

Bài 7. Căn bậc hai và căn thức bậc hai.

A. LÝ THUYẾT.

1) Căn bậc hai.

- ♣ Căn bậc hai của số thực a không âm là số thực x sao cho $x^2 = a$.
- ♣ Số âm không có căn bậc hai.
- ♣ Số 0 có một căn bậc hai là 0.
- ♣ Số dương a có đúng hai căn bậc hai đối nhau là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Ví dụ 1: Căn bậc hai của 25 là $\sqrt{25} = 5$ và $-\sqrt{25} = -5$.

- ♣ Tính chất $\sqrt{a^2} = |a|$ với mọi số thực a .

Ví dụ 2: Tính

c) $-\sqrt{(-3)^2}$

Bài làm:

c) $-\sqrt{(-3)^2} = -|-3| = -3$

2) Căn thức bậc hai.

- ♣ Căn thức bậc hai là biểu thức có dạng $\sqrt{A}$ trong đó A là một biểu thức đại số.
Khi đó: A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.
- ♣ $\sqrt{A}$ xác định khi A lấy giá trị không âm và hay $A \geq 0$ là điều kiện xác định (*điều kiện có nghĩa*) của $\sqrt{A}$.

Ví dụ 3: Tìm điều kiện có nghĩa của căn thức sau $\sqrt{5-2x}$

Bài làm:

ĐKXD: $5 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}$.

- ♣ Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ với A là một biểu thức.

Ví dụ 4: Tính

c) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$

Bài làm:

a) $\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5} - |\sqrt{5}-1| = \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) = 1$ (vì $\sqrt{5}-1 > 0$).

b) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$ (vì $2-\sqrt{3} > 0$).

c) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3| = 3-\sqrt{5}$ (vi $\sqrt{5}-3 < 0$).

Ví dụ 5: Rút gọn các biểu thức sau

c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$

Bài làm:

a) $3\sqrt{(a-2)^2} = 3|a-2| = 3(a-2) = 3a-6$ (vì $a < 2 \Rightarrow a-2 > 0$).

b) $\sqrt{25a^2} + 4a = \sqrt{(5a)^2} + 4a = |5a| + 4a = 5a + 4a = 9a$ (vì $a \geq 0 \Rightarrow 5a \geq 0$).

c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2 = \sqrt{(3a^2)^2} + 3a^2 = 3a^2 + 3a^2 = 6a^2$ (vì $3a^2 \geq 0$ với mọi a)

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

1) $\sqrt{4x}$	2) $\sqrt{-6x}$	3) $\sqrt{-3x}$	4) $\sqrt{7x}$
5) $\sqrt{3x+1}$	6) $\sqrt{6x-1}$	7) $\sqrt{4-2x}$	8) $\sqrt{-3a-4}$
9) $\sqrt{4-x^2}$	10) $\sqrt{x^2-16}$	11) $\sqrt{4x^2-1}$	12) $\sqrt{1+3a^2}$

Bài 2: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau

1) $\sqrt{\frac{x+3}{5-x}}$	2) $\sqrt{\frac{x-3}{2-x}}$	3) $\sqrt{\frac{x+2}{2-x}}$
4) $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$	5) $\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x-4}}$	6) $\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x+3}}$
7) $\sqrt{x^2-3x+2}$	8) $\sqrt{x^2+4x+5}$	9) $\sqrt{9x^2-6x+1}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{3^2} + \sqrt{5^2}$	2) $\sqrt{4^2} + \sqrt{(-2)^4}$	3) $\sqrt{2^2} + \sqrt{(-7)^2}$
4) $\sqrt{(-6)^2} + \sqrt{6^2}$	5) $\sqrt{(-3)^2} - \sqrt{(-1)^4}$	6) $\sqrt{(-11)^2} - \sqrt{(-9)^2}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{(4-\sqrt{9})^2}$	2) $\sqrt{(4-\sqrt{6})^2}$	3) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$
4) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$	5) $\sqrt{(10-\sqrt{10})^2}$	6) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$
7) $\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}$	8) $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}$	9) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$
10) $\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}$	11) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$	12) $\sqrt{(3+\sqrt{8})^2}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$	2) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$	3) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$
4) $\sqrt{(5-\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+\sqrt{6})^2}$	5) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}$	6) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$
7) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+3)^2}$	8) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$	9) $\sqrt{(3-\sqrt{10})^2} - \sqrt{(\sqrt{10}-5)^2}$
10) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$	11) $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-6)^2}$	12) $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot (\sqrt{5}+1)$

Bài 6: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}$	2) $\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}$	3) $\sqrt{1-2\sqrt{2}+2}$
4) $\sqrt{4-4\sqrt{5}+5}$	5) $\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}$	6) $\sqrt{5-6\sqrt{5}+9}$
7) $\sqrt{7-4\sqrt{7}+4}$	8) $\sqrt{6-8\sqrt{6}+16}$	9) $\sqrt{25-10\sqrt{5}+5}$
10) $\sqrt{x^2+8x+16}$	11) $\sqrt{x-4\sqrt{x}+4}$	12) $\sqrt{x^2+2x+1}$

13) $\sqrt{x-8\sqrt{x}+16}$	14) $\sqrt{x^2-10x+25}$	15) $\sqrt{4x^2+4x+1}$
-----------------------------	-------------------------	------------------------

