

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ - PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

BÀI 18. HÀM SỐ $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) xác định với mọi giá trị của x thuộc R .

2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

- Cách vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

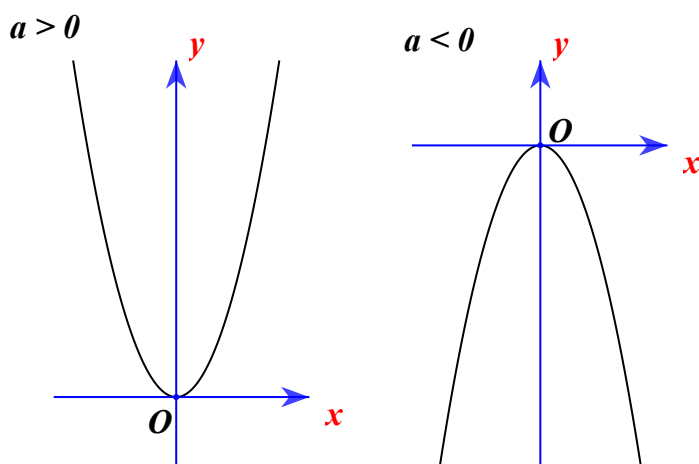
- Lập bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y .

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn các cặp $(x; y)$ trong bảng giá trị trên và nối chúng lại để được một đường cong là đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

- Nhận biết tính đối xứng của đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$).

Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một đường cong, gọi là đường parabol, có các tính chất sau:

- Có đỉnh là gốc tọa độ.
- Có trục đối xứng là Oy .
- Nằm phía bên trên trục hoành nếu $a > 0$ và nằm phía dưới trục hoành nếu $a < 0$



Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

Bài 1. Hàm số nào sau đây có dạng ax^2 ($a \neq 0$)? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2 .

- a) $y = x^2$. b) $y = -3x^2$. c) $y = \frac{4x^2}{9}$. d) $y = \frac{2}{x^2}$

Lời giải

Các hàm số có dạng ax^2 ($a \neq 0$) là:

a) $y = x^2$. có $a = 1$

b) $y = -3x^2$. có $a = -3$

c) $y = \frac{4x^2}{9}$. có $a = \frac{4}{9}$

Bài toán tương tự.

Hàm số nào sau đây có dạng ax^2 ($a \neq 0$) ? Đối với những hàm số đó, xác định hệ số a của ax^2 .

a) $y = -x^2$.

b) $y = \frac{x^2}{2}$.

c) $y = \frac{1}{4x^2}$.

Bài 2. Cho hàm số $y = 4x^2$. Tính giá trị của y khi :

a) $x = 0$

b) $x = 2$

c) $x = -2$.

Lời giải

a) Với $x = 0$ thì $y = 4.0^2 = 0$.

b) Với $x = 2$ thì $y = 4.2^2 = 16$.

c) Với $x = -2$ thì $y = 4.(-2)^2 = 16$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$). Xác định a , biết rằng $f(-2) = 4$.

Lời giải

Thay $x = -2; y = 4$ vào phương trình $y = ax^2$, ta được

$$4 = a.(-2)^2$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

Vậy hàm số có dạng $y = x^2$.

Bài toán tương tự. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$.

a) Tìm a biết $f(-3) = -9$

b) Với a vừa tìm được ở câu trên. Tính $f(0); f(3)$.

c) Với a vừa tìm được ở câu a). Tìm x_0 biết $f(x_0) = -27$.

Lời giải

a) Thay $x = -3; y = -9$ vào phương trình $y = ax^2$, ta được

$$-9 = a.(-3)^2$$

$$9a = -9$$

$$a = -1$$

Vậy hàm số có dạng $y = -x^2$.

b) $f(x) = -x^2 \Rightarrow f(0) = 0; f(3) = -(3)^2 = -9$

c) Ta có $y = f(x) = -x^2$ nên $f(x_0) = -x_0^2$

Mà $f(x_0) = -27$, nên $-x_0^2 = -27$

$$x_0^2 = 27$$

$$x_0 = \pm 3\sqrt{3}$$

Nhận xét : Bạn thường quên giá trị $x_0 = -3\sqrt{3}$.

Vì $x_0^2 = 27$ nên $\sqrt{x_0^2} = \sqrt{27}$

$$|x_0| = 3\sqrt{3}$$

$$x_0 = \pm 3\sqrt{3}.$$

Bài 4. Lập bảng giá trị của hàm số $y = x^2$ và $y = -x^2$, với các giá trị của x lần lượt bằng $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

Lời giải

Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Bảng giá trị của hàm số $y = -x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

Bài 5. Lực $F(N)$ của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỷ lệ thuận với bình phương tốc độ $v(m/s)$ của gió theo công thức : $F = av^2$, ở đó a là một hằng số. Biết rằng, khi tốc độ gió là $2m/s$ thì lực tác động lên cánh buồm của con thuyền bằng $120N$.

a) Tính hằng số a .

b) Khi tốc độ của gió là $v = 10m/s$ thì lực F của gió tác động lên cánh buồm là bao nhiêu?

c) Cánh buồm của thuyền chỉ chịu được lực tác động tối đa là $12000N$. Hỏi con thuyền có thể ra khơi khi tốc độ của gió là $90km/h$ hay không? Vì sao?

Lời giải

a) Thay $v = 2, F = 120$ vào công thức $F = av^2$, ta được $120 = a.2^2$

$$4a = 120$$

$$a = 30$$

b) Vì $a = 30$ nên $F = 30.v^2$

Với $v = 10$ ta có $F = 30.10^2 = 3000(N)$

c) Đổi $90km/h = 25m/s$

Với $v = 25$, ta có $F = 30.25^2 = 18750(N)$

Ta thấy $18750 > 12000$ nên con thuyền có thể ra khơi với tốc độ gió là $90km/h$.

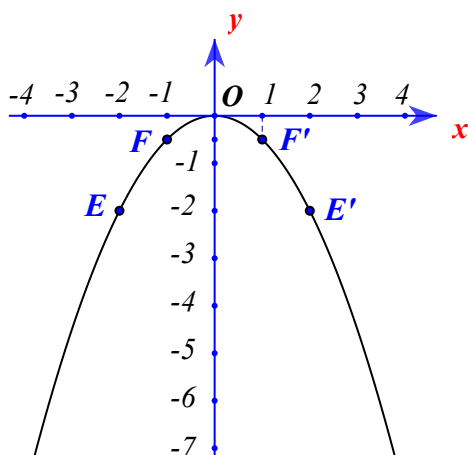
II. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

Bài 6. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$

Lời giải

Bảng giá trị của hàm số:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



Trên mặt phẳng tọa độ Oxy các điểm $E(-2; -2)$; $F(-1; -\frac{1}{2})$; $O(0; 0)$; $F'(1; -\frac{1}{2})$; $E'(2; -2)$

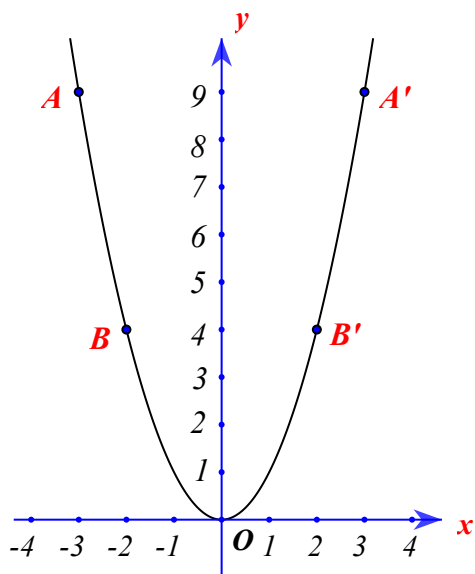
Đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ là một parabol đỉnh O , đi qua các điểm trên và có dạng như hình vẽ trên.

