

***. Đề kiểm tra rèn luyện**

♦ **Đề 1:**

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$ và $(Q): x+y+z-1=0$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 2; -2)$ và $\vec{n}_Q = (1; 1; 1)$.

Ta có: $\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 2. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(\alpha): x+y-10z+2025=0$. Khi đó $\cos\varphi$ là:

- A. 0. B. $\frac{1}{\sqrt{102}}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{120}}$.

Lời giải

Ta có mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$, mặt phẳng $(\alpha): x+y-10z+2025=0$ có

vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 1; -10)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng thì $\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{102}}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 30° . B. 48° . C. 60° . D. 132° .

Lời giải

Trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{j} = (0; 0; 1)$; đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -2)$;

Ta có: $\cos(\Delta, Oz) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{j}) \right| = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$.

Nên $(\Delta, Oz) \approx 48^\circ$.

Câu 4. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng chứa Ox và mặt phẳng $(\alpha): x + y + 12 = 0$. Khi đó φ bằng:

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Ta có đường thẳng chứa Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 0; 0)$, mặt phẳng $(\alpha): x + y + 12 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 0)$. Gọi φ là góc giữa đường và mặt thì $\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 5 = 0$ và $(Q): 2x + y - 3z - 1 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

A. 20° .

B. 22° .

C. 25° .

D. 27° .

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 2; -3)$ và $\vec{n}_Q = (2; 1; -3)$.

Ta có: $\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{14}$.

Nên $((P), (Q)) \approx 22^\circ$.

Câu 6. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 2m \\ y = 2 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Ta có đường $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$, đường $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 2m \\ y = 2 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases}$ có vectơ chỉ

phương là $\vec{u}_2 = (-2; -2; 1)$. Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{4}{9}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x-y-2z+4=0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 161° . B. 109° . C. 71° . D. 19° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1;3)$; Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;-2)$.

$$\text{Ta có: } \sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

Nên $(\Delta, (P)) \approx 19^\circ$.

Câu 8. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}$. Gọi

φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có đường $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(1;2;1)$, đường $\Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}$ có

vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2=(1;1;2)$. Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{5}{6}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-8}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng

$(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 83° . B. 7° . C. 41° . D. 49° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;1;2)$; Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;2;3)$

$$\text{Ta có: } \sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|-1.6 + 1.2 + 2.3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{21}.$$

Nên $(\Delta, (P)) \approx 7^\circ$.

Câu 10. Khi đặt hệ tọa độ $Oxyz$ vào không gian với đơn vị trên trục tính theo kilômét, người ta thấy rằng một không gian phủ sóng điện thoại có dạng một hình cầu (S) (tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên mặt cầu tương ứng). Biết mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Khoảng cách xa nhất giữa hai vùng phủ sóng là bao nhiêu kilômét?

- A.** 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 12.

Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$.

Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là đường kính của mặt cầu, tức là $6km$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=-2-t \end{cases}$ và $(P): -x+2y+2z+5=0$. Gọi d

là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.

Vector chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (a; b; 1)$. Tính tổng $a + 2b$?

- A.** 8. **B.** 7. **C.** -6. **D.** 11.

Lời giải

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng Δ tại B , ta có: $B(1+2t; 2+t; -2-t) \in \Delta$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AB} = (2t+2; t+2; -t-1)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 2; 2)$.

Gọi φ là góc giữa d và (P) , ta có: $\sin \varphi = \frac{|-2t - 2 + 2t + 4 - 2t - 2|}{3\sqrt{6t^2 + 14t + 9}} = \frac{|2t|}{3\sqrt{6t^2 + 14t + 9}} \geq 0$

$\Rightarrow d$ tạo với mặt phẳng (P) một góc φ nhỏ nhất khi $\varphi = 0^\circ$ hay $\sin \varphi = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2;2;-1)$
 $\Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (-2;-2;1)$

Vậy $a = -2, b = -2, \Rightarrow a + 2b = -6$.

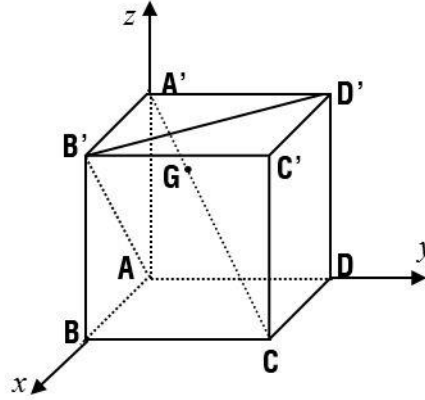
Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ bằng

- A.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ như sau : $O \equiv A(0;0;0)$; $A'(0;0;a)$

$B(a;0;0)$; $B'(a;0;a)$; $C(a;a;0)$; $C'(a;a;a)$; $D(0;a;0)$; $D'(0;a;a)$.



Ta có $(AB'D') // (C'BD)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(C'BD)$ là $\vec{n}_2 = [\vec{C'B}, \vec{C'D}] = (-a^2; -a^2; a^2)$ hay $\vec{n}_2 = (1;1;-1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(C'BD)$ là $x + y - z - a = 0$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(AB'D')$ là $x + y - z = 0$.

$$\Rightarrow d((AB'D'), (C'BD)) = d(B, (AB'D')) = \frac{|a + 0 - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-2}$.

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Vector $\vec{u}_1 = (2,1,2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 .		
b)	Vector $\vec{u}_2 = (-1,2,2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .		
c)	Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 xấp xỉ 64° .		
d)	Góc giữa đường thẳng Δ_1 và trục Ox xấp xỉ 40° .		

Lời giải

Đáp án: a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) Vector $\vec{u}_1 = (2,1,2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_1 .

b) Vector $\vec{u}_2 = (-1, 2, -2)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ_2 .

c) Ta có $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) \approx 64^\circ$.

d) Trục Ox có vector chỉ phương $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

Ta có $\cos(\Delta_1, Ox) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow (\Delta_1, Ox) \approx 48^\circ$.

Câu 2. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

a) $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ ;

b) $M(0; 3; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ ;

c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

d) Đường thẳng Δ cắt mặt phẳng (P) tại $N(-1; 4; 1)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Dựa vào phương trình đường thẳng, một vector chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{x} = (1; -1; 1)$.

Ta thấy $\vec{x}, \vec{u}$ cùng phương. Do đó, $\vec{u} = (-1; 1; -1)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng Δ ;

b) Thay tọa độ của điểm M vào x, y, z của đường thẳng Δ , ta thấy:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 3 = 2 - t \\ -2 = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -5 \end{cases}$$

Do vậy, $M(0; 3; -2)$ không thuộc đường thẳng Δ ;

c) Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{x} = (1; -1; 1)$

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 1)$.

Ta thấy $\vec{x}, \vec{n}$ không cùng phương. Do vậy, đường thẳng Δ không vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$d) \Delta: \begin{cases} x=1+t & (1) \\ y=2-t & (2) \\ z=3+t & (3) \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (P): x+2y+z-4=0 \quad (4)$$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được: $1+t+2(2-t)+3+t-4=0 \Leftrightarrow 0t+4=0$ - phương trình vô nghiệm

Do vậy, đường thẳng Δ không cắt mặt phẳng (P) .

Câu 3. Trong không gian Oxyz cho các mặt phẳng $(P): x+2y+z+10=0$, $(Q): -x+y+2z+13=0$, $(R): mx+y-2=0$.

Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Vector $\vec{n}_1 = (1, 2, 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .		
b)	Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 30° .		
c)	Với $m=1$ thì $(Q) \perp (R)$.		
d)	Có hai giá trị của m để $\cos$ của góc giữa hai mặt phẳng (P) và (R) bằng $\frac{\sqrt{15}}{6}$.		

Lời giải

Đáp án: a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) Vector $\vec{n}_1 = (1, 2, 1)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

b) Vector $\vec{n}_2 = (-1, 1, 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Q) .

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Ta có $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

c) Vector $\vec{n}_3 = (m, 1, 0)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (R) .

