;1;-1)$ là một VTPT của (P) . Ta có pt (P) là:

$x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0$. Suy ra b) đúng

+ (P) cắt trục Ox tại điểm $M(-1;0;0)$. Suy ra c) đúng.

+ Thay tọa độ điểm $N(1;-2;0)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta có $1-2-0+1=0$ nên d) đúng

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ và ba điểm A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ lên các trục tọa độ. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}(6;3;2)$.

b) Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$.

c) Điểm $M(3;0;-2)$ thuộc mặt phẳng (P) .

d) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{6}{7}$.

Lời giải

+ Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;3)$ lên Ox, Oy, Oz .

Suy ra: $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$.

+ Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) theo đoạn chắn là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

+ Từ đó ta có a) đúng và b) sai

+ Thay tọa độ điểm $M(3;0;-2)$ vào phương trình $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ ta có $6.3 + 3.0 + 2.(-2) - 6 = 8 \neq 0$ nên điểm $M(3;0;-2)$ không thuộc mặt phẳng (P) . Suy ra c) sai.

+ Ta có $d(O, (P)) = \frac{|-6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}$. Suy ra d) đúng

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2); B(2; 1; 1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) là $(3; -2; -1)$.
- b) Phương trình mặt phẳng (Q) là $3x - 2y - z + 3 = 0$.
- c) Điểm $M(3; 1; 2)$ không thuộc mặt phẳng (Q) .
- d) Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(R): 6x - 4y - 2z - 6 = 0$.

Lời giải

+ Mặt phẳng (P) có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; 1; 1)$. Véc tơ $\overrightarrow{AB} = (1; 2; -1)$.

+ Gọi $\vec{n}$ là một véc tơ pháp tuyến của (Q) , do (Q) vuông góc với (P) nên $\vec{n}$ có giá vuông góc với $\vec{n}_p$, mặt khác véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có giá nằm trong mặt phẳng (Q) nên $\vec{n}$ cũng vuông góc với $\overrightarrow{AB}$

+ Mà $\vec{n}_p$ và $\overrightarrow{AB}$ không cùng phương nên ta có thể chọn $\vec{n} = [\vec{n}_p, \overrightarrow{AB}] = (-3; 2; 1)$ suy ra $(3; -2; -1)$ cũng là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) nên a) đúng

+ Mặt khác (Q) đi qua $A(1; -1; 2)$ nên phương trình của mặt phẳng (Q) là: $-3(x-1) + 2(y+1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z - 3 = 0$. Suy ra b) sai

+ Thay tọa độ điểm $M(3; 1; 2)$ vào phương trình $3x - 2y - z - 3 = 0$ ta có $3.3 - 2.1 - 2 - 3 = 2 \neq 0$ nên điểm $M(3; 1; 2)$ không thuộc mặt phẳng (Q) . Suy ra c) đúng.

+ Ta có $\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-3}{-6}$ nên $(P) \equiv (Q)$. Vậy d) sai

Câu 4: Mặt phẳng (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và vuông góc với hai mặt phẳng: $(P): x + y + z + 2 = 0; (Q): 2x - y + z - 4 = 0$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

	Khẳng định	Đúng	Sai
a	Mặt phẳng (α) có một vector pháp tuyến là: $\vec{n} = (-2; 1; 3)$		
b	Mặt phẳng (α) có phương trình là: $2x + y - 3z - 13 = 0$		
c	Mặt phẳng (α) đi qua điểm $B(2; 0; 0)$		
d	Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): 4x + 2y - 6z - 3 = 0$		

Lời giải

a	b	c	d
Sai	Đúng	Sai	Đúng

Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng: $(P): x + y + z + 2 = 0$; $(Q): 2x - y + z - 4 = 0$ nên có cặp vector chỉ phương: $\vec{n}_1 = (1; 1; 1)$ và $\vec{n}_2 = (2; -1; 1)$.

