

Bài 20. ĐỊNH LÝ VI-ET VÀ ỨNG DỤNG**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1) Định lý Vi-et.**

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

2) Áp dụng định lý Vi-et để tính nhanh nghiệm.

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$:

*) Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.

*) Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

3) Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2 - Sx + P = 0$.

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP**I. Biểu thức đối xứng với các nghiệm** ($x_1^2 + x_2^2; x_1^3 + x_2^3; x_1^4 + x_2^4$)

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - x - 10 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và tính $x_1^2 + x_2^2$.

Hướng dẫn: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

Lời giải

Ta có: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Nhận xét:

Ta có $ac < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0$ mà $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 x_2 < 0$.

Vậy khi a và c trái dấu thì phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt và trái dấu (chẳng hạn: $x_1 < 0 < x_2$).

Biểu thức $x_1^2 + x_2^2$ không thay đổi khi ta thay x_1 bởi x_2 và ngược lại, gọi là biểu thức đối xứng của x_1 và x_2 . Bạn cần nhớ một vài công thức sau:

$$S = x_1 + x_2$$

$$\bullet \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

(biểu thị qua tổng và tích các nghiệm)

$$\begin{aligned}
 & \bullet x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) \\
 & = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] \\
 & = S.(S^2 - 3P) = S^3 - 3SP \\
 & \bullet x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 \\
 & = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2 = [S^2 - 2P]^2 - 2P^2 \\
 & \bullet |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\
 & = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\
 & = S^2 - 4P
 \end{aligned}$$

Bài 2. Cho phương trình $2x^2 - 3x - 6 = 0$. Chứng tỏ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Tính $x_1^2 + x_2^2$ và $x_1^3 + x_2^3$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét ở Bài 1.

Lời giải

Ta có: $a = 2; c = -6 \Rightarrow ac = -12 < 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt (trái dấu) $x_1; x_2$. Theo định lí Vi-et, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; x_1x_2 = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-3) = \frac{33}{4}.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \frac{3}{2} \left[\frac{33}{4} - (-3) \right] = \frac{135}{8}$$

$$\text{Cách khác: Ta cũng có: } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot (-3) \cdot \frac{3}{2} = \frac{135}{8}.$$

Bài 3. Cho phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$, với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Chứng minh phương trình có nghiệm.

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -6 \Rightarrow b' = -3$.

$$\Delta' = 9 - 8 = 1 > 0.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt. Theo định lí Vi-et, ta có:

$$x_1 + x_2 = 6(1) \text{ và } x_1 - x_2 = 8(2)$$

$$\text{Vậy } M = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \Leftrightarrow M = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3), ta có: $M = 6^2 - 5.8 = 36 - 40 = -4$

Chú ý: Ta cần chứng tỏ phương trình có nghiệm $x_1; x_2$; sau đó mới áp dụng định lí Vi-et.

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - x + m - 1 = 0$ (*).

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$.

b) Hãy tính $x_1^2 + x_2^2$ theo m .

Hướng dẫn:

*) Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ (không cần hai nghiệm phân biệt).

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Lời giải

a) Phương trình (*) có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5 - 4m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{5}{4}$$

b) Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 - 2(m - 1) = 3 - 2m$$

Bài 5. Theo phương trình $3x^2 + 2x - 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x_1 - x_2)^2$; trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Lời giải

Ta có $a = 3; b = 2; c = -6$

$\Rightarrow a.c = -18 < 0 \Rightarrow$ phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (khác dấu) x_1, x_2 .

Theo định lí Vi-et, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}; x_1x_2 = -2$.

$$\text{Vậy } A = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot (-2) = \frac{76}{9}$$

Nhận xét: Từ kết quả trên, ta có thể tìm được: $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{76}}{3} = \frac{2\sqrt{19}}{3} \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm \frac{2\sqrt{19}}{3}$

Bài 6. Cho phương trình $3x^2 - 7x - 4 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, hãy tính.

a) $A = |x_1 - x_2|$

b) $B = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

Hướng dẫn:

1. Chứng tỏ phương trình có nghiệm.

2. Áp dụng định lí Vi-et, tính:

$$A^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2. \text{ Từ đó tính } A.$$

Lời giải

Ta có: $a = 3; b = -7; c = -4 \Rightarrow a.c = -12 < 0$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo định lí Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-4}{3} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A^2 &= |x_1 - x_2|^2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \\ &= \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{97}{9} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{97}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } B &= \frac{x_1^2 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{-4}{3}\right) \cdot \frac{7}{3}}{\frac{-4}{3}} = -\frac{595}{36}. \end{aligned}$$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Tìm m để phương trình có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Hướng dẫn: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm, áp dụng hệ thức Viète tính $x_1^2 + x_2^2$ qua $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m + 2$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - (m + 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$$

Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m + 2$

$$\text{Vậy } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2(m + 2) = 10 \Leftrightarrow -2m = 10$$

$$\Leftrightarrow m = -5 \text{ (thỏa điều kiện } m \leq -1 \text{)}$$

Đáp số: $m = -5$

Cách khác: Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$. Theo hệ thức Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = m + 2 \text{ (Tương tự cách giải trên):}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow 4 - 2(m + 2) = 10 \Leftrightarrow m = -5$$

Thử lại: Với $m = -5$ ta có phương trình $x^2 - 2x - 3 = 0$

$a = 1; b = -2; c = -3 \Rightarrow ac = -2 < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm.

Chú ý: Vì ta giả sử có nghiệm, để tìm được m , sau đó ta phải thử lại. Nếu làm như cách thứ nhất, ta tìm điều kiện cho phương trình có nghiệm thì không cần thử lại.

Bài 8. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2$ trong đó $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Trước hết phải tìm điều kiện để phương trình có nghiệm sau đó áp dụng hệ thức Viète để tính $x_1^2 + x_2^2$ qua các hệ số.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -2m \Rightarrow b' = -1m; c = 2m - 3$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (-m)^2 - (2m - 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 + 2 \geq 0$$

(luôn đúng với mọi m , vì $(m - 1)^2 \geq 0; \forall m$)

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = 2m - 3$

$$\text{Vậy } A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 2(2m - 3)$$

$$= 4m^2 - 4m + 6 = 4m^2 - 4m + 1 + 5$$

$$= (2m - 1)^2 + 5 \geq 5; \forall m \text{ (vì } (2m - 1)^2 \geq 0, \forall m \text{)}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Chú ý: Nếu ta không đặt điều kiện phương trình có nghiệm thì vẫn đúng đáp số, nhưng lời giải như vậy chưa chính xác.

II. Biểu thức không đối xứng với các nghiệm

Bài 9. Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$

Hướng dẫn: Biểu thức $3x_1 + 2x_2$ gọi là không đối xứng. Áp dụng hệ thức Viète, tính

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \text{ Ta có hệ phương trình, từ đó tìm được } m$$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = 2 \Rightarrow b' = 1; c = m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$$

Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = -2$ và $x_1 x_2 = m$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

(hệ hai ẩn bậc nhất đối với x_1 và x_2)

Thế $x_1 = 5$ và $x_2 = -7$ vào phương trình $x_1 x_2 = m$, ta có:

$$m = 5 \cdot (-7) = -35 \text{ (thỏa điều kiện } m \leq 1 \text{)}$$

Đáp số: $m = -35$

Bài 10. Tìm m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$

Hướng dẫn: Xem lời giải Bài 9.

Lời giải

Ta có: $a = 1; b = -4 \Rightarrow b' = -2; c = m$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 4 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 4$$

Theo hệ thức viète, ta có $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1 x_2 = m$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ (thỏa điều kiện $m \leq 4$)

III. Tính nhẩm các nghiệm của phương trình bậc hai

Bài 11. Giải phương trình:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ (1)

b) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ (2)

c) $mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0$ (3)

d) $(1 - 2m)x^2 + (2m + 1)x - 2 = 0$ (4)

Hướng dẫn:

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$.

• Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$.

Lời giải

a) Ta có $a = 2; b = -5; c = 3 \Rightarrow a + b + c = 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2}$.

b) Ta có $a = 1; b = -(1 + \sqrt{2}); c = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow a + b + c = 1 - (1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}$

c) Ta có $a = m; b = -2(m+1); c = m + 2$

$a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Ta nhận thấy:

$$a + b + c = m - 2(m + 1) + m + 2 = 0$$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{m+2}{m} \quad (m \neq 0)$.

$$m = 0 \quad (3) \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$d) \text{ Ta có } a = 1 - 2m; b = 2m + 1; c = -2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0 = 1 - 2m + 2m + 1 - 2 = 0$$

Vậy phương trình (4) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -\frac{2}{1-2m}$.