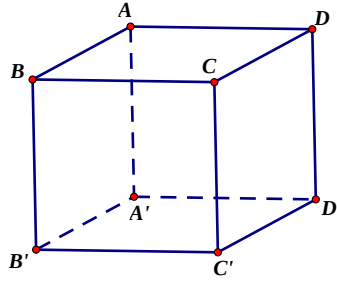
$(Q) \perp (R) \Leftrightarrow \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0 \Leftrightarrow -m+1=0 \Leftrightarrow m=1$.

d) Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (R) .

Ta có $\cos \beta = \frac{|m+2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}}$, $\cos$ của góc giữa hai mặt phẳng (P) và (R) bằng $\frac{\sqrt{15}}{6}$ khi

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{15}}{6} \Leftrightarrow 2 \cdot (m+2)^2 = 5 \cdot (m^2+1) \Leftrightarrow -3m^2+8m+3=0 \Leftrightarrow m=3, m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$ như hình vẽ:



a) Tọa độ điểm $C(3; -3; 0)$.

b) Phương trình đường thẳng $A'C$ có phương trình là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

c) $\cos(A'C; (A'BD)) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\cos((C'BD); (A'BD)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$; $\overrightarrow{DC} = (x_C; y_C - 3; z_C)$. Mà $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C - 3 = 0 \\ z_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 3 \\ z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3; 3; 0)$

b) $\overrightarrow{DD'} = (0; 0; -3)$; $\overrightarrow{AA'} = (x_{A'}; y_{A'}; z_{A'})$. Mà ta lại có $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 0 \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

$\overrightarrow{A'C} = (3; 3; 3)$ nên chọn $\vec{u}_{A'C} = (1; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng $A'C$ đi qua $A'(0; 0; -3)$ và có

$\vec{u}_{A'C} = (1; 1; 1)$ là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

c) $[\overrightarrow{A'B}; \overrightarrow{A'D}] = (-9; -9; 9)$. Chọn $\vec{n}_{(A'BD)} = (1; 1; -1)$. Nên phương trình mặt phẳng $(A'BD)$ đi qua điểm $A'(0; 0; -3)$ và có $\vec{n}_{(A'BD)} = (1; 1; -1)$ là: $x + y - z - 3 = 0$

$$\sin(A'C; (A'BD)) = \left| \cos(\vec{u}_{A'C}; \vec{n}_{(A'BD)}) \right| = \frac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Nên } \cos(A'C; (A'BD)) = \sqrt{1 - \sin^2(A'C; (A'BD))} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{d) Ta có } \overrightarrow{DC'} = (3; 0; -3); \overrightarrow{BC'} = (0; 3; -3) \Rightarrow [\overrightarrow{DC'}; \overrightarrow{BC'}] = (9; 9; 9).$$

$$\text{Chọn } \vec{n}_{(C'BD)} = (1; 1; 1) \Rightarrow \cos((C'BD); (A'BD)) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{3}$$

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 12y + 5z + 1 = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 21

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -2)$ và mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 12; 5)$.

$$\text{Ta có: } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 12 + (-2) \cdot 5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{0^2+12^2+5^2}} = \frac{14}{39}.$$

Suy ra $(\Delta, (P)) \approx 21^\circ$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 12x + 5z + 1 = 0$.

Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 3

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; -2)$ và mặt phẳng (P) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (12; 0; 5)$.

$$\text{Ta có: } \sin(\Delta, (P)) = \frac{|1 \cdot 12 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{12^2+0^2+5^2}} = \frac{2}{39}.$$

Suy ra $(\Delta, (P)) \approx 3^\circ$.

Câu 3: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(2; -1; 3)$ đến vị trí $B(8; 7; 1)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

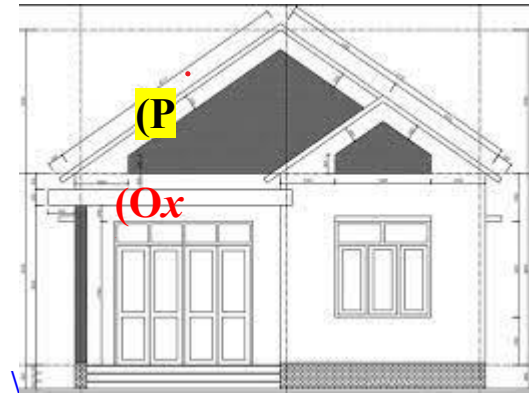
Trả lời: 11

Đường thẳng AB có vector chỉ phương là $\vec{u} = (3; 4; -1)$, mặt phẳng (Oxy) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Từ đó, góc α giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) có $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

Suy ra $\alpha \approx 11^\circ$.

Câu 4: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà (hình minh họa bên dưới) sao cho mặt phẳng $(P): -\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox .



Lời giải

Trả lời: 60

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$;

trục Ox có véc tơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Ta có: } \sin((P); Ox) = \left| \cos(\vec{n}; \vec{i}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ((P); Ox) = 60^\circ.$$

Câu 5: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy) , người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A, B, C ở mái nhà bên phải lần lượt có tọa độ $(1; 0; 3)$, $(5; 0; 1)$ và $(5; 9; 1)$. Góc giữa mái nhà bên phải và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 27

Mặt phẳng (ABC) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB}(4;0;-2)$ và $\overrightarrow{BC}(0;9;0)$.

Ta có: $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (18; 0; 36)$.

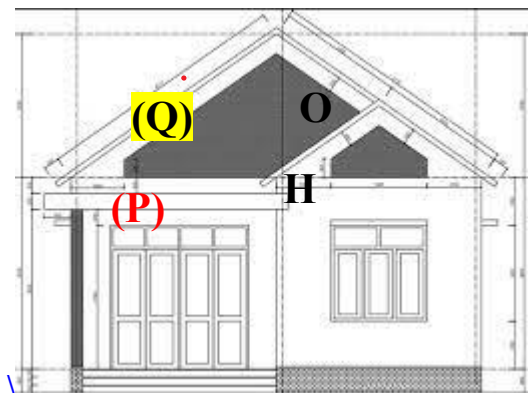
Do đó, vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}_1 = (1; 0; 2)$

Lại có, (Oxy) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

Từ đó, góc có α giữa mái nhà bên phải và nền nhà có $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\alpha \approx 27^\circ$.

Câu 6: Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà (hình minh họa bên dưới) sao cho điểm $H(2; 1; 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Lời giải****Trả lời: 45**

Ta có H là hình chiếu vuông góc của O xuống mặt phẳng (P) nên $OH \perp (P)$. Do đó $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 2)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Mặt phẳng (Q) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 0)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) .

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{OH}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là 45° .

----HẾT----

•Đề 2:

📖 **Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$ **B.**

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

C. $\cos(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$ **D.**

$$\cos(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Lời giải

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oyz) và $(\alpha): y + z - 1 = 0$ bằng:

A. $60^\circ.$

B. $45^\circ.$

C. $0^\circ.$

D. $90^\circ.$

Lời giải

Mặt phẳng (Oyz) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (0; 1; 1)$.

$$\cos((Oyz); (\alpha)) = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = 0.$$

$$((Oyz); (\alpha)) = 90^\circ.$$

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Khi đó góc giữa đường thẳng Δ và trục Oy bằng

A. $60^\circ.$

B. $30^\circ.$

C. $45^\circ.$

D. $90^\circ.$

Lời giải

$$\Delta: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u} = (-5; 3; \sqrt{2})$$

$$\cos(\Delta, Oy) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{j}) \right| = \frac{\left| -5.0 + 3.1 + \sqrt{2}.0 \right|}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\Delta, Oy) = 60^\circ$$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-\sqrt{2}} = \frac{z+\sqrt{2}}{1}$ và mặt phẳng (Oxz) bằng:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -\sqrt{2}; 1)$.

Mặt phẳng (Oxz) có một vector pháp tuyến $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

$$\sin(\Delta; (\alpha)) = \left| \cos(\vec{u}; \vec{j}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{j}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(\Delta; (Oxz)) = 45^\circ.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 5 = 0$ và $(Q): 3x - 4y = 1$. Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng trên gần bằng số đo nào dưới đây?