Bài 7: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$	2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$	3) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$
4) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$	5) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$	6) $\sqrt{30-10\sqrt{5}}$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$	2) $A = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$
3) $A = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$	4) $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$
5) $A = \sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}}$	6) $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$
7) $A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$	8) $A = \sqrt{8-2\sqrt{7}} - \sqrt{8+2\sqrt{7}}$
9) $A = \sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}$	10) $A = \sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{19-8\sqrt{3}}$

Bài 9: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $B = 2\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$	2) $B = \sqrt{(\sqrt{7}-4)^2} + \sqrt{7}$
3) $B = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$	4) $B = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$
5) $B = \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$	6) $B = \sqrt{(4-3\sqrt{2})^2} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}$
7) $B = (1-\sqrt{3})^2 - \sqrt{4-2\sqrt{3}} + 3\sqrt{3}$	8) $B = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{19+8\sqrt{3}}$

Bài 10: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $C = \sqrt{5-2\sqrt{3}} - 2\sqrt{4-2\sqrt{3}}$	2) $C = \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}$
---	---

Bài 11: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x-2} = 4$	2) $\sqrt{2x+1} = 3$	3) $\sqrt{4-5x} = 12$
4) $\sqrt{6x-2} = 4$	5) $4\sqrt{x+5} = 8$	6) $\sqrt{3x-5} = 4$
7) $\sqrt{7x-3} = 5$	8) $\sqrt{x+3} = 7$	9) $\sqrt{x+5} - 2 = 4$
10) $\sqrt{9(x-1)} = 21$	11) $\sqrt{9x-18} - 15 = 0$	12) $\sqrt{4x+9} - 3 = 0$
13) $3\sqrt{x-2} - 5 = 4$	14) $4 + \sqrt{x-5} = 5$	15) $\sqrt{4x+5} = 2$

Bài 12: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2+1} = 2$	2) $\sqrt{x^2+2} = 3$	3) $\sqrt{x^2+1} = 3$
4) $\sqrt{(x-3)^2} = 4$	5) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$	6) $\sqrt{(2x-3)^2} = 9$
7) $\sqrt{4(x+2)^2} = 8$	8) $\sqrt{4(x-1)^2} - 6 = 0$	9) $\sqrt{(1-4x)^2} = 5$

Bài 13: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2-12x+36} = 5$	2) $\sqrt{x^2-14x+49} = 2$	3) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$
4) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 5$	5) $\sqrt{4x^2-4x+9} = 3$	6) $\sqrt{x^2+10x+25} = 1$
7) $\sqrt{9-12x+4x^2} = 4$	8) $\sqrt{9x^2-24x+16} = 1$	9) $\sqrt{x^2+2x+1} = 7$

10) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3$	11) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$	12) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 5$
13) $\sqrt{x^2 + 5x + 20} = 4$	14) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 2 = 5$	15) $2\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = 14$
16) $2\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 18$		

Bài 14: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{1 - 2x^2} = x - 1$	2) $\sqrt{5x + 4} = x + 2$	3) $\sqrt{x^2 - 4} - x + 2 = 0$
4) $\sqrt{x^2 - 2x} = 2 - x$	5) $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1$	6) $\sqrt{4x^2 - 8x + 1} = x - 1$
7) $\sqrt{5x^2 - 2x + 2} = x + 1$	8) $\sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x = 3$	9) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + 3$
10) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 4 - x$	11) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 5 = 0$	12) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - 5x = 2$
13) $\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 4x$	14) $\sqrt{25 - 10x + x^2} - 2x = 1$	15) $2x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = -5$
16) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 5x - 2$	17) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 5 = 3x$	18) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3x + 1$
19) $\sqrt{x^2 - 4x + 1} = x$	20) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = x + 3$	21) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} - 2x = 3$
22) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = x - 2$	23) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x - 1$	24) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1$
25) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - 2 = x$	26) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2x = 1$	27) $\sqrt{25x^2 - 30x + 9} = x + 7$
28) $\sqrt{25x^2 - 10x + 1} = 3x - 2$	29) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2x = 5$	

Bài 8. Khai căn bậc hai với phép nhân và phép chia.

A. LÝ THUYẾT.

1) Khai căn bậc hai và phép nhân.

♣ Với A, B là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$.

♣ Với A, B, C là các biểu thức không âm, ta có $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} = \sqrt{A \cdot B \cdot C}$.

Ví dụ 1: Tính

a) $\sqrt{36 \cdot 64}$

b) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$

c) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{12}$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$

Bài làm:

a) $\sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48$

b) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{100} = 10$

c) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{27 \cdot 12} = \sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{(9 \cdot 2)^2} = 18$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 45} = \sqrt{25 \cdot 9} = \sqrt{(5 \cdot 3)^2} = 15$

Ví dụ 2: Tính

a) $\sqrt{5}(\sqrt{20} - 3) + \sqrt{45}$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

Bài làm:

a) $\sqrt{5}(\sqrt{20} - 3) + \sqrt{45} = \sqrt{100} - 3\sqrt{5} + \sqrt{9 \cdot 5} = 10 - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 10$.

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$.

2) Khai căn bậc hai và phép chia.