Do đó mặt phẳng (α) có vector pháp tuyến: $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2; 1; -3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $2(x - 1) + (y - 2) - 3(z + 3) = 0 \Rightarrow 2x + y - 3z - 13 = 0$.

Do $2 \cdot 2 + 0 - 3 \cdot 0 - 13 \neq 0 \Rightarrow B \notin (\alpha)$.

Để thấy, mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): 4x + 2y - 6z - 3 = 0$.

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và chứa trục Ox có dạng $ax + 3y + cz + d = 0$. Tính $2a + 3c - d$.

Lời giải

Đáp án: 6.

Trục Ox chứa điểm $O(0; 0; 0)$ và điểm $B(1; 0; 0)$.

Do mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và chứa trục Ox nên mặt phẳng (P) có cặp vector chỉ phương:

$$\vec{OA} = (1; 2; -3)$$

$$\vec{OB} = (1; 0; 0)$$

Do đó mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến: $\vec{n} = \vec{OA} \times \vec{OB} = (0; -3; -2)$.

Phương trình mặt phẳng là: $0(x - 0) - 3(y - 0) - 2(z - 0) = 0 \Rightarrow 3y + 2z = 0$.

Vậy $2a + 3c - d = 6$.

Câu 2: Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 15 = 0$ và cách điểm $A(2; 1; 1)$ một khoảng bằng 5 có dạng $ax + by + 2z + d = 0$ với d là một số dương. Tính $a + b - 2d$.

Lời giải

Đáp án: -27.

Do mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 15 = 0$ nên phương trình mặt phẳng (α) có dạng $x - 2y + 2z + d = 0$.

Ta có:

$$d_{(A;(\alpha))} = \frac{|2 - 2.1 + 2.1 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|2 + d|}{3} = 5$$

$$\text{P } |2 + d| = 15$$

$$\text{U } \begin{aligned} &\acute{e}d = 13 \\ &\grave{e} \\ &\grave{e}d = -17. \end{aligned}$$

$$\text{Do } d > 0 \text{ P } d = 13$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $x - 2y + 2z + 13 = 0$.

$$\text{Vậy } a + b - 2d = 1 - 2 - 2.13 = -27.$$

Câu 3: Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(P): x - 3y + 4z + 5 = 0$ và cách đều 2 điểm $A(3; -1; 2)$ và $B(2; 0; -1)$ có dạng $x + by + cz + d = 0$. Tính $b + 2c + 3d$.

Lời giải

Đáp án: -13.

Do mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(P): x - 3y + 4z + 5 = 0$ nên phương trình mặt phẳng (α) có dạng $x - 3y + 4z + d = 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned} d_{(A;(\alpha))} &= d_{(B;(\alpha))} \\ \frac{|3 - 3.(-1) + 4.2 + d|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}} &= \frac{|2 - 3.0 + 4.(-1) + d|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}} \end{aligned}$$

$$\text{U } |14 + d| = |d - 2|$$

$$\text{U } \begin{aligned} &\acute{e}14 + d = d - 2 \\ &\grave{e} \end{aligned}$$

$$\text{U } 14 + d = 2 - d$$

$$\text{U } d = -6.$$

Phương trình mặt phẳng là: $x - 3y + 4z - 6 = 0$.

$$\text{Vậy } b + 2c + 3d = -3 + 2.4 + 3(-6) = -13.$$

Câu 4: Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $C(2; 1; 0)$; $D(1; 4; 1)$ và cách đều 2 điểm $A(1; 0; 2)$ và $B(1; 2; -3)$ có dạng $x + by + cz + d = 0$ với b là một số nguyên. Tính $5b + c + d$.