A. 71° .

B. 65° .

C. 109° .

D. 156° .

Lời giải

$(P): x + 2y + 2z - 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2; 2)$.

$(Q): 3x - 4y = 1$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3; -4; 0)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|1.3 + 2.(-4) + 2.0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow ((P), (Q)) \approx 71^\circ.$$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai đường thẳng: $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ và

$\Delta': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $-\frac{\sqrt{6}}{18}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{18}$.

D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$.

Đường thẳng Δ' có một vector chỉ phương $\vec{u}' = (1; 2; 1)$.

$$\cos(\Delta; \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{|-1|}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18}.$$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và $(P): 3x - 2y + 5 = 0$. Khi đó góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

$$d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases} \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u} = (5; 1; 0).$$

$(P): 3x - 2y + 5 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2; 0)$.

$$\sin(d, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d, (P)) = 45^\circ.$$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng: $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta': \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

bằng:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

Đường thẳng Δ' có một vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (2; 1; 1)$.

$$\cos(\Delta; \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{1}{2}.$$

Nên $(\Delta; \Delta') = 60^\circ$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(\frac{8}{3}; 0; 0\right)$, $B(0; 2; 0)$, $C\left(0; 0; \frac{8}{5}\right)$ và $\Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$.

đó góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

Ta có $(ABC): \frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{\frac{2}{2}} + \frac{z}{\frac{8}{5}} = 1$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = \left(\frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right)$

$\Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (-3; -4; -5)$.

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{\left| \frac{3}{8} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{5}{8} \cdot (-5) \right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2}} = 1 \Rightarrow (\Delta, (P)) = 90^\circ$$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, đường băng của một sân bay thuộc mặt phẳng (Oxy) . Một máy bay sau khi chạy đà trên đường băng đó đã cất cánh tại điểm $A(1; 2; 0)$ với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian ngắn ban đầu, vector vận tốc $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$. Trong khoảng thời gian ngắn nói trên, góc cất cánh của máy bay bằng:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Trong khoảng thời gian ngắn đó, máy bay chuyển động trên đường thẳng Δ đi qua A nhân $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$ làm vector chỉ phương.

Mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(\Delta; (Oxy)) = |\cos(\vec{v}; \vec{k})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{2}$$

Nên $(\Delta; (Oxy)) = 30^\circ$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Tính tổng $S = a + b + c$?

A. $1 + \sqrt{2}$.

B. $1 - \sqrt{2}$.

C. $2 + \sqrt{2}$.

D. $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\begin{cases} b - 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$. Mặt (Oyz) có vector pháp tuyến $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Oyz) suy ra $\alpha = 60^\circ$.

Ta có: $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2|a| (*)$.

Thay $a = b = 1$ vào phương trình (*) ta được: $\sqrt{2 + c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$.

Khi đó $a + b + c = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = 1$ và góc $BAC = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = 1$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

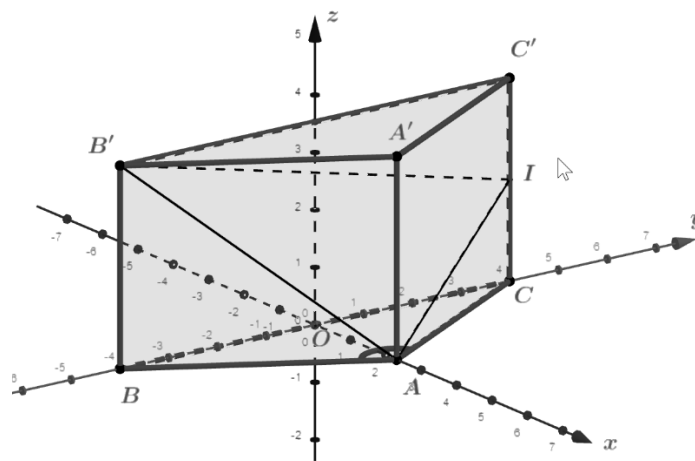
A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

C. $\frac{\sqrt{30}}{30}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{30}$.

Lời giải



• Gọi O là trung điểm của BC . Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có: $OB = AB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $OA = AB \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

• Suy ra $A \left(\frac{1}{2}; 0; 0 \right)$, $B \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0 \right)$, $C \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0 \right)$, $I \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{1}{2} \right)$, $B' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1 \right)$.

Ta có: $\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ và $\vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{AI} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

• Gọi α là góc giữa (ABC) và $(AB'I)$. Suy ra: $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$ và hai mặt phẳng

$(\alpha): -x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(\beta): 2x + my + mz - 1 = 0$. Xét tính đúng/sai của các mệnh đề sau.

a) Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha(1; -2; 2)$, mặt phẳng (β) là $\vec{n}_\beta(2; m; m)$.

b) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_\Delta(3; -1; 5)$.

c) Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng 60° .

d) Có hai giá trị của tham số m thỏa mãn góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (β) bằng 60° .

Lời giải

a) Đúng

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha(1; -2; 2)$, véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\vec{n}_\beta(2; m; m)$.

b) Sai

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta(3; 4; 5)$;

c) Sai

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta(3; 4; 5)$; Mặt phẳng (α) có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha(1; -2; 2)$.

$$\text{Ta có: } \sin(\Delta, (\alpha)) = \left| \cos(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\alpha) \right| = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

d) Đúng

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta(3; 4; 5)$; véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\vec{n}_\beta(2; m; m)$.

$$\text{Ta có: } \sin(\Delta, ((\beta))) = \left| \cos(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(\beta)}) \right| = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot m + 5 \cdot m|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + m^2 + m^2}} = \frac{|6 + 9m|}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + 2m^2}} = \frac{|6 + 9m|}{10 \cdot \sqrt{2 + m^2}}.$$

Do góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (β) bằng 60° nên ta có:

$$\sin 60^\circ = \frac{|6 + 9m|}{10 \cdot \sqrt{2 + m^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|6 + 9m|}{10 \cdot \sqrt{2 + m^2}} \Leftrightarrow 3 \cdot 25 \cdot (2 + m^2) = 9 \cdot (3m + 2)^2 \Leftrightarrow 2m^2 + 36m - 38 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -19 \end{cases}$$

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x + my + (m-1)z + 2019 = 0$.

a) Với $m = 1$ thì góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 30° .

b) Điểm $H(2;2;1)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (R) , cosin góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) là $\frac{4}{9}$.

c) m_1, m_2 là hai giá trị của m để góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) bằng 60° . Khi đó $m_1 + m_2 = -1$.

d) Với $m = 1$ thì hai mặt phẳng (P) và (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất.

Lời giải

a) Sai

Với $m = 1$ thì mặt phẳng (Q) có phương trình: $x + y + 2019 = 0$.

Mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; 2; -2)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 1; 0)$.

$$\left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 45° .

b) Đúng.

Ta có $\vec{OH} = (2; 2; 1)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (R) .

$$\left| \cos(\vec{OH}, \vec{n}_1) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{9}.$$

Vậy cosin góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) là $\frac{4}{9}$.

c) Sai.

Mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; 2; -2)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; m; m-1)$.

$$\left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|1 \cdot 1 + 2m - 2(m-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + m^2 + (m-1)^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0.$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = 1.$$

d) Sai.

$$\left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|1 \cdot 1 + 2m - 2(m-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + m^2 + (m-1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2m^2 - 2m + 2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{3\sqrt{\frac{3}{2}}} \quad \text{Góc}$$

giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0); B(0;\sqrt{2};0)$ và các đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-\sqrt{2}} = \frac{z-2}{1}, d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1}, \Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+\sqrt{2}t \\ z = 2+mt \end{cases}. \text{ Xét tính đúng / sai của các mệnh đề}$$

sau.

a) Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (1; -\sqrt{2}; 1), \vec{u}_2 = (1; -2; 1)$.

b) Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là 60°

c) Có hai giá trị của tham số m thỏa mãn góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d_1 bằng 60°

d) Có hai giá trị của tham số m thỏa mãn góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng AB bằng 45° .