♣ Với A, B là các biểu thức với $A \geq 0, B > 0$ thì $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

Ví dụ 3: Tính

a) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}$

b) $\sqrt{\frac{81}{16}}$

c) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{\frac{25}{4}}$

Bài làm:

a) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{99}{11}} = \sqrt{9} = 3$

b) $\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4}$

c) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$

d) $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$

Ví dụ 4: Tính

a) $\left(\frac{\sqrt{7}}{7} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}}\right) : \sqrt{7}$

b) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$.

c) $\frac{y}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0, y \neq 0$.

Bài làm:

a) $\left(\frac{\sqrt{7}}{7} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}}\right) : \sqrt{7} = \left(\frac{\sqrt{7}}{7} - \sqrt{\frac{16}{7}} + \sqrt{\frac{9}{7}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{7} - \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 0$.

b) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{2a}{3} \cdot \frac{3a}{8}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a}{2}$ (vì $a \geq 0$)

c) $\frac{y}{x} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y^4}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^4}} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y}$ (vì $x > 0$)

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.**Bài 1:** Rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{144} : \sqrt{36}$	2) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{25}$
3) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{72} : \sqrt{2}$	4) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{45} : \sqrt{5}$
5) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$	6) $(\sqrt{32} + 3\sqrt{18}) : \sqrt{2}$
7) $(\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{15}$	8) $(\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}) : \sqrt{3}$
9) $(\sqrt{48} - \sqrt{75} + 6\sqrt{3}) : \sqrt{3}$	10) $\sqrt{12} \cdot (5\sqrt{3} - \sqrt{27})$
11) $\sqrt{2} \cdot (4\sqrt{2} - 6) + \sqrt{72}$	12) $(3\sqrt{50} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}$
13) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{60}$	14) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5}$
15) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$	16) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{14} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + 7\sqrt{8}$
17) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{18} + 5\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{6}$	18) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11}) \cdot \sqrt{11} + 3\sqrt{22}$
19) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}) \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5}$	20) $(\sqrt{24} - \sqrt{48} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} + 12\sqrt{2}$
21) $(2\sqrt{112} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28})\sqrt{7}$	22) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$
23) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7}\right) \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{21}$	24) $10\sqrt{27} - \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{5}} - 5\sqrt{24} \cdot \sqrt{2}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$	2) $A = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$
3) $A = \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$	4) $A = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$
5) $A = \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$	6) $A = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$
7) $A = \sqrt{24 + 8\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$	8) $A = \sqrt{15 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$
9) $A = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$	10) $A = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$	2) $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
3) $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$	4) $A = \sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}}$
5) $A = \sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}}$	6) $A = \sqrt{5 - \sqrt{21}} - \sqrt{5 + \sqrt{21}}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

1) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$	2) $(\sqrt{10} + \sqrt{6})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$	3) $(5 + 2\sqrt{3})\sqrt{37 - 20\sqrt{3}}$
4) $(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$	5) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	6) $(\sqrt{10} - \sqrt{14})(\sqrt{6} + \sqrt{35})$
7) $(\sqrt{6} + \sqrt{10})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$	8) $\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$	9) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$
10) $\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - \sqrt{20}}}$	11) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$	12) $\sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

1) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$	2) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})$
3) $(3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2})\sqrt{3 - \sqrt{5}}$	4) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$
5) $(\sqrt{14} - \sqrt{6})(5 + \sqrt{21})\sqrt{5 - \sqrt{21}}$	6) $(4 - \sqrt{15})(\sqrt{6} + \sqrt{10})\sqrt{4 + \sqrt{15}}$
7) $2(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$	8) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(4 - 2\sqrt{3})\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
9) $\sqrt{6 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$	10) $\sqrt{2\sqrt{5} + 10} - \sqrt{25 + 4\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$

Bài 6: Rút gọn các biểu thức sau

1) $(\sqrt{19} - 3)(\sqrt{19} + 3)$	2) $(10 - 3\sqrt{11})(3\sqrt{11} + 10)$
3) $\sqrt{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{7}}$	4) $\sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$
5) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$	6) $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$

Bài 7: Rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{4 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$	2) $\sqrt{6 - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$	3) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$
4) $\sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$	5) $\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$	6) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$

Bài 8: Rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{45} - \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} + \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$	2) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$	3) $\left(\sqrt{\frac{8}{3}} - \sqrt{24} + \sqrt{\frac{50}{3}}\right) \cdot \sqrt{12}$
4) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{(-7)^2}$	5) $6\sqrt{3} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 1$	

Bài 9: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x + 5} = \sqrt{2x}$	2) $\sqrt{2x - 1} = \sqrt{x - 1}$	3) $\sqrt{2x + 5} = \sqrt{1 - x}$
4) $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3 - x}$	5) $\sqrt{3x + 1} = \sqrt{4x - 3}$	6) $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3x - 5}$
7) $\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x - 3}$	8) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{x - 3}$	

Bài 10: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x^2 - 25} - \sqrt{x - 5} = 0$	2) $\sqrt{x^2 - 4} - 3\sqrt{x - 2} = 0$	3) $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x + 2} = 0$
4) $\sqrt{4x^2 - 9} = 2\sqrt{2x + 3}$	5) $\sqrt{9 - 4x^2} = 5\sqrt{3 - 2x}$	6) $\sqrt{x - 2} - 3\sqrt{x^2 - 4} = 0$
7) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x^2 + x - 6} = 0$	8) $\sqrt{x^2 + x - 20} = \sqrt{x - 4}$	9) $3\sqrt{x^2 - 1} + 2\sqrt{x + 1} = 0$