Lời giải

Đáp án: 0.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$.

$$\text{Do } C \in (\alpha) \text{ P } 2a + b + d = 0 \text{ P } d = -2a - b \quad (1).$$

$$\text{Do } D \in (\alpha) \text{ P } a + 4b + c + d = 0 \text{ P } c = -a - 4b - d = -a - 4b + 2a + b = a - 3b \quad (2)$$

Ta có:

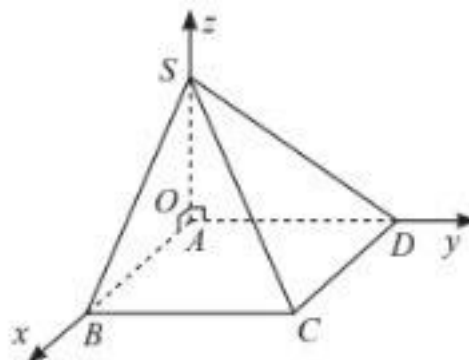
$$\begin{aligned} d_{(A;(\alpha))} &= d_{(B;(\alpha))} \\ \frac{|1+c \cdot 2+d|}{\sqrt{1^2+b^2+c^2}} &= \frac{|1+2b-3c+d|}{\sqrt{1^2+b^2+c^2}} \hat{=} |2c+d+1| = |2b-3c+d+1| \\ \hat{=} |2-6b-2-b+1| &= |2b-3+9b-2-b+1| \hat{=} |1-7b| = |10b-4| \\ \hat{=} \begin{cases} 1-7b=10b-4 \\ 1-7b=4-10b \end{cases} &\hat{=} \begin{cases} 9b=5 \\ 3b=3 \end{cases} \quad (l) \\ &\hat{=} \begin{cases} b=\frac{5}{9} \\ b=1 \end{cases} \quad (tm) \end{aligned}$$

Với $b=1$ $\begin{cases} c=-2 \\ d=-3 \end{cases}$.

Phương trình mặt phẳng là: $x+y-2z-3=0$.

Vậy $5b+c+d=5 \cdot 1-2-3=0$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy; tứ giác $ABCD$ là hình vuông; $SA=AB=3$. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, phương trình mặt phẳng (SBC) có dạng: $x+by+cz+d=0$. Tính $b^2+c^2+d^2$.



Lời giải

Đáp án: 10.

Trong hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có

$B(3;0;0); C(3;3;0); S(0;0;3)$.

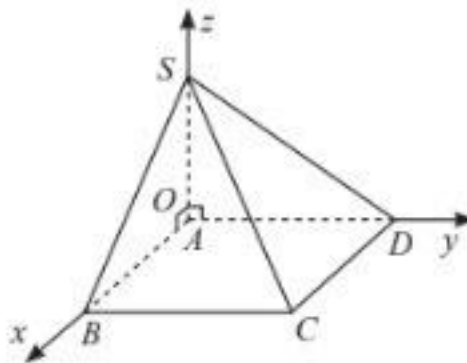
Mặt phẳng (SBC) có cặp vector chỉ phương $\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (-3;0;3) \\ \overrightarrow{SC} = (-3;-3;3) \end{cases}$.

Do đó, mặt phẳng (SBC) có vector pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC} = (9;0;9)$.

Phương trình mặt phẳng (SBC) là: $9(x-3)+9(z-0)=0 \hat{=} x+z-3=0$.

Vậy $b^2+c^2+d^2=0^2+1^2+(-3)^2$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy; tứ giác $ABCD$ là hình vuông; $SA = 3$; $AB = 2$. Bằng cách thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) . (làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 1,66.

Trong hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có

$A(0;0;0)$; $C(2;2;0)$; $D(0;2;0)$; $S(0;0;3)$.

Mặt phẳng (SCD) có cặp vectơ chỉ phương $\begin{cases} \overrightarrow{SC} = (-2; -2; 3) \\ \overrightarrow{SD} = (0; -2; 3) \end{cases}$.

Do đó, mặt phẳng (SCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \overrightarrow{SC} & \overrightarrow{SD} \end{vmatrix} = (0; 6; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (SBC) là: $0(x - 0) + 6(y - 0) + 4(z - 3) = 0 \hat{=} 3y + 2z - 6 = 0$.

Vậy $d_{(A;(SCD))} = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.