$$\left(a \neq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2} \right)$$

Bài 12. Giải phương trình:

$$a) x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0 \quad (1)$$

$$b) mx^2 + 2(m+1)x + m + 2 = 0 \quad (m \neq 0) \quad (2)$$

$$c) (5 + \sqrt{2})x^2 - (\sqrt{2} - 5)x - 10 = 0 \quad (3)$$

Hướng dẫn: Xem hướng dẫn Bài 11.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } a = 1; b = 2m; c = 2m - 1 \Rightarrow a - b + c = 0 = 1 - 2m + 2m - 1 = 0$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{(2m-1)}{1}$.

$$b) \text{ Ta có } a = m; b = 2(m+1); c = m + 2$$

$$\Rightarrow a - b + c = 0 = m - 2(m+1) + m + 2 = 0$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = \frac{-(m+2)}{m} \quad (m \neq 0)$.

$$c) \text{ Ta có } a = 5 + \sqrt{2}; b = \sqrt{2} - 5; c = -10$$

$$\Rightarrow a - b + c = 0 = 5 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 5) - 10 = 0$$

Vậy phương trình (3) có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = \frac{10}{5 + \sqrt{2}}$.

IV. Xét dấu các nghiệm

Ta cần nhớ kết quả như sau:

$$\text{Phương trình } ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Hai nghiệm trái dấu: $(x_1 < 0 < x_2) \Leftrightarrow ac < 0$.

$$\text{Hai nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Hai nghiệm phân biệt dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

Bài 13. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu:

$$x^2 + 4x + m = 0$$

Hướng dẫn: Xét $ac < 0 \Leftrightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 \geq 0$.

Vậy $\Delta > 0$. Lại có $ac < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow x_1 x_2 < 0$

Vậy hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = 4; c = m$

Phương trình sau có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Nhận xét: Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m > 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Bài 14. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt dương

$$x^2 - 2x + m = 0$$

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -2 \Rightarrow b' = -1; c = m$

Vậy $\Delta' = 1 - m$

Phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ m > 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$$

Bài 15. Tìm m để phương trình $x^2 - 3x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ và thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

Hướng dẫn: $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 1 - 1 < x_2 - 1$

$$\Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$$

Vậy $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu.

Lời giải

Ta có $a = 1; b = -3; c = m - 1$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 - 1$ và $x_2 - 1$ trái dấu khi và chỉ khi.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(m - 1) > 0 & (1) \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$. Với điều kiện $m < \frac{13}{4}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$x_1 + x_2 = 3; x_1 x_2 = m - 1$$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow (m - 1) - 3 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Kết hợp $m < 3$ và $m < \frac{13}{4} \Rightarrow m < 3$

Cách khác: Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ thế t vào phương trình đã cho, ta có:

$$(t + 1)^2 - 3(t + 1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t + m - 3 = 0 (*)$$

Điều kiện $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 < x_2 - 1$.

Khi đó, gọi $t_1 = x_1 - 1; t_2 = x_2 - 1$ là hai nghiệm của phương trình (*).

Vậy $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$

Nhân xét: - Cách thứ hai, gọi là đặt ẩn phụ; ta không phải tìm điều kiện: $\Delta > 0$!

Bạn hãy tự giải. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2$ hoặc $x_1 < x_2 < 1$.

Bài 16. Tìm m để phương trình $x^2 + (2 - m)x + 1 = 0$ có nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $-1 < x_1 < x_2$.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp đặt ẩn phụ. $-1 < x_1 < x_2$ hay $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$

Lời giải

Đặt $t = x + 1$ suy ra $x = t - 1$. Thế x vào phương trình đã cho, ta được:

$$(t - 1)^2 + (2 - m)(t - 1) + 1 = 0 \text{ hay } t^2 - mt + m = 0 (*)$$

Ta có $a = 1; b = -m; c = m$.

Điều kiện $-1 < x_1 < x_2$ hay $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$

Đặt $t_1 = x_1 + 1; t_2 = x_2 + 1$, ta đưa về bài toán. Tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn:

$$0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-4) > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

Cách khác:

$$*) -1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \end{cases}$$

Bài toán tương tự với điều kiện $x_1 < -1 < x_2$; $x_1 < x_2 < -1$.

Bài 17. Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 5m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1 \leq x_2 < 3$.

Hướng dẫn: Đặt ẩn phụ $t = x_1 - 3 \leq x_2 - 3 < 0$. Vậy $x_1 - 3$ và $x_2 - 3$ đều cùng âm.

Lời giải

Cách giải thứ nhất.