Bài toán tương tự. Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2$.

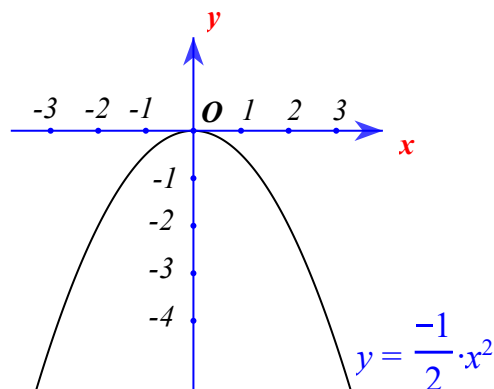
Lời giải

Bảng giá trị của hàm số $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



Bài 7. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là parabol như hình vẽ bên.



a) Các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ có thuộc parabol đó hay không ?

b) Nêu nhận xét về vị trí cặp điểm M và N đối với trục Ox

Lời giải

a) Do $-2 = -\frac{1}{2} \cdot (-2)^2$ và $-2 = -\frac{1}{2} \cdot 2^2$ nên các điểm $M(-2;-2); N(2;-2)$ thuộc parabol đó.

b) Ta thấy điểm M và N đối xứng nhau qua trục Ox .

Bài 8. Cho hai hàm số $y = \frac{3}{2}x^2$ và $y = -x^2$

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Tìm điểm A thuộc đồ thị $y = \frac{3}{2}x^2$, điểm B thuộc đồ thị $y = -x^2$. Biết rằng A và B đều có hoành độ $x = -\frac{3}{2}$

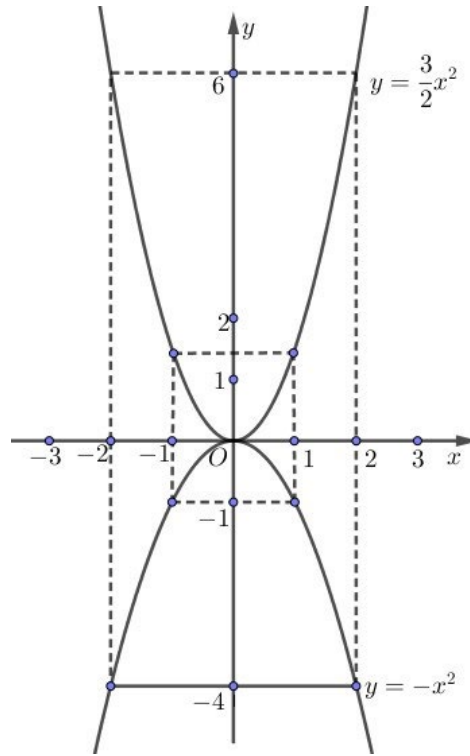
Lời giải

a) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$	6	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	6

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị của hai hàm số như hình vẽ.



b) Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = \frac{3}{2}x^2$, ta có : $y = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}$. Vậy $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{8}\right)$.

Với $x = -\frac{3}{2}$, thay vào công thức $y = -x^2$, ta có : $y = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$. Vậy $B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Bài 9. Một cổng chào được thiết kế theo hình parabol là một phần của đồ thị hàm số $y = -\frac{x^2}{2}$.

Khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8\text{ m}$.

a) Tính hoành độ của hai điểm A, B

b) Tính chiều cao của cổng.

Lời giải

a) Ta có $\frac{AB}{2} = 4$. Vậy hoành độ của A và B thứ tự là -4 và 4

b) Thay $x = 4$ vào công thức $y = -\frac{x^2}{2}$, ta có : $y = -\frac{4^2}{2} \Rightarrow y = -8$

Vậy chiều cao của cổng là $|-8| = 8(\text{m})$.

Bài 10. a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hướng dẫn giải

a) Vẽ parabol $y = x^2$ bằng các lập bảng giá trị (ta phải tìm ít nhất 5 giá trị).

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải

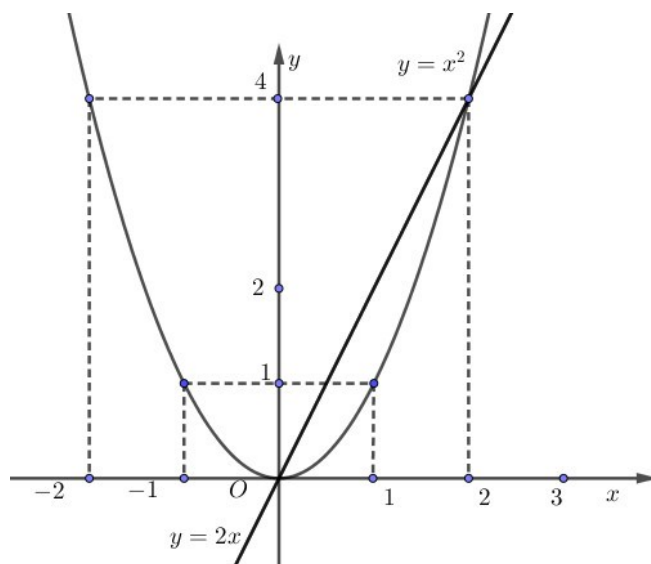
a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

x	0	1
$y = 2x$	0	2

Đồ thị (d) của hàm số $y = 2x$ là một đường thẳng qua hai điểm $(0;0)$; $(1;2)$ (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) , ta có:

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Vậy O là một giao điểm của (P) và (d) .

Với $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Vậy $A(2;4)$ là giao điểm thứ hai của (P) và (d) .

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x + 2$.

a) Vẽ (P) và (d) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

c) Tìm phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và cắt (P) tại điểm A có hoành độ bằng 2.