Bài 11: Giải các phương trình sau

1) $x - \sqrt{x - 2} = 4$	2) $x + 2\sqrt{x + 2} = 1$	3) $x + 4 = 5\sqrt{x - 2}$
4) $x - 1 - \sqrt{x + 5} = 0$	5) $x - 3\sqrt{x - 2} - 12 = 0$	6) $x - 7\sqrt{x - 2} + 10 = 0$
7) $\sqrt{2x + 1} - x + 1 = 0$	8) $\sqrt{2x + 27} - 6 = x$	

Bài 12: Giải các phương trình sau

1) $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$	2) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3x$
3) $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$	4) $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$

5) $4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0$	6) $3\sqrt{x^2 + 3x} = (x + 5)(2 - x)$
7) $(x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$	

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}. \\ \text{b)} \quad & \frac{a^2 - 2a}{\sqrt{a} + \sqrt{2}} = \frac{(a^2 - 2a)(\sqrt{a} - \sqrt{2})}{a - 2}. \\ \text{c)} \quad & \frac{a}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{a(3 + 2\sqrt{2})}{9 - 4 \cdot 2} = \frac{a(3 + \sqrt{8})}{1}. \end{aligned}$$

4) Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai.

- ♣ Rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần phối hợp các phép tính (Cộng, trừ, nhân, chia) và các phép biến đổi đã học (đưa thừa số ra ngoài, vào trong dấu căn, khử mẫu, trục căn thức ở mẫu.

Ví dụ 5: Rút gọn biểu thức sau $A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{3 - \sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9$

Bài làm:

$$\text{Ta có } A = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{3 - \sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x} - 3} \right) = \sqrt{x} \left[\frac{\sqrt{x} - 3 + \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \right] = \frac{2x}{x - 9}.$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Đưa thừa số ra ngoài rồi rút gọn các biểu thức sau

1) $\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{180}$	2) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$	3) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \sqrt{48}$
4) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$	5) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} - 7\sqrt{5}$	6) $\sqrt{32} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$
7) $5\sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{72}$	8) $2\sqrt{32} - 3\sqrt{98} - 6\sqrt{200}$	9) $3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{50}$
10) $5\sqrt{5} + \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$	11) $2\sqrt{32} + 4\sqrt{8} - 5\sqrt{18}$	12) $2\sqrt{18} - 7\sqrt{2} + \sqrt{162}$
13) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$	14) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - \sqrt{50}$	15) $5\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{48}$
16) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{50} + 5\sqrt{32}$	17) $\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - 15\sqrt{5}$	18) $4\sqrt{5} - 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$
19) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$	20) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{45} + \sqrt{500}$	21) $3\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$
22) $\sqrt{98} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8} + \sqrt{18}$	23) $\sqrt{5} - \sqrt{48} + 5\sqrt{27} - \sqrt{45}$	24) $2\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{75} - \sqrt{243}$
25) $\sqrt{50} + \sqrt{32} - 3\sqrt{18} + 4\sqrt{8}$	26) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32} - \sqrt{50}$	

Bài 2: Đưa thừa số ra ngoài rồi rút gọn các biểu thức sau

1) $2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} - \sqrt{192} + 4\sqrt{48}$	2) $2\sqrt{48} + 4\sqrt{27} + \sqrt{75} + 2\sqrt{3}$
3) $5\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{108} - \sqrt{192}$	4) $4\sqrt{12} + \sqrt{108} - 8\sqrt{3} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$
5) $3\sqrt{45} - 7\sqrt{125} + \sqrt{500} + 16\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$	6) $5\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \frac{1}{5}\sqrt{50}$

Bài 3: Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$	2) $\frac{5}{\sqrt{10}}$	3) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$	4) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$
5) $\frac{2}{\sqrt{3} - 1}$	6) $\frac{3}{\sqrt{3} + 2}$	7) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$	8) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 3}$

9) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$	10) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	11) $\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$	12) $\frac{-\sqrt{4}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$
13) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$	14) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$	15) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}$	16) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}-2}$
17) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$	18) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$	19) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$	20) $\frac{10+\sqrt{5}}{2\sqrt{15}+\sqrt{3}}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

1) $A = \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$	2) $A = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
3) $A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$	4) $A = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
5) $A = \frac{2}{\sqrt{10}-3} + \frac{2}{\sqrt{10}+3}$	6) $A = \frac{1}{5+2\sqrt{3}} + \frac{1}{5-2\sqrt{3}}$
7) $A = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$	8) $A = \frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$
9) $A = \frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} - \sqrt{20}$	10) $A = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-1} + \frac{12}{\sqrt{7}-1}$
11) $A = \frac{1}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{2}}$	12) $A = \frac{\sqrt{27}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{6}{3+\sqrt{3}}$
13) $A = \sqrt{5} - \frac{8}{\sqrt{5}+1} + \frac{2\sqrt{5}-5}{2-\sqrt{5}}$	14) $A = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$
15) $A = \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \frac{4}{\sqrt{5}-3}$	16) $A = \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$
17) $A = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$	18)
19) $A = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$	20) $A = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{3}$
21) $A = \sqrt{48} - \frac{\sqrt{21}-\sqrt{15}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}+1}$	22) $A = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}-1}$
23) $A = \frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}}$	24) $A = \frac{2}{\sqrt{6}-2} + \frac{2}{\sqrt{6}+2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$
25) $A = \frac{4}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}-3}$	26) $A = \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}+3}$
27) $A = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3} - (2+\sqrt{3})$	28) $A = \frac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \sqrt{8-2\sqrt{15}}$
29) $A = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{16}}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+1} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$	30) $A = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{27} + (\sqrt{3}+1)^2$
31) $A = \frac{9}{\sqrt{10}-1} + \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \sqrt{11-2\sqrt{10}}$	32) $A = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-3\sqrt{3}}{3-\sqrt{5}}$