Lời giải

a) Đúng

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{u}_1 = (1; -\sqrt{2}; 1), \vec{u}_2 = (1; -2; 1)$.

b) Sai

$$\text{Ta có: } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot (-2) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

c) Sai

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d_1 và Δ lần lượt là $\vec{u}_1 = (1; -\sqrt{2}; 1), \vec{u}_\Delta = (1; \sqrt{2}; m)$.

$$\text{Ta có } \cos(d_1, \Delta) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_\Delta) \right| = \frac{|1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + m^2}} = \frac{|m-1|}{2\sqrt{m^2+3}}.$$

Do góc giữa hai đường thẳng Δ và đường thẳng d_1 bằng 60° nên ta có:

$$\cos 60^\circ = \frac{|m-1|}{2\sqrt{m^2+3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|m-1|}{2\sqrt{m^2+3}} \Leftrightarrow |m-1| = \sqrt{m^2+3} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = m^2 + 3 \Leftrightarrow m = -1$$

d) Sai

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB và Δ lần lượt là $\vec{AB} = (-1; \sqrt{2}; 0), \vec{u}_\Delta = (1; \sqrt{2}; m)$.

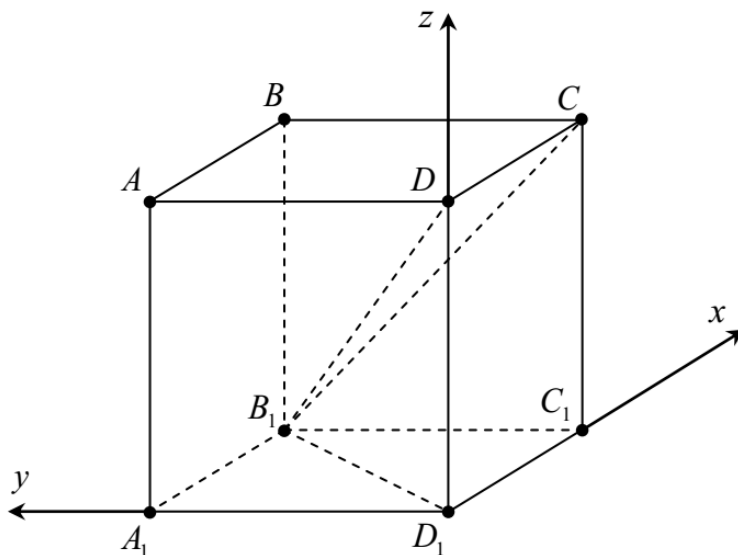
$$\text{Ta có } \cos(AB, \Delta) = \left| \cos(\vec{AB}, \vec{u}_\Delta) \right| = \frac{|-1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot m|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{2}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+3}}.$$

Do góc giữa hai đường thẳng Δ và đường thẳng d_1 bằng 45° nên ta có:

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{m^2+3}} \Leftrightarrow \sqrt{6}\sqrt{m^2+3} = 2 \Leftrightarrow 3m^2 + 7 = 0$$

Không có giá trị nào của tham số m thỏa mãn góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng AB bằng 45°

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho lăng trụ tứ diện đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x sao cho $O \equiv D_1$, C_1 thuộc tia Ox , A_1 thuộc tia Oy , D thuộc tia Oz .



- a) Một vector pháp tuyến của $(A_1B_1C_1D_1)$ là $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$.
- b) Với $x = 3$ thì góc của B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 60° .
- c) Với $x = 2$ thì góc giữa mặt phẳng (CB_1D_1) và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 45° .
- d) Với $x = 4$ thì góc giữa đường thẳng B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ là lớn nhất.

Lời giải

a) Sai.

Ta có $D_1(0; 0; 0)$, $A_1(0; 1; 0)$, $C_1(1; 0; 0)$, $B_1(1; 1; 0)$.

$$\overrightarrow{D_1A_1} = (0; 1; 0), \overrightarrow{D_1C_1} = (1; 0; 0).$$

Một vector pháp tuyến của $(A_1B_1C_1D_1)$ là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{D_1A_1}; \overrightarrow{D_1C_1}] = (0; 0; -1)$.

b) Sai.

Ta có $D(0; 0; x)$, $\overrightarrow{DB_1} = (1; 1; -x)$.

Vì góc của B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 60° .

$$\text{Suy ra } \sin(B_1D; (A_1B_1C_1D_1)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_1; \overrightarrow{DB_1}) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}.$$

c) Sai.

Ta có $C(1;0;x), \overrightarrow{D_1B_1} = (1;1;0), \overrightarrow{D_1C} = (1;0;x)$.

Mặt phẳng (CB_1D_1) có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{D_1C}] = (x; -x; -1)$.

Vì góc giữa mặt phẳng (CB_1D_1) và mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ bằng 45° .

$$\text{Suy ra } \left| \cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|1|}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) Sai

Gọi góc giữa đường thẳng B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ là α .

$$\text{Khi đó } \sin \alpha = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} < 1.$$

Không tồn tại x để góc giữa đường thẳng B_1D mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ lớn nhất.

Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=-3t \end{cases}, d_2: \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{5}$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Đáp án: 30

Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; -2; -3)$.

Đường thẳng d_2 có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-4; 1; 5)$.

$$\text{Do đó } \cos(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}| \cdot |\overrightarrow{u_2}|} = \frac{|-4 - 2 - 15|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{16+1+25}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là 30° .

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 3 = 0$ và $(Q): x - 2y + 2z + 1 = 0$. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) có giá trị là

Lời giải

Đáp số: $\frac{4}{9}$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (2; 1; -2)$, mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (1; -2; 2)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{9}.$$

Câu 3. Khi gán hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mỗi trục tính theo km) vào mỗi sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(7; -4; \frac{4\sqrt{5}}{5})$ sẽ hạ cánh ở vị trí $B(7; 11; 0)$ trên đường băng. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 2.

Ta có : $\vec{AB} = \left(0; 15; -\frac{4}{5}\right)$, mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(AB, (Oxy)) = \frac{\left|0 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 1 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)\right|}{\sqrt{0^2 + 15^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1}} = \frac{4\sqrt{5641}}{5641}$$

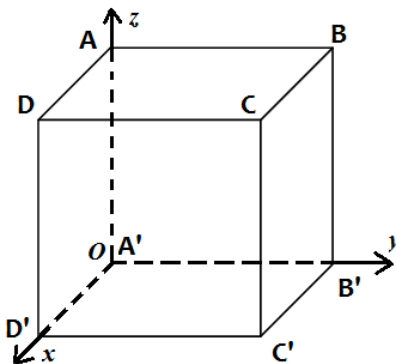
$$\angle(AB, (Oxy)) \approx 3^\circ$$

Vậy góc giữa đường bay và sân bay khoảng 3° .

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tìm cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ACD') và $(A'B'C'D')$.

Lời giải

Đáp số: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



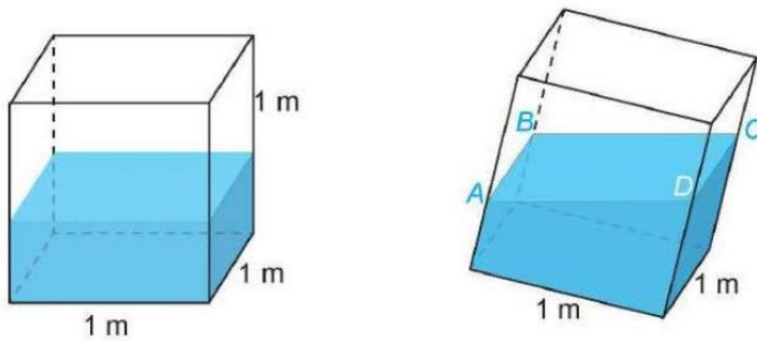
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, ta có mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với mặt phẳng (Oxy)

nên có phương trình $z = 0$, suy ra vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$.