Hướng dẫn giải

a) Lập bảng giá trị.

b) Lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

c) $(d') \parallel (d)$ nên phương trình (d') có dạng: $y = \frac{1}{2}x + b$ ($b \neq 2$)

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
-----	----	----	---	---	---

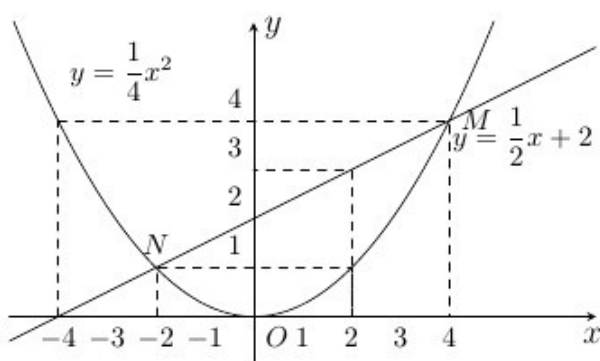
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0	1	4
----------------------	---	---	---	---	---

Đồ thị (P) là một parabol qua O và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

x	0	2
$y = \frac{1}{2}x + 2$	2	3

Đường thẳng (d) qua hai điểm $(0;2)$ và $(2;3)$ (xem hình vẽ).



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) , ta có:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 9 = 0$$

$$(x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{9}$$

$$|x-1| = 3$$

$$x-1 = 3 \text{ hoặc } x-1 = -3$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = -2$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $M(4;4)$ và $N(-2;1)$.

c) Đường thẳng (d') song song với (d) nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x + b (b \neq 2)$.

$$\text{Điểm } A(2; y_0) \in (P) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{4} \cdot (2)^2 \Rightarrow y_0 = 1.$$

$$\text{Vậy } A(2;1). A \in (d') \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 0.$$

$$\text{Phương trình } (d'): y = \frac{1}{2}x$$

Bài 12. Cho hàm số $y = (m+1)x^2$ và $y = 2x - 1$.

a) Tìm m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm A có hoành độ bằng 2.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2$ với m vừa tìm được ở câu a).

Hướng dẫn giải

a) Thế $x = 2$ (hoành độ của điểm A) vào phương trình $y = 2x - 1$. Từ đó tìm được m nhờ phương trình $y = (m + 1)x^2$.

b) Lập bảng giá trị.

Lời giải

a) A thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$ và hoành độ bằng 2 nên tung độ của A : $y = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow y = 3$
 Vậy $A(2; 3)$.

Lại có A là giao điểm của parabol $y = (m + 1)x^2$ và $y = 2x - 1$ nên ta có $3 = (m + 1) \cdot (2)^2$

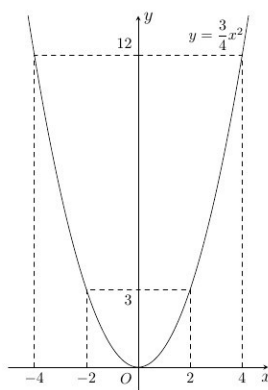
$$\Rightarrow 4m + 4 = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}. \text{ Vậy } y = \frac{3}{4}x^2.$$

b) Vẽ parabol $(P): y = \frac{3}{4}x^2$.

Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{3}{4}x^2$	12	3	0	3	12

Parabol (P) có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



Bài 13. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số đã cho.

b) Trên (P) lấy hai điểm A, B có hoành độ lần lượt -2 và 1 .

Viết phương trình đường thẳng AB .

Hướng dẫn giải

b) $A(-2; y_0); A \in (P) \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}(-2)^2 \Rightarrow y_0 = -2$.

Tương tự tính B . Từ đó viết phương trình đường thẳng AB (có dạng: $y = ax + b$)

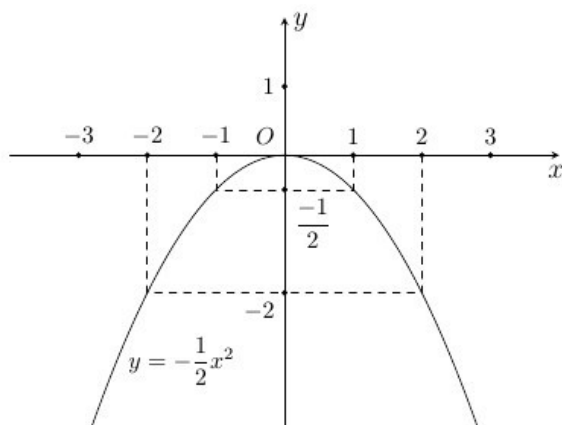
Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
-----	----	----	---	---	---

$y = \frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2
----------------------	----	----------------	---	----------------	----

Đồ thị (P) là một parabol có đỉnh O và nhận trục tung làm trục đối xứng.



b) Đặt $A(-2; y_0) \in (P)$

$$\Rightarrow y_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2)^2 \Rightarrow y_0 = -2$$

Vậy $A(-2; -2)$.

Đặt $B(1; y_1) \in (P) \Rightarrow y_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1^2 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}$. Vậy $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$

Đường thẳng AB có phương trình $y = ax + b(d)$.

$$A \in (d) \Rightarrow -2 = -2a + b; B \in (d) \Rightarrow -\frac{1}{2} = a + b$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 2 \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

∞ HẾT ∞

BÀI 19. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.****1. Định nghĩa phương trình bậc hai một ẩn.**

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là hệ số và $a \neq 0$.

2. Cách giải phương trình bậc hai một ẩn có dạng đặc biệt

$$ax^2 + bx = 0; ax^2 + c = 0.$$

Dùng phương pháp đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức để đưa về trái về một bình phương.

- Lưu ý:**
- Nếu $A \cdot B = 0$ thì $A = 0$ hoặc $B = 0$.
 - Nếu $A^2 = B$ ($B \geq 0$) thì $A = \sqrt{B}$ hoặc $A = -\sqrt{B}$.

3. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với $b = 2b'$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}, x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Các công thức ở trên gọi là công thức nghiệm thu gọn.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP**I. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.**

Bài 1. Tìm các hệ số a, b , của phương trình:

a) $x^2 - 8x + 2 = 0$

b) $5x^2 + 2x = 4 - x$

c) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$

d) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$

e) $x^2 + 4x = 4 - m^2$

f) $x^2 + m(x - 1) = 1 - m$

Hướng dẫn: Đưa mỗi phương trình về dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 1; b = -8; c = 2$.

Chú ý: $b = -8$ chứ không phải $b = 8$.

b) Ta có: $5x^2 + 2x = 4 - x \Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 4 = 0$.

Vậy $a = 5; b = 3; c = -4$.

Chú ý: Biến đổi phương trình để cho vế phải bằng 0.

c) Ta có: $a = 1; b = \sqrt{2}; c = 0$.

d) Ta có: $a = -\frac{1}{2}, b = 2; c = 2$.

e) Ta có: $x^2 + 4x = 4 - m^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + m^2 - 4 = 0$

Vậy $a = 1; b = 4; c = m^2 - 4$.

Chú ý: $c = m^2 - 4$, bạn đừng tưởng rằng $c = -4$.

f) Ta có: $x^2 + m(x - 1) = 1 - m \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$

Vậy $a = 1; b = m; c = -1$.

Bài 2. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình.

a) $2x^2 - (1 - 2a)x + a - 1 = 0$

b) $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

c) $3x^2 + 2(m - 3)x + 2m + 1 = 0$

d) $-x^2 + (m - 2)x + 2 = 0$

Lời giải

Đặt phương trình $Ax^2 + Bx^2 + C = 0$

a) Ta có: $A = 2; B = -(1 - 2a); C = a - 1$.

b) Ta có: $A = m; B = -2(m - 1); C = m - 3$.

c) Ta có: $A = 3; B = 2(m - 3); C = 2m + 1$.

d) Ta có: $A = -1; B = m - 2; C = 2$.