Đặt $t = x - 3$ suy ra $x = t + 3$. Thế x vào phương trình đã cho, ta được:

$$(t+3)^2 - 2(m-1)(t+3) + 5m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2(2-m)t + 4 - m = 0 \quad (*)$$

Gọi t_1 ; t_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Điều kiện $x_1 \leq x_2 < 3 \Leftrightarrow x_1 - 3 \leq x_2 - 3 < 0 \Leftrightarrow t_1 \leq t_2 < 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m \geq 0 \\ 4 - m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-3) \geq 0 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$$

Với $\begin{cases} m \geq 3 \\ m < 2 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Với $\begin{cases} m \leq 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$

Vậy $m \leq 0$.

Cách giải thứ hai: Xét phương trình đã cho: Ta có $x_1 \leq x_2 < 3 \Leftrightarrow x_1 - 3 \leq x_2 - 3 < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (x_2 - 3)(x_2 - 3) > 0 \\ (x_1 - 3) + (x_2 - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 - 6 < 0 \end{cases}$$

Với $x_1 + x_2 = 2m + 2$; $x_1 x_2 = 5m + 1$: $\Delta' = m^2 - 3m$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} m^2 - 3m \geq 0 \\ 5m + 1 - 3(2m + 2) + 9 > 0 \\ 2m + 2 - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m - 3) \geq 0 \\ 4 - m > 0 \\ 2m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} m \leq 0 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

$$\text{Với } \begin{cases} m \geq 3 \\ m < 4 \text{ (vô nghiệm)} \\ m < 2 \end{cases}$$

Vậy $m \leq 0$

V. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Bài 18. Tìm hai số u và v biết $u + v = 1$ và $u \cdot v = -2$.

Hướng dẫn: Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là nghiệm phương trình bậc hai $x^2 - Sx + P = 0$.

Lời giải

Hai số u ; v cần tìm là hai nghiệm phương trình: $x^2 - 1 \cdot x - 2 = 0$ (*)

Ta có: $a = 1$; $b = -1$; $c = -2$. Suy ra $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$.

Phương trình (*) có hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$.

Vậy hai số cần tìm: $u = -1$; $v = 2$ hoặc $u = 2$; $v = -1$.

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán sau: "Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là -1 và 2 ."

Lời giải

Ta có $(-1) + 2 = 1 = S$ và $(-1) \cdot 2 = -2 = P$.

Vậy -1 và 2 là nghiệm của phương trình bậc hai sau đây: $x^2 - 1 \cdot x - 2 = 0$ hay $x^2 - x - 2 = 0$

Bài toán tương tự.

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 3 và -5 .

Lời giải

Ta có: $3 + (-5) = -2 = S$ và $3 \cdot (-5) = -15 = P$.

Vậy 3 và -5 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2x - 15 = 0$.

(Ta cần nhớ phương trình dạng $x^2 - Sx + P = 0$ nên phương trình trên có dạng:
 $x^2 - (-2)x - 15 = 0$.)

Cách khác: $x = -5$ hoặc $x = 3$ là nghiệm phương trình $x + 5 = 0$ hoặc $x - 3 = 0$.

Suy ra $(x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 5x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

Bài 19. Tìm hai số u , v ; biết $u + v = 12$; $uv = 28$ và $u > v$.

Lời giải

Hai số u ; v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 12x + 28 = 0$ (*)

Ta có: $a = 1$; $b = -12 \Rightarrow b' = -6$; $c = 28$.

$$\Delta' = (-6)^2 - 1 \cdot 28 = 8 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Nên phương trình (*) có nghiệm $x = 6 + 2\sqrt{2}$; $x = 6 - 2\sqrt{2}$.

Vậy hai số cần tìm: $u = 6 + 2\sqrt{2}$; $v = 6 - 2\sqrt{2}$ hoặc $u = 6 - 2\sqrt{2}$; $v = 6 + 2\sqrt{2}$.

Bài 20. Cho phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 .

Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

Hướng dẫn: Xem nhận xét sau Bài 18.

Lời giải

Ta có: $a = 1$; $c = -3$ suy ra $ac = -3 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm (trái dấu) x_1 ; x_2 suy ra $x_1 + x_2 = -1$; $x_1 \cdot x_2 = -3$.

Mặt khác: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{3}$.

Vậy $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ hay $3x^2 - x - 1 = 0$

Bài 21. Cho phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 . Lập phương trình có hai nghiệm là $-x_1$ và $-x_2$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 + mx - 5 = 0$, ta có: $a = 1$; $b = m$; $c = -5 \Rightarrow ac = -5 < 0$ suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt (trái dấu). x_1 ; x_2 .

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 + x_2 = -m$; $x_1 x_2 = -5$.