33) $A = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}} - \frac{7+\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$	34) $A = \frac{7}{\sqrt{12}-\sqrt{5}} + \frac{3}{2-\sqrt{5}} + \frac{6\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}}$
35) $A = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} + \frac{6}{\sqrt{3}} - 15\sqrt{\frac{1}{3}} + 1$	36) $A = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$
37) $A = \sqrt{20} - \sqrt{45} + \frac{8}{\sqrt{5}-1} - \sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$	38) $A = \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{2}{\sqrt{6}-2} - \frac{6}{3-\sqrt{6}} \right) (2\sqrt{6}+7)$
39) $A = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$	40) $A = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
41) $A = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$	42) $A = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

1) $A = \frac{6}{4+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \frac{6}{4-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$	2) $A = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
3) $A = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$	4) $A = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Bài 6: Đặt điều kiện xác định rồi rút gọn các biểu thức sau:

1) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x}}$	2) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x-4}$
3) $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - 2 \right) \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + 1 \right)$	4) $A = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right) \left(1 - \frac{2}{a+1} \right)^2$
5) $A = \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-2} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}} \right)$	6) $A = \frac{5\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{x^2+2\sqrt{x}+8}{x-4}$
7) $A = \left(\frac{x+3}{x-9} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	8) $A = \left(\frac{2x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$
9) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$	10) $A = \frac{5-5\sqrt{x}}{x-16} - \frac{2}{4-\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}+4}$
11) $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1}$	12) $A = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3} + \frac{15-4\sqrt{x}}{9-4x}$
13) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{4\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}+1}$	

Bài 7: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{4(x-3)} + \sqrt{9x-27} = 10$	2) $\sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} = 1$
3) $\sqrt{4x-8} = 6 - \sqrt{x-2}$	4) $\sqrt{4x-12} = 10 - \sqrt{9x-27}$
5) $5\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} = 16$	6) $\sqrt{4(1-3x)} + \sqrt{9(1-3x)} = 10$
7) $\sqrt{4x-8} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} = 15$	8) $\sqrt{x-1} - \sqrt{4x-4} + \sqrt{9x-9} = 5$
9) $5\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} - \sqrt{4x-20} = 18$	10) $6\sqrt{x-5} + \sqrt{9x-45} - 2\sqrt{4x-20} = 25$

11) $\sqrt{4x+4} - 2\sqrt{9x+9} = \sqrt{x+1} - 15$	12) $7\sqrt{x-5} - 6\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{9x-45} = 12$
13) $3\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+16} = 15 - \sqrt{16x+64}$	14) $7\sqrt{x-5} - \sqrt{9x-45} + \sqrt{4x-20} = 6$
15) $\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0$	16) $\sqrt{9x+27} + 4\sqrt{x+3} - \frac{3}{4}\sqrt{16x+48} = 0$
17) $\sqrt{4x-20} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} + \sqrt{x-5} = 4$	18) $\sqrt{1-x} + \sqrt{4-4x} - \frac{1}{3}\sqrt{16-16x} + 5 = 0$
19) $3\sqrt{4x+4} - \sqrt{9x+9} - 8\sqrt{\frac{x+1}{16}} = 5$	20) $\sqrt{9x-45} - \sqrt{x-5} = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{4x-20}$
21) $\sqrt{4x-8} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-18} = 3\sqrt{x-2} - 1$	22) $\sqrt{9x+18} + \frac{1}{4}\sqrt{16x+32} - 2\sqrt{x+2} = 4$
23) $\sqrt{4x-12} + \frac{1}{3}\sqrt{9x-27} = 4 + \sqrt{x-3}$	24) $\sqrt{4x-8} - 5\sqrt{x-2} + \frac{2}{3}\sqrt{9x-18} + 1 = 0$
25) $5\sqrt{4x-16} - \frac{7}{3}\sqrt{9x-36} = 36 - 3\sqrt{x-4}$	26) $\sqrt{x-3} + \sqrt{9x-27} - \frac{1}{2}\sqrt{4x-12} = 6$
27) $\sqrt{4x-20} + \sqrt{x-5} = 4 + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}}$	28) $\sqrt{16x+48} - 7\sqrt{x+3} + \frac{3}{4}\sqrt{4x+12} = -6$
29) $\sqrt{4x-12} - \sqrt{9x-27} + \sqrt{\frac{25x-75}{4}} - 3 = 0$	30) $\sqrt{16x-48} - 8\sqrt{4x-12} + \frac{2}{3}\sqrt{9x-27} = -20$
31) $\sqrt{9x-9} - 3\sqrt{x-1} + \frac{5}{2}\sqrt{16x-16} = 30$	32) $\frac{3}{2}\sqrt{4+8x} - \frac{5}{3}\sqrt{9+18x} - \frac{1}{4}\sqrt{16+32x} = 1$
33) $\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{4x-4} + \sqrt{\frac{18x-18}{2}} = 6$	

Bài 8: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$	2) $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 1$	3) $\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$
4) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = 2$	5) $\sqrt{10-x} + \sqrt{x+3} = 5$	6) $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} = 4$
7) $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 5$	8) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$	9) $\sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{x-2}$
10) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 1$	11) $\sqrt{x-5} - \sqrt{x+4} = 2$	12) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} = 4$

Bài 9: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{2x}{9-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 9, x \neq 25$

Bài 10: Rút gọn biểu thức sau $C = \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4\sqrt{x}+4} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

Bài 11: Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \sqrt{x} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của x để giá trị của biểu thức A bằng 9.