Chú ý: Ở câu a , người ta đã dùng chữ a để chỉ tham số; x là ẩn, nên ta phải dùng chữ hoa: $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Bài 3. Tìm các hệ số a, b, c của phương trình:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$ (1)

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 2$ (2)

c) $(x+1)\left(\frac{1}{x} - 2\right) = 5$ (3)

Hướng dẫn: Quy đồng và rút gọn phương trình về dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

a) Điều kiện $x \neq 0; -2$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x + 2 + x = \frac{5}{12}x(x + 2)$

$\Leftrightarrow 24x + 24 = 5x^2 + 10x \Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$

Vậy $a = 5; b = -14; c = -24$.

b) Điều kiện: $x \neq 0; 1$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow x - 1 + x = 2x(x - 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 1 = 0$$

Vậy $a = -2; b = 4; c = -1$.

Chú ý: Ta có thể nhân hai vế phương trình với -1 (đổi dấu hai vế), ta được:

$$2x^2 - 4x + 1 = 0. \text{ Lúc này } a = 2; b = -4; c = 1.$$

c) Ta có: $(3) \Leftrightarrow (x + 1)(1 - 2x) = 5x; x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x - 2x^2 + 1 - 2x - 5x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 1 = 0$$

Vậy $a = 2; b = 6; c = -1$.

II. Giải phương trình bậc hai khuyết

Bài 4. Giải phương trình sau:

a) $2x^2 - \sqrt{2}x = 0$ (1)

b) $x^2 - 4 = 0$ (2)

c) $3x^2 = 27$ (3)

d) $x^2 + 1 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Rút gọn về dạng $f(x) = 0$. Phân tích $f(x)$ thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có: $(1) \Leftrightarrow x(2x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

b) Ta có: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Chú ý: Có thể viết gọn: $x = \pm 2$, nhưng ta phải hiểu $x = 2$ hoặc $x = -2$; không phải $x = 2$ và $x = -2$. (Ở trên, bạn chú ý đến dấu ngoặc vuông)

Cách khác: Ta có: $(2) \Leftrightarrow x^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

c) Ta có: $(3) \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9}$

$$\Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Cách khác: $(3) \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

d) Vì $x^2 > 0, \forall x \Rightarrow x^2 + 1 > 0$. Vậy phương trình (4) vô nghiệm.

Bài 5. Cho phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$.

a) Tìm m biết rằng phương trình có một nghiệm bằng 7.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: $x = 7$ là nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$ nên thay $x = 7$ vào phương trình, ta được: $7^2 + m \cdot 7 - 35 = 0$. Từ đó tìm được m .

Lời giải

a) Vì $x = 7$ là một nghiệm của phương trình đã cho, nên thay $x = 7$ vào phương trình, ta được $7^2 + m \cdot 7 - 35 = 0 \Leftrightarrow 49 + 7m - 35 = 0$

$$\Leftrightarrow 7m = -14 \Leftrightarrow m = -2$$

b) Theo kết quả trên, với $m = -2$, phương trình đã cho trở thành:

$$x^2 - 2x - 35 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 36 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{6^2} \Leftrightarrow |x - 1| = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 6 \\ x - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -5 \end{cases}$$

Cách khác: Ta có: $(*) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 36 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 6^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 - 6)(x - 1 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 7)(x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -5 \end{cases}$$

Ta cũng có thể biến đổi như sau: $(*) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 7x - 35 = 0 \Leftrightarrow x(x + 5) - 7(x + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 7) = 0 \text{ (tiếp tục như trên).}$$

Bài 6. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$. Tìm p, q biết rằng phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 4$

Lời giải

Thay $x = 3$ và $x = 4$ vào phương trình $x^2 + px + q = 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 9 + 3p + q = 0 \\ 16 + 4p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ 9 + 3p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ q = 12 \end{cases}$$

Bài tập tương tự

Tìm p, q để nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

Lời giải

Ta có: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Thay $x = \pm 2$ vào phương trình $x^2 + px + q = 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 4+2p+q=0 \\ 4-2p+q=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=-4 \\ p=0 \end{cases}$$

Nhận xét: Ta được phương trình $x^2 + 0x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$, đó chính là phương trình thứ nhất.

Bài 7. Giải phương trình.

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (1)

b) $x^2 + 3x - 4 = 0$ (2)

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 5.

Lời giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 6x + x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-6) + (x-6) = 0 \Leftrightarrow (x-6) \cdot (x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases}$$

Cách khác: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left|x - \frac{5}{2}\right| = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \\ x - \frac{5}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases}$$

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 4x - x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x+4) - (x+4) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=1 \end{cases}$$

Cách khác: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ x + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Bài 8. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hàm số sau: $y = 4x^2$; $y = 4x + 3$.

Hướng dẫn: Lập phương trình hoành độ giao điểm.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của hai đồ thị

$$4x^2 = 4x + 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |2x - 1| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $x = \frac{3}{2}$, ta tìm được $y = 9$.

Với $x = -\frac{1}{2}$, ta tìm được $y = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị là: $A\left(\frac{3}{2}; 9\right); B\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx + 1 = 0$ có nghiệm.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + 2mx + 1 = x^2 + 2mx + m^2 - m^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + m)^2 = m^2 - 1$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{m^2} \geq \sqrt{1} \Leftrightarrow |m| \geq 1$.

Nhận xét: Ta có thể xét điều kiện để phương trình vô nghiệm: $|m| < 1$.

Bài 10. Tìm m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung: $x^2 - 1 = 0$ và $x^2 - mx = 0$.

Hướng dẫn: Tìm nghiệm của từng phương trình.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$$

$x = 1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - mx = 0$ khi $m = 1$.

$x = -1$ là nghiệm của phương trình $x^2 - mx = 0$ khi $m = -1$.

III. Giải phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

c) $2x^2 - 7x + 2 = 0$

Hướng dẫn: Xác định các hệ số a, b, c ; sau đó tính Δ ($\Delta = b^2 - 4ac$).

Lời giải

a) Ta có $a = 2; b = -5; c = 2$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.2.2 = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{-(-5)+3}{2.2} = 2; x_2 = \frac{-(-5)-3}{2.2} = \frac{1}{2}$

b) Ta có: $a = 1; b = -(1+\sqrt{2}); c = \sqrt{2}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left[-(1+\sqrt{2}) \right]^2 - 4.1.\sqrt{2}$$

$$= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2}$$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (1-\sqrt{2})^2 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{(1+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)}{2.1} = \sqrt{2}; x_2 = \frac{(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1)}{2.1} = 1$$

Cách khác: $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - \sqrt{2}(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\sqrt{2} \end{cases}$$

c) Ta có: $a = 2; b = -7; c = 2$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.2.2 = 49 - 16 = 33 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$$

Phương trình có hai nghiệm: $x_1 = \frac{7+\sqrt{33}}{4}; x_2 = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$

Bài 12. Giải phương trình:

a) $9x^2 - 30x + 225 = 0$

b) $(2x-3)^2 = 11x-19$

c) $3(x^2-1) = 8x$

d) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

e) $5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$

Hướng dẫn: Xác định các hệ số a, b, c sau đó tính $\Delta (\Delta = b^2 - 4ac)$.