Ta có $A(0;0;a)$, $C(a;a;a)$, $D'(a;0;0)$, $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$, $\overrightarrow{AD'} = (a;0;-a)$ nên mặt phẳng (ACD') có cặp vector chỉ phương là $\vec{u} = (1;1;0)$, $\vec{v} = (1;0;-1)$. Mặt phẳng (ACD') có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-1;1)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (ACD') và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

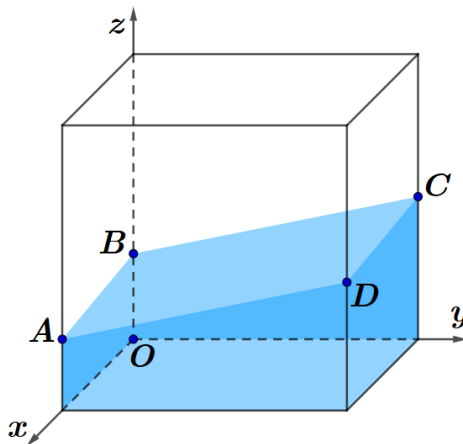
Câu 5. Trong một bể hình lập phương cạnh 1m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A , C đến đáy bể tương ứng là 25cm, 75cm.



Tìm khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy bể khi góc giữa mặt nước và mặt đáy bể đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Đáp án: 50.



Chọn hệ trục tọa độ (đơn vị trên mỗi trục là centimet) sao cho các cạnh của hình hộp trùng với các trục tọa độ như hình trên.

Do hình hình hộp có kích thước đáy là $1\text{m} \times 1\text{m}$ nên $A(100;0;25)$, $B(0;0;b)$, $C(0;100;75)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-100;0;b-25)$ và $\overrightarrow{AC} = (-100;100;50)$.

Nên $\vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2500 - 100b; 7500 - 100b; -10000) = 100(25 - b; 75 - b; -100)$.

Để góc giữa mặt nước và mặt đáy bể đạt giá trị nhỏ nhất thì $\cos((ABC), (Oxy))$ đạt giá trị lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \cos((ABC), (Oxy)) &= \left| \cos(\vec{n}_{(ABC)}, \vec{k}) \right| = \frac{|\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}_{(ABC)}| |\vec{k}|} \\ &= \frac{100}{\sqrt{(25-b)^2 + (75-b)^2 + (-100)^2}} = \frac{100}{\sqrt{2b^2 - 200b + 16250}}. \end{aligned}$$

Để $\cos((ABC), (Oxy)) = \frac{100}{\sqrt{2b^2 - 200b + 16250}}$ đạt giá trị lớn nhất

thì biểu thức $P = 2b^2 - 200b + 16250$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Dễ thấy biểu thức $P = 2b^2 - 200b + 16250$ là một hàm số bậc hai nên đạt giá trị nhỏ nhất là $P = 11250$

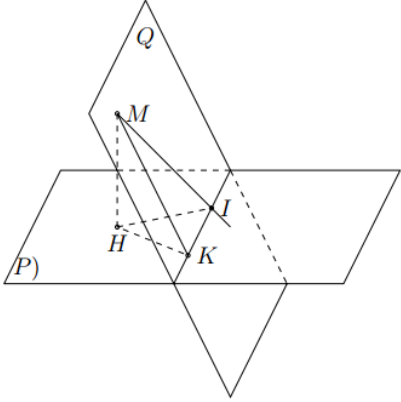
tại $b = 50$ hay giá trị $\cos((ABC), (Oxy))$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ khi $b = 50$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ và mặt

phẳng $(P): x - 3y + z + 2 = 0$ cắt nhau. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là $x - 4y + z + m = 0$. Khi đó m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: 4.

Ta có $(d): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$,  gọi I là giao điểm của đường

thẳng (d) và mặt phẳng (P) , ta có phương

trình $3 + 2t - 3(1 + t) - 3 + 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó $I(5; 2; -1)$.

Gọi M là điểm bất kỳ nằm trên đường thẳng (d) ($M \neq I$), H , K lần lượt là hình chiếu của M trên (P) và giao tuyến (Δ) của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó góc giữa (P) và (Q)

là MKH .

$\tan MKH = \frac{MH}{HK} \geq \frac{MH}{HI}$. Suy ra MKH nhỏ nhất khi $HK = HI$ hay $I \equiv K$ khi đó $(d) \perp (\Delta)$.

(d) có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (2; 1; 2)$ và (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; -3; 1)$ nên (Δ) có

vector chỉ phương $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{n}_1 \end{bmatrix} = (7; 0; -7)$ hay $\vec{u}_2 = (1; 0; -1)$.

(Q) chứa (Δ) và (d) nên nhận $\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \end{bmatrix} = (1; -4; 1)$ làm vector pháp tuyến.

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua $M(3; 1; -3)$ và nhận $\vec{n}_2 = (1; -4; 1)$ làm vector pháp tuyến nên có phương

trình

$$1.(x-3) - 4.(y-1) + (z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4y + z + 4 = 0.$$

Vậy $m = 4$.

----HẾT----

♦ Đề 3:

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3)$ và $\vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5)$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3) \\ \vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5) \end{cases}.$$

$$\cos(d_1; d_2) = \frac{|\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2}|}{|\vec{u}_{d_1}| \cdot |\vec{u}_{d_2}|} = \frac{|-4 - 2 - 15|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{16+1+25}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $(d_1; d_2) = 30^\circ$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Gọi α là góc giữa d và trục Ox . Tính $\cos \alpha$.

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Trục Ox có VTCP $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 2)$.

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Ta có $(P): 2x - y - z - 3 = 0 \Rightarrow$ VTPT $\vec{n}_1 = (2; -1; -1)$.

$(Q): x - z - 2 = 0 \Rightarrow$ VTPT $\vec{n}_2 = (1; 0; -1)$.

$$\text{Khi đó } \cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $((P), (Q)) = 30^\circ$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 5 = 0$. Hãy tính cosin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 2)$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), ta có:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|4 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

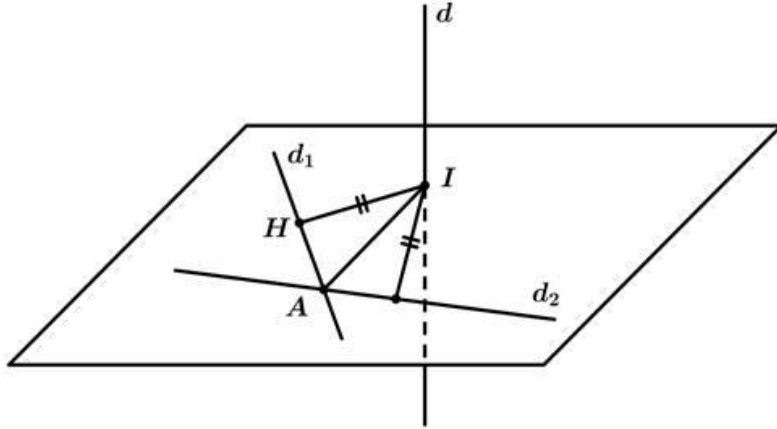
Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ và đường thẳng

$d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng d_1, d_2 cùng đi qua điểm

$A(1; -1; 1)$ và cùng cách đường thẳng d một khoảng bằng 1. Tính $\sin \varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải



Theo bài ra ta có: $(P) \perp d$. Và $(P) \cap d = I(1; 0; 0) \Rightarrow AI = \sqrt{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d_1 ta có $HI = 1$

Trong tam giác vuông HAI ta có $\sin \hat{A} = \frac{HI}{AI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ \Rightarrow 2\hat{A} = 90^\circ$

$\Rightarrow \varphi = 180^\circ - 2\hat{A} = 90^\circ$.

Vậy ta có $\sin \varphi = 1$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 4x - 4y + 3z - 2 = 0$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) , có một vector chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Khi Δ tạo với (Q) một góc lớn nhất thì sin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (Q) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. D. $\frac{\sqrt{205}}{41}$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$ và $\vec{n}_Q = (4; -4; 3)$.