Bài 12: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-x}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 13: Cho biểu thức $A = \frac{x-7}{x-3\sqrt{x}} - \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tính $A: \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ khi $x = \frac{2}{10-3\sqrt{11}}$.

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm giá trị của x để $A = \frac{9}{2}$.

Bài 15: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

- a) Rút gọn biểu thức A
- b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- c) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức $A = \frac{13}{3}$.

Bài 16: Cho biểu thức $A = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) So sánh giá trị của biểu thức A với 6.

Bài 17: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq \pm 4$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm x để $A > \frac{1}{2}$.

Bài 18: Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm giá trị của x để giá trị của biểu thức $A = 3$.

Bài 19: Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-3}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Bài 20: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{9}$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm giá trị của x để biểu thức $A = \frac{6}{5}$.

Bài 21: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
- b) Tìm giá trị của x để biểu thức $A = 2$.

Bài 22: Cho biểu thức $P = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài 23: Cho biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm các giá trị của x để $P = 7$.

Bài 24: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Chứng minh rằng $A + B = 3$.

Bài 25: Cho $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{\sqrt{x}-1} + \frac{4}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn B .
- Tìm các số hữu tỉ x để $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+4}{6-3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} + \frac{2}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Rút gọn biểu thức $M = A.B$

Bài 27: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$.

- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức P được xác định.
- Rút gọn biểu thức P .
- Tính giá trị của P khi $x = 4$.

Bài 10. Căn bậc ba và căn thức bậc ba.

A. LÝ THUYẾT.

1) Căn bậc ba.

- ♣ Căn bậc ba của số thực a là số thực x thỏa mãn $x^3 = a$.
- ♣ Mỗi số a đều có duy nhất một căn bậc ba, căn bậc ba của số a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$
- ♣ Ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.

Ví dụ 1: căn bậc ba của các số sau

a) $\sqrt[3]{64} = 4$	b) $\sqrt[3]{1} = 1$	c) $\sqrt[3]{-27} = -3$
-----------------------	----------------------	-------------------------

Ví dụ 2: Tính

a) $\sqrt[3]{0}$	b) $-\sqrt[3]{-8}$	c) $-\sqrt[3]{125}$
------------------	--------------------	---------------------

Bài làm:

2) Căn thức bậc ba.

- ♣ Căn thức bậc ba là biểu thức có dạng $\sqrt[3]{A}$, trong đó A là một biểu thức đại số.
- ♣ Ta có $(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A^3} = A$.

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức sau $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

Bài làm:

Ví dụ 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$	b) $\sqrt[3]{(2\sqrt{2}+1)^3}$	c) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1})^3$
-------------------------------	--------------------------------	-------------------------------

Bài làm:

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1: Tính

1) $\sqrt[3]{-64}$	2) $-\sqrt[3]{216}$	3) $-\sqrt[3]{0}$
4) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{125}$	5) $\sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{6}$	6) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-64}$
7) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-16} + \sqrt[3]{128}$	8) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{-27}$	9) $-\sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{(-1)^3}$

Bài 2: Tính

1) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$	2) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$	3) $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(9+4\sqrt{5})}$
4) $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$	5) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$	

Các bài toán ôn thi vào 10 khu vực Hà Nội

Dạng 1. Tìm x nguyên hoặc x để biểu thức nhận giá trị nguyên

Bài 1: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm các giá trị nguyên của x để hiệu $A - B$ có giá trị nguyên.

Bài 2: Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+\sqrt{x}+2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.
- Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài 3: Cho biểu thức $A = \frac{x-8}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{5\sqrt{x}+3}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$.
- Với $M = \frac{A}{B}$. Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức M đạt giá trị nguyên.

Bài 4: Cho biểu thức $A = \frac{x-6}{x+3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0$.

- Tính giá trị của B khi $x = 4$.
- Chứng minh $P = A + B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 36$.
- Rút gọn A .
- Tìm tất cả các số nguyên x để $P = A \cdot B$ là số nguyên.

Bài 6: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+6}{x-4}$ và $B = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

- Tìm giá trị của B khi $x = \frac{4}{9}$.
- Rút gọn biểu thức A
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức B nhận giá trị nguyên
- Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = A - B$.

Bài 7: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$
- So sánh B với 1.
- Tìm số nguyên x để $P = A \cdot B$ nhận giá trị là số tự nhiên.

Bài 8: Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm giá trị nguyên của x để $P = A \cdot B$ có giá trị là số tự nhiên.

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{2\sqrt{x}-2} + \frac{1}{2\sqrt{x}+2} + \frac{1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để biểu thức $P = A + B$ nhận giá trị nguyên.