Lời giải

a) Ta có: $9x^2 - 30x + 225 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 75 = 0$

$$a = 3; b = -10; c = 75$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4.3.75 = -800 < 0$$

Phương trình vô nghiệm.

b) Ta có: $(2x-3)^2 = 11x-19 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 11x + 19 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 23x + 28 = 0$$

$$a = 4; b = -23; c = 28$$

$$\Delta = (-23)^2 - 4.4.28 = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{23+9}{2.4} = 4; x_2 = \frac{23-9}{2.4} = \frac{7}{4}$$

$$\text{c) Ta có: } 3(x^2 - 1) = 8x \Leftrightarrow 3x^2 - 3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0$$

$$a = 3; b = -8; c = -3$$

$$\Delta = (8)^2 - 4.3(-3) = 100 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{8+6}{6} = 3; x_2 = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$$

Chú ý: Em cần sắp xếp các số hạng để đưa về dạng $ax^2 + bx + c = 0$, chẳng hạn: $3x^2 - 3 - 8x = 0$.

$$\text{d) Ta có: } a = 9; b = -30; c = 25$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4.9.25 = 0$$

$$\text{Phương trình có nghiệm kép: } x_1 = x_2 = \frac{-(-30)}{2.9} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Cách khác: Ta có: } 9x^2 - 30x + 25 = 0 \Leftrightarrow (3x - 5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\text{e) Ta có: } a = 5; b = -2\sqrt{5}; c = 1.$$

$$\Delta = (2\sqrt{5})^2 - 4.5.1 = 0$$

$$\text{Phương trình có nghiệm kép: } x_1 = x_2 = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Cách khác: Ta có: } 5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{5}x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Bài 13. Giải phương trình:

$$\text{a) } (2x+1)^2 = 8x \quad (1)$$

$$\text{b) } (3x-1)(x+1) = 15 \quad (2)$$

$$\text{c) } 2x^2 + 3x - (x-1)(x-2) = 0 \quad (3)$$

Hướng dẫn: Rút gọn và đưa về dạng $ax^2 + bx + c = 0$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } (1) \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$$

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

(Ta có thể tính Δ và có $\Delta = 0$ nên phương trình có nghiệm kép).

b) Ta có: $(2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$

Trong đó: $a = 3; b = 2; c = -16$

$$\Delta = 4 - 4.3(-16) = 196 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14.$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-2+14}{6} = 2; x_2 = \frac{-2-14}{6} = -\frac{8}{3}$$

c) Ta có: $(3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - (x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 2 = 0$

Trong đó: $a = 1; b = 6; c = -2$

$$\Delta = 6^2 - 4.1.(-2) = 44 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

Phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-6+2\sqrt{11}}{2} = -3+\sqrt{11}; x_2 = \frac{-6-2\sqrt{11}}{2} = -3-\sqrt{11}$$

IV. Điều kiện phương trình có nghiệm và số nghiệm của phương trình

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$x^2 + 2x + m - 2 = 0$$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = 2; c = m - 2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4.1.(m-2) > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4m + 8 > 0 \Leftrightarrow 12 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Chú ý: Hệ số $c = m - 2$, chứ không phải $c = -2$.

Bài tập tương tự.

+ Tìm m để phương trình vô nghiệm; có nghiệm kép; có nghiệm.

(Đáp số: $m > 3; m = 3; m \leq 3$).

+ Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 0. (Đáp số: $m = 2$).

Bài 15. Tìm m để phương trình $mx^2 + (2m-1)x + m+2 = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn: Xét trường hợp $a = 0; a \neq 0$ và xem chú ý ở bài toán 14.

Lời giải

Ta có: $a = m; b = 2m - 1; m + 2$

+ Nếu $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 4.m.(m+2) \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12m + 1 \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{12} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

+ Nếu $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Ta có Phương trình: $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy với $m = 0$, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq \frac{1}{12}$.

Chú ý: + Bạn thường quên xét trường hợp $a = 0$.

+ Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

(Đáp số: $m < \frac{1}{12}$ và $m \neq 0$).

Bài 16. Tìm m để phương trình $(m-1)x^2 + (m+4)x + m+7 = 0$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn: Xét hai trường hợp: $a = 0$ và $a \neq 0$.

(Nếu $a \neq 0$. Phương trình bậc hai có nghiệm kép).

Lời giải

Ta có: $a = m-1$; $b = m+4$; $c = m+7$

Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Ta có phương trình: $5x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}$ (nghiệm duy nhất).

Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

$$\Leftrightarrow (m+4)^2 - 4.(m-1)(m+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 16m - 44 = 0 (*)$$

Giải phương trình (*), có dạng:

$Am^2 + Bm + C = 0$; trong đó: $A = 3$; $B = 16$; $C = -44$; m là ẩn số.

$$\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 16^2 - 4.3.(44) = 784 > 0 \Rightarrow \sqrt{784} = 28.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-16+28}{6} \\ m = \frac{-16-28}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{22}{3} \end{cases}$$

Đáp số: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 1$; $m = 2$; $m = -\frac{22}{3}$

Chú ý: Ta phải xét cả khi $a = 0$, phương trình đã cho trở thành phương trình bậc nhất.

Bạn có thể phân biệt với bài toán 17 dưới đây.

Bài 17. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 2 = 0$ có nghiệm kép.

Hướng dẫn: Phương trình bậc hai có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $a = m; b = -2(m-1); c = 2$.

Phương trình đã cho có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ [-2(m-1)]^2 - 4.m.2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 - 16m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - 4m + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}$$

Bài 18. Tìm m để phương trình $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép và tính nghiệm kép với m vừa tìm được.

Hướng dẫn: Xem bài toán 17.

Lời giải

• Ta có: $a = 1; b = 2m+1; c = m^2$.

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (2m+1)^2 - 4.1.m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

• Với $m = -\frac{1}{4}$, phương trình đã cho có dạng:

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Bài 19. Chứng minh rằng phương trình $2x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$ luôn luôn có nghiệm với mọi m .

Hướng dẫn: Chứng tỏ $\Delta \geq 0, \forall m$.

Lời giải

Ta có: $a = 2; b = 2m-1; c = m-1$

$$\Rightarrow \Delta = (2m-1)^2 - 4.2.(m-1) = 4m^2 - 12m + 9$$

$$= (2m-3)^2 \geq 0, \forall m.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

Bài 20. Chứng tỏ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì luôn có nghiệm.