Vì $\Delta // (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}_P \Rightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$.

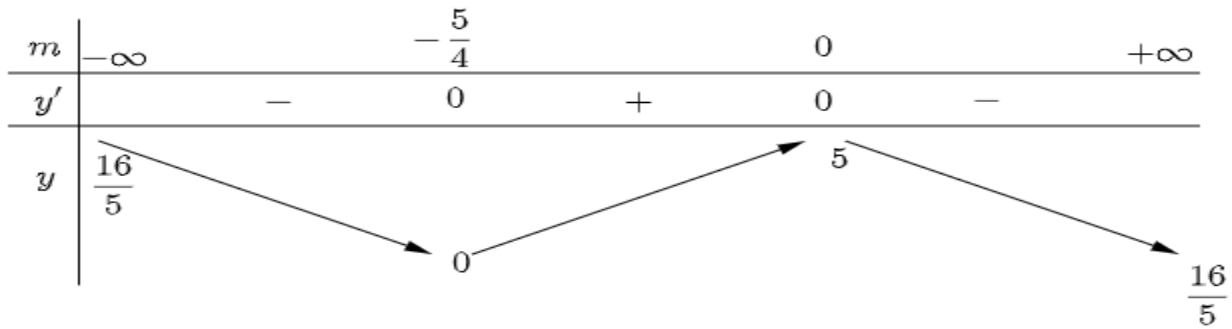
Mặt khác: $\sin(\Delta, (Q)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{u}| |\vec{n}_Q|} = \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1} \cdot \sqrt{41}} = \frac{|4m + 5|}{\sqrt{41} \sqrt{5m^2 + 8m + 5}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}.$$

Vì $0^\circ \leq (\Delta, (Q)) \leq 90^\circ$ nên $(\Delta, (Q))$ lớn nhất khi $\sin(\Delta, (Q))$ lớn nhất.

$$\text{Xét hàm số } f(m) = \frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5} \Rightarrow f'(m) = \frac{-72m^2 - 90m}{(5m^2 + 8m + 5)^2}.$$

BBT



Dựa vào BBT ta có $\max_{m \in \mathbb{R}} f(m) = 5$ tại $m = 0$.

Do đó $(\Delta, (Q))$ lớn nhất khi $m = 0$. Suy ra $\sin(\Delta, (Q)) = \frac{\sqrt{205}}{41}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) .

A. 30° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 0° .

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; -3; 0)$.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$ nên có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\cos((P), (Oxy)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = 0$, suy ra $((P), (Oxy)) = 90^\circ$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) bằng 90° .

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa đường thẳng d chứa trục Ox và mặt phẳng $(P): 3y - z + 5 = 0$ bằng

A. 90° .

B. 60° .

C. 0° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C.

Đường thẳng d chứa trục Ox có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 0)$; mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 3; -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi d và (P) . Ta có $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = 0$, suy ra $\alpha = 0^\circ$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = -2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}.$$

A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_1 ;

$\vec{u}_2 = (-2; 1; -2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_2 .

$$\text{Suy ra } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|-1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $(d_1, d_2) = 45^\circ$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{4}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 2t \end{cases}.$$

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A.

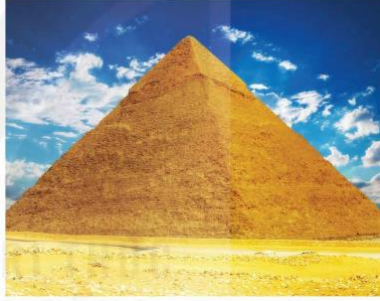
Ta có $\vec{u}_1 = (1; -1; 4)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_1 ;

$\vec{u}_2 = (2; 0; -2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_2 .

$$\text{Suy ra } \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u_1}, \vec{u_2}) \right| = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $(d_1, d_2) = 60^\circ$.

Câu 11. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo *britannica.com*) (hình vẽ). Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính góc giữa hai đường thẳng BG và SA (làm tròn tới hàng đơn vị độ).



A. 66° .

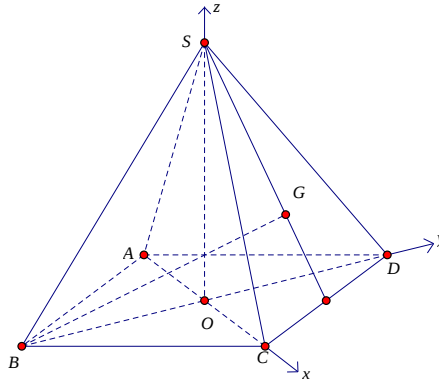
B. 69° .

C. 70° .

D. 71° .

Lời giải

Chọn D.



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Đặt $AB = 230 = a$, $SA = 219 = b$.

Ta có $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$.

Do đó: $A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BG} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}\right)$.

$$\text{Suy ra } \cos(SA, BG) = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\left|-\frac{a^2}{6} - \frac{4b^2-2a^2}{12}\right|}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2+8a^2}}{3}} = \frac{\left|-\frac{a^2}{6} - \frac{2b^2-a^2}{6}\right|}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2+8a^2}}{3}} = \frac{\frac{b^2}{3}}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2+8a^2}}{3}}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{b^2+8a^2}} = \frac{219}{\sqrt{471161}}.$$

Vậy $(SA, BG) \approx 71^\circ 23' 40''$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

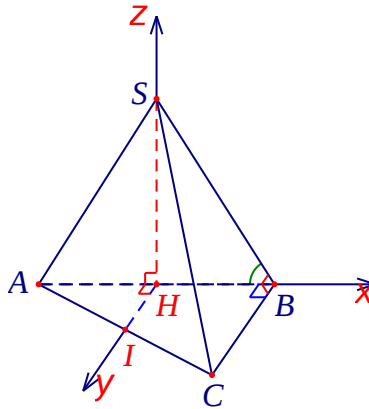
B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn D.



$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SAB) \perp BC \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \end{cases} \text{ nên } ((SBC), (ABC)) = (SB, AB) = SBA = 60^\circ.$$

Suy ra $SH = BH \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Chọn hệ tọa độ $Hxyz$ như hình vẽ.

Ta có $H(0; 0; 0)$, $A(-2; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 4; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{3})$, $I(0; 2; 0)$ với I là trung điểm của AC .

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $z = 0$.

Mặt phẳng (SAC) cắt ba trục Hx , Hy , Hx lần lượt tại các điểm $A(-2; 0; 0)$, $I(0; 2; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{3})$

nhên có phương trình: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow -3x + 3y + \sqrt{3}z - 6 = 0$.

Gọi φ là góc giữa (SAC) và (ABC) , ta có $\cos \varphi = \frac{|1 \cdot \sqrt{3}|}{1 \cdot \sqrt{9+9+3}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Phần 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x - my - 6 + m = 0$.

Gọi $\overrightarrow{n_{(P)}}$ và $\overrightarrow{n_{(Q)}}$ lần lượt là vector pháp tuyến của (P) và (Q) .

a) [1] Mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ có VTPT là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -2; 2)$.

b) [1] $\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}) \right|$.

c) [2] Với $m = 0$ thì hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.

d) [3] Tổng các giá trị của m để góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 45° là 8.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	Đ	S	Đ

a) Mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ có VTPT là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -2; 2)$.

b) $\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}) \right|$.

c) Với $m = 0$, VTPT là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (1; 0; 0)$. Suy ra $\overrightarrow{n_{(P)}} \cdot \overrightarrow{n_{(Q)}} = 1 \neq 0$. Suy ra hai mặt phẳng (P) và (Q) không vuông góc nhau.

d) Mặt phẳng (Q) có VTPT là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (1; -m; 0)$.

$$\cos((P), (Q)) = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1+2m|}{3\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=7 \end{cases}$$

Suy ra tổng các giá trị của m để góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 45° là 8.