Bài 10: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-6} - \frac{2}{\sqrt{x}+6} - \frac{9\sqrt{x}+6}{x-36}$ với $x \geq 0, x \neq 9, x \neq 36$

- Tính giá trị của A khi $x=16$
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6}$
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên nhỏ nhất.

Bài 11: Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{18}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x=36$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm tất cả các giá trị của x nguyên để P có giá trị nguyên.

Bài 12: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức B khi $x=49$
- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị của x để $P = A \cdot B$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 13: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+10}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$
- Tìm x để biểu thức $P = \frac{A}{B}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 14: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{4\sqrt{x}}{16-x}$ với $x \geq 0, x \neq 16$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$
- Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Bài 15: Cho biểu thức $A = \frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}} - \frac{9\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x để biểu thức $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Bài 16: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}+4}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.
- Tìm giá trị của x để $Q = \frac{2B}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 17: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-2} + \frac{4}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị của x để P có giá trị nguyên.

Bài 18: Cho hai biểu thức $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$ với $x > 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 4$.
- Rút gọn biểu thức $P = B \cdot A$
- Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 19: Cho hai biểu thức $A = \frac{9}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{x+16}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$
- Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Bài 20: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{4\sqrt{x}+6}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $M = A(B-1)$ có giá trị là số nguyên.

Bài 21: Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{18}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $M = A \cdot B$ có giá trị là số nguyên.

Bài 22: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{8}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+26}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{5}{\sqrt{x}+2}$
- Tìm giá trị x để $P = A \cdot B$ đạt giá trị nguyên nhỏ nhất.

Bài 23: Cho các biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ và $C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức B và C .
- Tìm x để $B \cdot C = \frac{1}{3}$.
- Chứng minh rằng với $x > 0, x \neq 1$ thì tích $B \cdot C$ không thể nhận giá trị nguyên.

Bài 24: Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+2}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 100$
- Chứng minh biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$
- Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để biểu thức $3M$ có giá trị là một số nguyên với $M = A \cdot B$

Bài 25: Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức $P = \frac{A}{B}$
- Tìm số tự nhiên x để $P < 0$

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$
- Tìm các giá trị x nguyên để $B : A < \frac{1}{2}$

Bài 27: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$
- Đặt $P = A - 6B$. Tìm giá trị x nguyên lớn nhất để $P < 0$

Bài 28: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{2\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $P^2 > P$

Bài 29: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{5}{\sqrt{x}-2} - \frac{16+2\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$
- Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $5A + B \leq 3$

Dạng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức.

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x=1$
- Chứng minh rằng $B = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$
- Gọi $P = A + B$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Bài 2: Cho hai biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $N = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{8}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức M khi $x=9$
- Chứng minh $N = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{M}{N}$.

Bài 3: Cho biểu thức $P = \frac{3x+12}{\sqrt{x}+3}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của P khi $x=4$
- Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{P}{Q}$.

Bài 4: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{3x+3}{9-x}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B và tính $P = \frac{B}{A}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+10}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức B tại $x = 4$
- Rút gọn biểu thức $M = \frac{A}{B}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của M

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$
- Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7: Cho hai biểu thức $M = \frac{x+15}{\sqrt{x}+3}$ và $N = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-5}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$

- Tính giá trị của M khi $x = 81$
- Rút gọn biểu thức N
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = M + N$

Bài 8: Cho biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm giá trị của x để $C = \frac{A}{B}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Cho biểu thức $P = \frac{x+7}{3\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$.
- Chứng minh $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = P \cdot Q$.

Bài 11: Cho hai biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+15}{x-9}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức $M = P \cdot Q$
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M .

Bài 12: Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài 13: Cho hai biểu thức $P = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \sqrt{3} + 66$
- Rút gọn biểu thức $P-1$
- Với $x \in \mathbb{N}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = Q \cdot (P-1)$

Bài 14: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm $x \in \mathbb{N}$ để biểu thức $P = A \cdot B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 15: Cho $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của A khi $x = 25$
- Rút gọn B .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = A \cdot B$

Bài 16: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{1+\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-21}{x-\sqrt{x}-6} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{4}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A \cdot B$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P

Bài 17: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x+3\sqrt{x}+9}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$.
- Rút gọn biểu thức B .
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài 18: Cho hai biểu thức $P = \frac{x-9}{\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{2\sqrt{x}+5}{9-x}$ với $x > 0, x \neq 9$

- Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 4$
- Chứng minh $Q = \frac{x+2}{x-9}$
- Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $A = P \cdot Q$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 19: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tìm các giá trị của x để $A = \frac{-3}{5}$
- Rút gọn biểu thức $P = B : A$
- Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Dạng 3. Các bài toán tổng hợp

Bài 1: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+4}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A \cdot B$. Tìm giá trị của x khi $|P| = P$

Bài 2: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{3x}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 4, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 49$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $|P| > P$

Bài 3: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x = 16$
- Rút gọn B
- Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị nguyên của x để $|P| > P$

Bài 4: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3x+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $P = A : B$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $2\sqrt{P} < 1$

Bài 5: Cho $A = \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25} + \frac{3}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- Tính giá trị của B khi $x = 49$.
- Rút gọn A .

- c) Tính giá trị của x để $\frac{B}{A} = |x-4|$.