Hướng dẫn: Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Theo giả thiết: a và c trái dấu $\Rightarrow ac < 0 \Rightarrow -ac > 0 \Rightarrow -4ac > 0$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta > 0.$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Áp dụng: Không tính Δ hãy giải thích vì sao phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

1) $x^2 - (2m+1)x - 1 = 0$

2) $x^2 - mx - m^2 - 1 = 0$

Hướng dẫn:

1) Ta có: $a = 1; c = -1 \Rightarrow ac = -1 < 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

2) Ta có: $a = 1; c = -m^2 - 1$, vì $m^2 \geq 0 \Rightarrow -m^2 \leq 0 \Rightarrow -1 - m^2 \leq -1 < 0$

Vậy a và c trái dấu $\Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập tương tự đối với phương trình:

$$x^2 - mx - 1 = 0; x^2 - (2m-1)x - m^2 - 2m - 3 = 0.$$

V. Giải và biện luận phương trình có tham số

Bài 21. Giải và biện luận phương trình sau

a) $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1)

b) $mx^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$ (2)

Lời giải

a) Ta có: $a = 1; b = 2m; c = m^2 - 1$

$$\Delta = (2m)^2 - 4.1.(m^2 - 1) = 4 > 0, \forall m \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 > 0.$$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị $m \in R$

$$x_1 = \frac{-2m+2}{2} = -m+1; x_2 = \frac{-2m-2}{2} = -m-1;$$

b) Ta có: $a = m; b = 2m-1; c = m+2$

Trường hợp 1: $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Ta có phương trình: $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Trường hợp 2: $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4.m.(m+2) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m = -12m + 1.$$

+) $\Delta < 0 \Leftrightarrow -12m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{12}$ Phương trình vô nghiệm.

+) $\Delta = 0 \Leftrightarrow -12m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{12}$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 5$

+) $\Delta > 0 \Leftrightarrow -12m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{12}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{1-2m-\sqrt{1-12m}}{2m}; x_2 = \frac{1-2m+\sqrt{1-12m}}{2m}$$

Đáp số: $m = 0$ thì $x = 2$; $m < \frac{1}{12}$ thì $x_1 = \frac{1-2m-\sqrt{1-12m}}{2m}; x_2 = \frac{1-2m+\sqrt{1-12m}}{2m}$.

Bài 22. Giải phương trình:

a) $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$

b) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 10.

Lời giải

a) $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$

Ta có: $a = 1$; $b = -2(2m+1)$; $c = 4m^2 + 4m - 3$

$$\Delta = [-2(2m+1)]^2 - 4.1.(4m^2 + 4m - 3) = 16 > 0; \sqrt{\Delta} = 4$$

Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{2(2m+1) - 4}{2} = 2m - 1; \quad x_2 = \frac{2(2m+1) + 4}{2} = 2m + 3$$

b) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

+) $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Ta có: $a = m+1$; $b = -2(m-1)$; $c = m-2$

$$\Delta = [-2(m-1)]^2 - 4.(m+1).(m-2) = -4m + 12$$

+) Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4m + 12 < 0 \Leftrightarrow m > 3$ phương trình vô nghiệm

+) Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow -4m + 12 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

+) Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq -1 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{2m+2 - \sqrt{12-4m}}{2(m+1)} = \frac{m+1 - \sqrt{3-m}}{m+1}; \quad x_2 = \frac{2m+2 + \sqrt{12-4m}}{2(m+1)} = \frac{m+1 + \sqrt{3-m}}{m+1}$$

VI. Vị trí tương đối của parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Bài 23. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 3$

Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d)

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

$$2x^2 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 (*)$$

$$a = 2; b = 1; c = -3 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4.2.(-3) = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-1-5}{4} = \frac{-3}{2}$; $x_2 = \frac{-1+5}{4} = 1$

*) Với $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{2}$

*) Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ và $B(1; 2)$

Cách khác: Tọa độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

Trừ vế cho vế của hai phương trình, ta có: $2x^2 + x - 3 = 0$ (sau đó giải tiếp tục như cách trên).

Bài 24. Chứng tỏ rằng parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$ tiếp xúc nhau. Tìm tọa độ tiếp điểm.

Hướng dẫn: Chứng tỏ phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d)

$$\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 = 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 (*)$$

Ta có: $a = 1; b = -4; c = 4 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.1.4 = 0$

Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$

Vậy (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$

Tọa độ tiếp điểm: $M(2; 1)$

Bài tập tương tự. Vẽ parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$. Tìm tọa độ giao điểm.

Bài 25. Cho $(P): y = 2x^2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(0; -2)$ và tiếp xúc với (P) .

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng $(d): y - (-2) = k(x - 0) \Leftrightarrow y = kx - 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) có nghiệm kép

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) đi qua M có hệ số góc k :

$$y - (-2) = k(x - 0) \Leftrightarrow y = kx - 2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$2x^2 = kx - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - kx + 2 = 0 (*)$$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{k^2} = \sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow |k| = 4 \Leftrightarrow k = 4; k = -4$$

Chú ý: Điều kiện “tiếp xúc”, ta dùng “phương trình hoành độ giao điểm”.

Bài 26. Cho parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn: Phương trình hoành độ của parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$ có hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ của (P) và (d) :

$$\frac{3}{2}x^2 = x + m \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2m = 0 (*)$$

Ta có: $a = 3; b = -2; c = 2m$

(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (-2)^2 - 4.3.(-2m) > 0 \Leftrightarrow 4 + 24m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{6}$$

Chú ý: Điều kiện cắt nhau ta dùng “phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm phân biệt”

+) *Cách khác:* Tọa độ giao điểm của (P) và (d) thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 \\ y = x + m \end{cases}$$

Trừ vế cho vế của hai phương trình trên, ta được $\frac{3}{2}x^2 - x - m = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2m = 0$, ta được phương trình $(*)$ tiếp tục như trên.

Bài 27. Cho $(P): y = -\frac{x^2}{2}$ và đường thẳng $(d): y = x - 4$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

b) Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và tiếp xúc với (P) .

Hướng dẫn:

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

b) Phương trình $(d'): y = x + m$ ($m \neq 4$)

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) .

$$-\frac{x^2}{2} = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 (*)$$

Ta có: $a = 1; b = 2; c = -8 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4.1.(-8) = 36 > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2-6}{2} \\ x_2 = \frac{-2+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

*) Với $x = -4$, thay vào phương trình $y = x - 4 \Rightarrow y = -8$

*) Với $x = 2$, thay vào phương trình $y = x - 4 \Rightarrow y = -2$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(-4; -8)$ và $B(2; -2)$

b) Phương trình đường thẳng (d') song song với (d) có dạng $y = x + m$ ($m \neq -4$).