Câu 2. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$.

a) [1] đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u}(1; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}(1; -1; 3)$.

b) [2] $\cos(d, (P)) = \sqrt{\frac{6}{11}}$.

c) [3] Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) , khi đó giá trị sin của góc giữa d và (Q) bằng $\frac{\sqrt{66}}{11}$.

d) [4] Có đúng một mặt phẳng đi qua gốc toạ độ, vuông góc với (P) và tạo với d một góc 30° .

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	S	Đ	S

a) đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u}(1; -2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - y + 3z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}(1; -1; 3)$.

b) $\sin(d, (P)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \sqrt{\frac{6}{11}}$.

c) Vì (Q) song song với (P) nên $\vec{n}(1; -1; 3)$ cũng là một vector pháp tuyến của (Q) . Do đó:

$$\sin(d, (Q)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{\sqrt{66}}{11}.$$

d) Gọi $(R): Ax + By + Cz = 0$ là mặt phẳng đi qua gốc toạ độ, vuông góc với (P) và tạo với d một góc 30° .

Ta có: $(R) \perp (P) \Rightarrow A - B + 3C = 0 \Rightarrow A = B - 3C$.

Mặt khác: $\sin(d; (R)) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|A - 2B + C|}{\sqrt{6 \cdot (A^2 + B^2 + C^2)}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(-B - 2C)^2 = 6(2B^2 + 10C^2 - 6BC)$$

$$\Leftrightarrow 8B^2 - 52BC + 44C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ B = \frac{11}{2}C \end{cases}$$

Với $B = C$, chọn $\vec{n}_1 = (-2; 1; 1)$ là vector pháp tuyến của (R)

Với $B = \frac{11}{2}C$, chọn $\vec{n}_2 = (5; 11; 2)$ là vector pháp tuyến của (R)

Có hai cặp vector pháp tuyến nên có hai mặt phẳng (R) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $\Delta': \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$ và d là

giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$ và $(Q): 2x + 3z - 2 = 0$.

a) Gọi $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ lần lượt là các vector chỉ phương của hai đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó $\cos(\Delta, \Delta') = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}$.

b) Côsin góc giữa hai đường thẳng Δ và trục Ox bằng $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

c) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{238}}$.

d) Góc giữa hai đường thẳng d và Δ' bằng 90° .

Lời giải

a) S	b) Đ	c) Đ	d) Đ
------	------	------	------

* Phương án **a)** sai: vì $\cos(\Delta, \Delta') = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}$

* Phương án **b)** đúng:

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta} = (-1; -3; 2)$

Trục Ox có vector chỉ phương là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Ta có } \cos(\Delta, Ox) = \frac{|\vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{i}|}{|\vec{u}_{\Delta}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$

* Phương án **c)** đúng:

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta} = (-1; -3; 2)$

Đường thẳng Δ' có vector chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'} = (3; 2; 2)$

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{u}_{\Delta'}|}{|\vec{u}_{\Delta}| \cdot |\vec{u}_{\Delta'}|} = \frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{238}}.$$

* Phương án **d)** đúng:

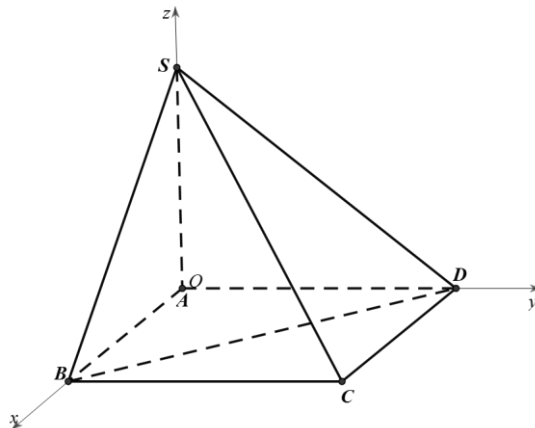
Hai mặt phẳng (P) và (Q) có các vector pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_P = (1; 2; -1)$, $\vec{n}_Q = (2; 0; 3)$

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (6; -5; -4)$

Đường thẳng Δ' có vector chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'} = (3; 2; 2)$

$$\text{Ta có } \cos(d, \Delta') = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_{\Delta'}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_{\Delta'}|} = \frac{0}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{17}} = 0 \Rightarrow (d, \Delta') = 90^\circ.$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $SA = 1$ và SA vuông góc với mặt đáy. Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sau:



a) Tọa độ các điểm B, C là $B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0)$.

b) Một vector chỉ phương của đường thẳng SB là $\vec{u} = (1; -1; 1)$.

c) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBD) là $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.

d) Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BD và (SBC) . Khi đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

a) Đ	b) S	c) Đ	d) Đ
------	------	------	------

Ta có: $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0), D(0; \sqrt{3}; 0), S(0; 0; 1)$

* Phương án a) đúng: $B(1; 0; 0), C(1; \sqrt{3}; 0)$

* Phương án b) sai: Đường thẳng SB có vector chỉ phương là $\vec{SB} = (1; 0; -1)$

* Phương án c) đúng:

$$\text{Ta có } \vec{SB} = (1; 0; -1), \vec{BD} = (-1; \sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\vec{SB}, \vec{BD}] = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$$

Vậy mặt phẳng (SBD) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$.

* Phương án d) đúng:

Ta có $\vec{SB} = (1; 0; -1), \vec{BC} = (0; \sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\vec{SB}, \vec{BC}] = (\sqrt{3}; 0; \sqrt{3})$. Suy ra mặt phẳng (SBC) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Đường thẳng BD có vector chỉ phương là $\vec{u} = \vec{BD} = (-1; \sqrt{3}; 0)$

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

👉 Phần 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc tạo bởi trục Oz và mặt phẳng $(a): 2x - y + z - 7 = 0$ bằng α° (kết quả làm tròn đến hàng phần mười). Giá trị α là

Lời giải

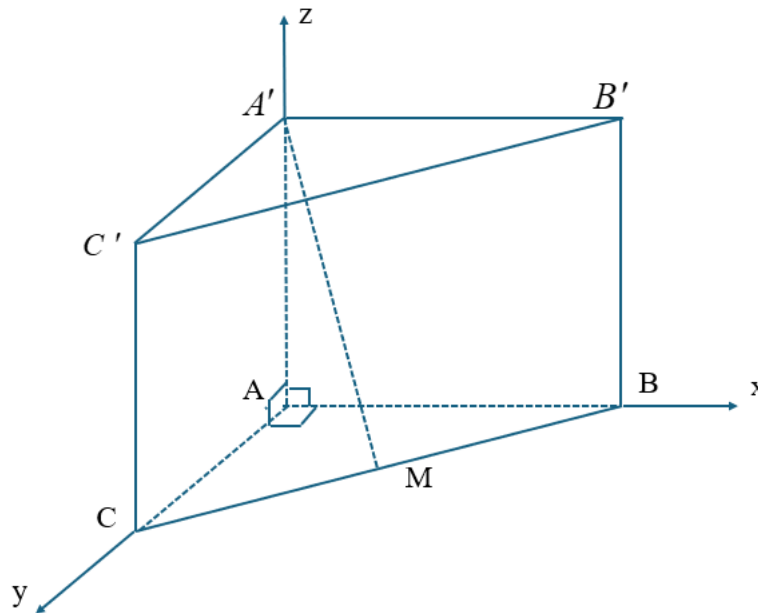
Trục Oz có vector chỉ phương là $\vec{k} = (0; 0; 1)$ và mặt phẳng $(a): 2x - y + z - 7 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

$$\text{Ta có } \sin(Oz, (a)) = \frac{|\vec{k} \cdot \vec{n}|}{|\vec{k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Vậy $(Oz, (a)) = 24,1^\circ$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 5, đáy là tam giác vuông cân tại A , cạnh bằng 3. M là trung điểm của BC . Góc tạo bởi đường thẳng AM và AB bằng a° (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị). Giá trị a là

Lời giải



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ trên. Khi đó $A(0;0;0)$, $A'(0;0;5)$, $B(3;0;0)$, $C(0;3;0)$.

Vì M là trung điểm BC nên $M(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0)$.