Bài 6: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} + \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

- b) Chứng minh rằng $B = \frac{x-25}{x-9}$

- c) Đặt $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $\sqrt{P} < \frac{1}{3}$

Bài 7: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

- b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

- c) Đặt $P = A : B$. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Bài 8: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \frac{x+20}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{6}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$

- b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$

- c) Tìm x để $\sqrt{AB} < \frac{1}{2}$.

Bài 9: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4x}{x-4}$ và $B = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = 196$

- b) Rút gọn biểu thức A

- c) Xét biểu thức $P = A : B$. So sánh P và $\sqrt{P}$

Bài 10: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của A khi $x = 169$

- b) Chứng minh biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

- c) Với biểu thức $P = A \cdot B$. Hãy so sánh biểu thức P với $\sqrt{P}$

Bài 11: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{3\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

- b) Rút gọn biểu thức B .

- c) Đặt $P = A \cdot B$. So sánh giá trị của biểu thức P với 1.

Bài 12: Cho $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của A khi $x=9$.
- Rút gọn B
- Đặt $P = A.B$. So sánh P với 1.

Bài 13: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{12}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}-15}{x-25} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$
- Rút gọn biểu thức B
- Đặt $C = \frac{B}{A}$. Tìm giá trị của x để biểu thức C có giá trị bằng 2

Bài 14: Cho hai biểu thức $A = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3x+1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của A khi $x=36$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho biểu thức $P = A.B$. Tìm x để $P = \frac{10}{3}$

Bài 15: Cho hai biểu thức $A = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}+5}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}+30}{x-25} \right) : \frac{x}{\sqrt{x}-5}$ với $x > 0, x \neq 25$

- Tính giá trị của A khi $x=1$
- Rút gọn biểu thức B
- Cho $P = A.B$. Tìm x để $P=4$

Bài 16: Cho hai biểu thức và $B = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1-x}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm tất cả các giá trị của x để $A.B = A$

Bài 17: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=9$.
- Chứng minh $P=Q$.
- Tính giá trị của x để biểu thức $P = \frac{1}{4}$.

Bài 18: Cho hai biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- Tính giá trị của Q tại $x=9$
- Rút gọn biểu thức $M = P.Q$
- Tìm các giá trị của x để $M < \frac{-1}{3}$

Bài 19: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A với $x=1$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

c) Tìm x để $A.B \geq 0$

Bài 20: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x+4}{x-4} - \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

c) Đặt $P = A.B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 21: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$

c) Cho biểu thức $P = A.B$, tìm x để $P > \frac{1}{2}$

Bài 22: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm x để $A.B < \frac{1}{2}$

Bài 23: Cho hai biểu thức $A = \frac{5-x}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{\sqrt{x}+3} - \frac{2x+18}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Biết $P = A.B$. Tìm các giá trị của x để $P \geq 2$

Bài 24: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$

b) Chứng minh rằng $B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$

c) Tìm giá trị x nguyên lớn nhất thỏa mãn $A.B \leq -1$

Bài 25: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}+6}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

a) Tính giá trị của A khi $x=16$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Cho $P = A.B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 26: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}-2} + \frac{16}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1$
- Rút gọn biểu thức B
- Tìm các giá trị x là số chẵn để $A.B \geq 1$

Bài 27: Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x-3}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{A}{B} < 1$.

Bài 28: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{2x}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$
- Tìm các giá trị nguyên của x để $P < 0$ với $P = A.B$.

Bài 29: Cho hai biểu thức $A = \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x+\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$.

- Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- Rút gọn B .
- Đặt $P = \frac{A}{B}$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P có giá trị âm.

Bài 30: Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$.

- Nêu điều kiện xác định và rút gọn P .
- Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{4}$.
- Tìm x để $P < 2$.

Bài 31: Cho hai biểu thức $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.
- Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$.
- Tìm các giá trị nguyên của x để $P > \frac{1}{4}$.

Bài 32: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2-3\sqrt{x}}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- Rút gọn biểu thức B .

- c) Tìm các giá trị nguyên của x để $\frac{B}{A} > \frac{5}{4}$.

Bài 33: Cho biểu thức $A = 5\sqrt{5} - \sqrt{80} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{3-11\sqrt{x}}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- a) Rút gọn biểu thức A và B
b) Hãy tìm các giá trị của x để biểu thức A và B thỏa mãn $B > A$

Bài 34: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{4\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$
b) Rút gọn biểu thức B
c) Đặt $P = B : A$. So sánh P với 2.

Bài 35: Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{12}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$
b) Rút gọn biểu thức B
c) Tìm các giá trị của x để $P = 3$. AB đạt giá trị nguyên âm.

Bài 36: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
b) Chứng minh biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.
c) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm tất cả các giá trị của m để có giá trị x thỏa mãn $P = m$

Bài 37: Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$
b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$
c) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{2}{x+2}$

Bài 38: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$

- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.
c) Tìm tất cả các số nguyên tố x để $A > B(2\sqrt{x}+5)$

Bài 39: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tính giá trị của biểu thức B khi $4x^2 + x - 5 = 0$
c) Tìm m để có giá trị x thỏa mãn $2A + mB = 0$

Bài 40: Cho các biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của A khi $x=9$
- b) Rút gọn biểu thức B
- c) Đặt $P = A.B$. Tìm x để $P \geq \frac{\sqrt{x}+9}{8}$

Bài 41: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- a) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=16$
- b) Rút gọn biểu thức $P = A.B$
- c) Tìm tất cả các giá trị của x để $(6x+18).P \geq x+9$