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d') là:

$$-\frac{x^2}{2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m = 0 \quad (**)$$

Ta có: $a = 1; b = 2; c = 2m$

(P) và (d') tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $(**)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Bài 28. Cho $a + b = 1$.

a) Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

b) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Hướng dẫn:

a) Đặt $y = a^2 + b^2$. Từ giả thiết: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b^2 = (1 - a)^2$

Vậy: $y = a^2 + (1 - a)^2 \Leftrightarrow y = 2a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 2a + 1 - y = 0 \quad (*)$

Tìm điều kiện của y để phương trình $(*)$ có nghiệm:

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 4 - 4.2.(1 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 8 + 8y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}$$

Vậy $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ (Đpcm).

b) Đặt $z = a^3 + b^3 \Leftrightarrow z = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Từ giả thiết: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b^2 = (1 - a)^2$

$$\Leftrightarrow z = a^2 - a(1 - a) + (1 - a)^2$$

$$\Leftrightarrow z = 3a^2 - 3a + 1$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 3a + 1 - z = 0 \quad (**)$$

Tìm điều kiện của z để phương trình $(**)$ có nghiệm:

Phương trình $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 9 - 4.3.(1 - z) \geq 0 \Leftrightarrow 12z - 3 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \frac{1}{4}$$

Vậy $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$ (Đpcm).

Bài 29. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức về dạng $y(x^2 + 1) = 2x \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ (*)

Tìm điều kiện để phương trình bậc hai theo x có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow y(x^2 + 1) = 2x$ (vì $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0 \quad (*)$$

+ Trường hợp 1: $y = 0 \Rightarrow x = 0$

+ Trường hợp 2: $y \neq 0$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{4y^2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |2y| \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng 1.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Giá trị nhỏ nhất của y bằng -1.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 30. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \sqrt{x+1} - x$.

Hướng dẫn: Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1 (x \geq -1 \Rightarrow u \geq 0)$.

Ta xét như bài toán 29.

Lời giải

Đặt $u = \sqrt{x+1}; x+1 \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$

Ta có: $u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1$

Vậy $y = u - (u^2 - 1) \Leftrightarrow u^2 - u - 1 + y = 0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$5 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{4}$$

Với $y \leq \frac{5}{4}$ phương trình (*) trở thành $u^2 - u - 1 + \frac{5}{4} = 0$, ta tìm được: $u = \frac{1}{2}$

Với $u = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $u \geq 0$).

$$\text{Vậy } \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{5}{4}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{3}{4}$

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 29. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$ (1)

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$ (2)

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ (3)

d) $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b , tính $b' = \frac{b}{2}$ và $\Delta' = b'^2 - ac$

Lời giải

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$ (1)

Ta có: $a = 5; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = -16$

$$\Delta' = 1^2 - 5 \cdot (-16) = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{81} = 9$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-1-9}{5} = -2; \quad x_2 = \frac{-1+9}{5} = \frac{8}{5}$$

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$ (2)

Ta có: $a = 1; b = -2\sqrt{3} \Rightarrow b' = -\sqrt{3}; c = -6$

$$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-6) = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{9} = 3$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-(-\sqrt{3})-3}{1} = \sqrt{3} - 3; \quad x_2 = \frac{-(-\sqrt{3})+3}{1} = \sqrt{3} + 3$$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$ (3)

Ta có: $a = 1; b = -2\sqrt{2} \Rightarrow b' = -\sqrt{2}; c = 2\sqrt{2} - 1$

$$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot (2\sqrt{2} - 1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1 > 0$$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1; \quad x_2 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1$$

d) $\sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$ (4)

Ta có: $a = \sqrt{2}; b = -2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow b' = -(\sqrt{2} - 1); c = \sqrt{2} - 2$

$$\Delta' = [-(\sqrt{2} - 1)]^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{1} = 1$$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{(\sqrt{2} - 1) - 1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}; \quad x_2 = \frac{(\sqrt{2} - 1) + 1}{\sqrt{2}} = 1$$

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm.

a) $3x^2 - 2x + m = 0$ (1)

b) $5x^2 - 18x + m = 0$ (2)

c) $m^2 - 6x + 1 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Lời giải

a) $3x^2 - 2x + m = 0$ (1)

Ta có: $a = 3; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$

$\Delta' = (-1)^2 - 3m = 1 - 3m$

Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$

b) $5x^2 - 18x + m = 0$ (2)

Ta có: $a = 5; b = 18 \Rightarrow b' = 9; c = m$

$\Delta' = 9^2 - 5m = 81 - 5m$

Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ 81 - 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{81}{5}$

Lời giải

Đặt $u = \sqrt{x+1}; x+1 \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$.

Ta có: $u^2 = x+1 \Rightarrow x = u^2 - 1$

Vậy $y = u - (u^2 - 1) \Leftrightarrow u^2 - u - 1 + y = 0$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 5 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{5}{4}$

Với $y = \frac{5}{4}$; phương trình (*) trở thành:

$u^2 - u - 1 + \frac{5}{4} = 0$, ta tìm được $u = \frac{1}{2}$

Với $u = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $u \geq 0$).

Ta có $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$ (thỏa mãn)

Giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{5}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{3}{4}$.

VII. Công thức nghiệm thu gọn

Bài 31. Giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn.

a) $5x^2 + 2x - 16 = 0$

b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 6 = 0$

c) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0$

$$d) \sqrt{2}x^2 - 2(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2} - 2 = 0$$

Hướng dẫn: Nhận xét về hệ số b , tính $b' = \frac{b}{2}$ và $\Delta' = b'^2 - ac$.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } a = 5; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = -16.$$

$$\Delta' = 1^2 - 5 \cdot (-16) = 81 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm phân biệt: } x_1 = \frac{-1-9}{5} = -2, \quad x_2 = \frac{-1+9}{5} = \frac{8}{5}.$$

$$b) \text{ Ta có: } a = 1, b = -2\sqrt{3} \Rightarrow b' = -\sqrt{3}; c = -6$$

$$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-6) = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3$$

$$\text{Vậy phương trình (2) có nghiệm phân biệt: } x_1 = \sqrt{3} - 3, \quad x_2 = \sqrt{3} + 3.$$

$$c) \text{ Ta có: } a = 1; b = -2\sqrt{2} \Rightarrow b' = -\sqrt{2}; c = 2\sqrt{2} - 1$$

$$\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot (2\sqrt{2} - 1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$$

Vậy phương trình (3) có nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1, \quad x_2 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1.$$

$$d) \text{ Ta có: } a = \sqrt{2}; b = -2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow b' = -(\sqrt{2} - 1); c = \sqrt{2} - 2$$

$$\Delta' = [-(\sqrt{2} - 1)]^2 - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 2) = 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 1$$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{(\sqrt{2} - 1) - 1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{(\sqrt{2} - 1) + 1}{\sqrt{2}} = 1.$$

Bài 32. Với giá trị nào của m phương trình sau đây vô nghiệm:

$$a) 3x^2 - 2x + m = 0 \quad (1)$$

$$b) 5x^2 + 18x + m = 0 \quad (2)$$

$$c) m^2 - 6x + 1 = 0 \quad (3)$$

$$d) x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0 \quad (4)$$

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } a = 3; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$$

$$\Delta' = (-1)^2 - 3m = 1 - 3m$$

$$\text{Phương trình (1) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$$

$$b) \text{ Ta có: } a = 5; b = 18 \Rightarrow b' = 9; c = m$$

Phương trình (2) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ 81 - 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{81}{5}$$

c) Ta có $a = m; b = -6 \Rightarrow b' = -3; c = 1$

$$\text{Phương trình (3) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 - m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 9 \end{cases} \Leftrightarrow m > 9$$

d) Ta có: $a = 1; b = -2(m+3) \Rightarrow b' = -(m+3); c = m^2 + 3$

$$\Delta' = [-(m+3)]^2 - (m^2 + 3) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6$$

$$\text{Phương trình (4) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 6m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$$

Bài tập tương tự

Tìm m để các phương trình trên có nghiệm kép, có hai nghiệm phân biệt hoặc có nghiệm.