Đường thẳng AB có vector chỉ phương $\vec{AB} = (3;0;0)$, đường thẳng AM có vector chỉ phương

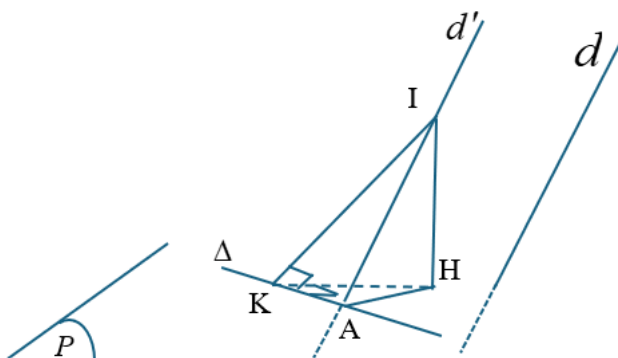
$$\vec{AM} = (\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -5)$$

$$\text{Vậy } \cos(AB, AM) = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AM}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}|} = \frac{|3 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot \frac{3}{2} + 0 \cdot (-5)|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + (-5)^2}} = \frac{3}{\sqrt{118}}.$$

Suy ra $(AB, AM) = 74^\circ$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x - y + z - 2 = 0$, $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$ và điểm $A(2;1;1) \in (P)$. Đường thẳng D qua A , nằm trong (P) và tạo với d một góc nhỏ nhất. Biết $D \cap (Oxy) = B(m;n;p)$. Giá trị $T = 7m + 7n + p$ bằng

Lời giải



Gọi d' là đường thẳng qua A và song song với d . Trên d' lấy điểm I ; H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và K là hình chiếu vuông góc của H trên d .

Khi đó $(d, D) = (d', D) = \angle IAK = \alpha$.

mà $\sin \alpha = \frac{IK}{IA} = \frac{IH}{IA}$ suy ra $\alpha_{\min} \hat{=} \angle HOK$ hay D qua A và H , hay D là hình chiếu vuông góc của d' trên (P) .

Ta có: (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; -1; 1)$, d có vector chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 2; 2)$, suy ra $\vec{u}_{(P), d} = (4; 3; -1)$.

$$\vec{u}_D = \vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(AH)} = \vec{n}_{(P)}, \vec{u}_{(P), d} = (-2; 5; 7) \Rightarrow D: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{7}$$

Khi đó $D \in (Oxy) \Rightarrow B \in B \Rightarrow \frac{16}{7}; \frac{2}{7}; 0$, do đó $m = \frac{16}{7}, n = \frac{2}{7}, p = 0$.

Vậy $T = 7m + 7n + p = 18$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x + y + 4z + 10 = 0$ bằng α° . Tính giá trị biểu thức $T = 1 - 2\cos^2 \alpha$

Lời giải

Đáp án: 0

Vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_1 = (-2; 1; -2)$.

Vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_2 = (1; 1; 4)$.

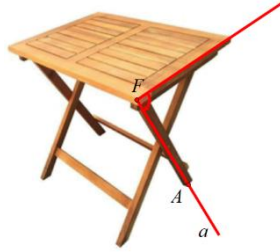
$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|(-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$T = 1 - 2\cos^2 \alpha = 0.$$

Câu 5. Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất

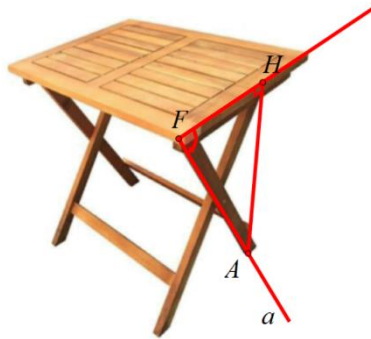
thuộc đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ cắt mặt bàn $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ tại điểm F . Độ dài chân bàn

$FA = 40\sqrt{3} \text{ cm}$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là bao nhiêu cm ?



Lời giải

Đáp án: 40



Đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 4)$.

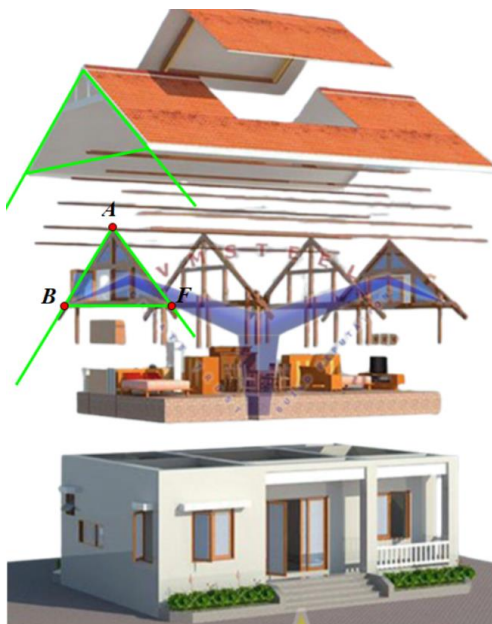
Mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; -2)$.

$$\sin(a, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sin \varphi$$

Độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là khoảng cách từ chân bàn A đến mặt phẳng (P)

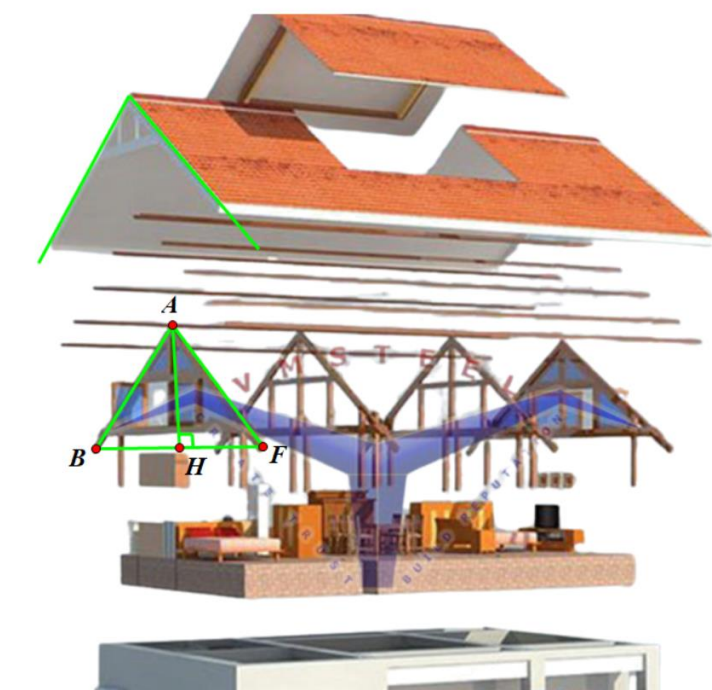
$$\text{Suy ra } d(A, (P)) = AH = FA \cdot \sin \varphi = 40\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 40 \text{ cm}.$$

Câu 6. Một kỹ sư Strong thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh đà sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 5 = 0$, điểm A là nóc ngói, 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh đà như hình vẽ (các thanh đà dài như nhau) khi cố định phần dưới của ngói nhà. Khoảng cách $BF = 20 \text{ m}$, khi đó tỉ số độ dài của thanh đà AF và khoảng cách BF bằng



Lời giải

Đáp án: 0,92



Mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; -2)$.

Mặt phẳng $(Q): x + 2y + z - 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2; 1)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow ((P); (Q)) \approx 66^\circ$$

Khi ráp 2 mái tiếp xúc với các thanh đà bên dưới ta được $BAF = ((P); (Q)) \approx 66^\circ$.

Theo đề tam giác ABF cân tại A vì $AB = AF \Rightarrow \angle AFB = 57^\circ$

Gọi H là trung điểm BF , khi đó AH cũng là đường cao trong tam giác cân ABF .

$$AF = \frac{HF}{\cos \angle AFH} \approx 18,4 \text{ m}$$

$$\text{Tỉ số } \frac{AF}{BF} = 0,92.$$

----HẾT----