Bài 33. Tìm m để phương trình sau có nghiệm kép:

a) $5x^2 + 2mx - 2m + 5 = 0$ (1)

b) $mx^2 - 4(m-1)x - 8 = 0$ (2)

c) $mx^2 - 100x + m = 0$ (3)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có: $a = 5; b = 2m \Rightarrow b' = m; c = -2m + 5$

$$\Delta' = m^2 - 5(-2m + 5) = m^2 + 10m - 75$$

Phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ m^2 + 10m - 75 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 10m - 75 = 0 \quad (*)$$

Giải phương trình (*) $a = 1; b = 10 \Rightarrow b' = 5; c = -75$

$$\Delta' = 25 + 75 = 100 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 10$$

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 + 10 \\ m = -5 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -15 \end{cases}$$

b) Ta có: $a = m; b = -4(m-1) \Rightarrow b' = -2(m-1); c = -8$

$$\Delta' = [-4(m-1)]^2 - m \cdot (-8) = 4m^2 + 4$$

$$\text{Phương trình (2) có nghiệm kép} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4m^2 + 4 = 0 \end{cases} (*)$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $m^2 \geq 0, \forall m \in R \Rightarrow 4m^2 + 4 > 0, \forall m$.

Vậy không có giá trị m nào để phương trình (2) có nghiệm kép.

c) Ta có: $a = m; b = -100 \Rightarrow b' = -50, c = m$

$$\Delta' = 2500 - m^2$$

Phương trình (3) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2500 - m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 50$

Nhận xét: Với các phương trình đã cho, ta có thể tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 34. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt.

a) $(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$ (1)

b) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (2)

c) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ (3)

d) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 1 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: $a = m+1; b = 4m \Rightarrow b' = 2m; c = 4m - 1$.

$$\Delta' = (2m)^2 - (m+1)(4m-1) = 4m^2 - 4m^2 + m - 4m + 1 = -3m + 1$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ -3m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$$

b) Ta có: $a = 1; b = -2(m+3) \Rightarrow b' = -(m+3); c = m^2 + 3$.

$$\Delta' = [-(m+3)]^2 - (m^2 + 3) = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6$$

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 6m+6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

c) Ta có: $a = 1; b = -2(m-1) \Rightarrow b' = -(m-1) = 1-m; c = m^2$.

$$\Delta' = (1-m)^2 - m^2 = 1 - 2m + m^2 - m^2 = 1 - 2m$$

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1-2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

d) Ta có: $a = 1; b = -2(m+1) \Rightarrow b' = -(m+1); c = m^2 + m - 1$

$$\Delta' = [-(m+1)]^2 - (m^2 + m - 1) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - m + 1 = m + 2$$

Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Bài tập tương tự bài d):

"Tìm m để phương trình (4) có hai nghiệm".

Hướng dẫn: Phương trình (4) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m+2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Ta hãy so sánh với bài toán tương tự bài a):

"Tìm m để phương trình (1) có nghiệm".

Lời giải

Trường hợp 1; $a = m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (*)

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } -4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

Vậy $m = -1$: Phương trình (1) có nghiệm.

Trường hợp 2: $a = m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -3m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \leq \frac{1}{3} \end{cases} (**)$$

Kết hợp (*) và (**), ta có: Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$.

Chú ý: Khi xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ta phải xét đến hệ số a trước hết ví dụ bài toán trên: $a = m+1$. Nếu không xét trường hợp $m+1 = 0$ ta sẽ có kết luận không chính xác.

Bài 35. Tìm m để parabol (P): $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 2m - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), sau đó tìm điều kiện để phương trình có nghiệm kép.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-\frac{1}{4}x^2 = mx - 2m - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4mx - 8m - 4 = 0 (*)$$

Ta có: $a = 1; b = 4m \Rightarrow b' = 2m; c = -8m - 4$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4m^2 + 8m + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Nhận xét: Bài: "Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt" được giải tương tự.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Bài 36. Tìm m để parabol $(P): y = mx^2 (m \neq 0)$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn: Xem bài toán 35.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$mx^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow mx^2 - 2x + 1 = 0(*)$$

Ta có: $a = m; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = 1$

(P) và (d) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Bài 37. Tìm tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 3$.

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (P) và (d) :

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0(*)$$

Ta có: $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = -3$

$$\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-3) = 4 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2$$

$$\text{Vậy } (*) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 \\ x = 1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

*) Với $x = -1$, ta tìm được: $y = 1$.

*) Với $x = 3$, ta tìm được: $y = 9$.

Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A(1;1)$ và $B(3;9)$.

Bài 38. Cho parabol $(P): y = \frac{1}{x}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + m$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt?

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2m = 0 (*)$$

Ta có: $a = 1; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = -2m$.

$$\Delta' = 1 + 2m$$

(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2m > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m > -\frac{1}{2}.$$

Bài 39. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh $|5x + 12y| \leq 13$.

Hướng dẫn: Đặt $m = 5x + 12y \Rightarrow x = \frac{m - 12y}{5}$.

Thế vào biểu thức $x^2 + y^2 = 1$, ta được phương trình bậc hai của y và m là tham số.

Lời giải

Đặt $m = 5x + 12y \Rightarrow x = \frac{m - 12y}{5}$

Thế x vào đẳng thức $x^2 + y^2 = 1$, ta được:

$$\left(\frac{m - 12y}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 169y^2 - 24my + m^2 - 25 = 0 (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow -25m^2 + 4225 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 169 \Leftrightarrow |m| \leq 13$$

hay $|5x + 12y| \leq 13$ (đpcm)

Cách khác: Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$|5x + 12y| \leq \sqrt{5^2 + 12^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ vì } x^2 + y^2 = 1, \text{ nên}$$

$$|5x + 12y| \leq \sqrt{169} \cdot \sqrt{1} \Leftrightarrow |5x + 12y| \leq 13$$

Bài 40. Cho $4x + y = 1$. Chứng minh rằng $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$.

Hướng dẫn: Đặt $m = 4x^2 + y^2$.

Từ $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$, và thế y vào đẳng thức $m = 4x^2 + y^2$. Ta được phương trình bậc hai của x , tham số m . Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm.

Lời giải

Đặt $m = 4x^2 + y^2$.

Từ giả thiết: $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$. Thế y vào đẳng thức trên, ta được:

$$m = 4x^2 + (1 - 4x)^2 \Rightarrow 20x^2 - 8x + 1 - m = 0 (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$.

$$16 - 20(1 - m) \geq 0$$

$$-4 + 20m \geq 0$$

$$m \geq \frac{1}{5} \text{ hay } 4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5} \text{ (đpcm)}$$

☞ HẾT ☞