Mặt khác: $(-x_1) + (-x_2) = -(x_1 + x_2) = m$; $(-x_1)(-x_2) = x_1 x_2 = -5$

Vậy $-x_1$ và $-x_2$ là hai nghiệm phương trình $x^2 - mx - 5 = 0$.

Bài 22. Tìm m để hai phương trình sau tương đương: $x^2 + mx - 2 = 0$ và $x^2 - 2x + m = 0$ có tập hợp nghiệm trùng nhau.

Hướng dẫn:

1. Hai phương trình bậc hai cùng vô nghiệm hoặc:
2. Hai phương trình bậc hai cùng có nghiệm và tổng; tích hai nghiệm của từng phương trình phải bằng nhau.

Lời giải

Phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ có hệ số $a = 1$ và $c = -2$ suy ra $ac < 0$, nên phương trình này không thể vô nghiệm, mà sẽ có hai nghiệm x_1 ; x_2 .

Tương tự:

Gọi $x'_1 + x'_2$ là hai nghiệm phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ với điều kiện $\Delta' = 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$

Gọi $S_2 = x'_1 + x'_2 = 2$; $P_2 = x'_1 \cdot x'_2 = m$.

$$\text{Vậy hai phương trình tương đương khi và chỉ khi: } \begin{cases} m \leq 1 \\ S_1 = S_2 \\ P_1 = P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ -m = 2 \\ -2 = m \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Bài toán tương tự.

Tìm m để phương trình sau tương đương: $x^2 + 2x - 3 = 0$ (1) và $2x^2 + mx - 6 = 0$ (2).

Lời giải

Phương trình (1) có a ; c trái dấu nên luôn có hai nghiệm x_1 ; x_2

$$\text{Suy ra } S_1 = x_1 + x_2 = -2; P_1 = x_1 x_2 = -3$$

Tương tự: Phương trình (2) cũng luôn có hai nghiệm x_3 và x_4

$$\text{Suy ra } S_2 = x_3 + x_4 = -\frac{m}{2}; P_2 = x_3 x_4 = -3.$$

$$\text{Hai phương trình tương đương} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 \\ P_1 = P_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -\frac{m}{2} \\ -3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

VI. Phân tích thành nhân tử

Bài 23. Tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 . Chứng minh: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Lời giải

Ta có: x_1 ; x_2 là nghiệm của tam thức $ax^2 + bx + c$ có nghĩa là phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 ; x_2 .

$$\text{Theo định lí Viète: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Khi đó vế phải được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_2 x - x_1 x + x_1 x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] \\ &= a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = ax^2 + bx + c \quad (\text{Đpcm}). \end{aligned}$$

Áp dụng: Phân tích đa thức $x^2 - 3x + 2$ thành nhân tử.

Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a = 1$; $b = -3$; $c = 2$.

Suy ra $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

$$\text{Vậy } x^2 - 3x + 2 = 1 \cdot (x - 1)(x - 2).$$

Bài 24. Rút gọn phân thức: $P = \frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1}$

Hướng dẫn: Phân tích các tam thức ở tử số và mẫu số thành nhân tử.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 9x + 8 = 0$, ta có: $a = 1$; $b = -9$; $c = 8$.

Suy ra $a + b + c = 1 - 9 + 8 = 0$ suy ra phương trình có hai nghiệm: $x_1 = 1$; $x_2 = 8$.

$$\text{Vậy } x^2 - 9x + 8 = 1 \cdot (x - 1)(x - 8).$$

Tương tự: $2x^2 - 3x + 1 = 2 \cdot (x-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1)$.

Điều kiện: $x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$.

Vậy $\frac{x^2 - 9x + 8}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(x-1)(x-8)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{x-8}{2x-1}$.

Bài 25. Rút gọn phân thức: $P = \frac{\sqrt{x}-1}{x-5\sqrt{x}+6}$

Hướng dẫn: Đặt $a = \sqrt{x}$; $a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$. Rút gọn phân thức theo a .

Lời giải

Đặt $a = \sqrt{x}$, $a \geq 0 \Rightarrow x = a^2$.

Ta có: $P = \frac{a-1}{a^2-5a+6}$

Xét phương trình $a^2 - 5a + 6 = 0$; phương trình hai nghiệm: $a_1 = 1$ và $a_2 = 6$.

suy ra $a^2 - 5a + 6 = 1 \cdot (a-1)(a-6) = (a-1)(a-6)$

Vậy $P = \frac{a-1}{(a-1)(a-6)} = \frac{1}{a-6}$ ($a \neq 1$; $a \neq 6$)

Thay $a = \sqrt{x}$ suy ra $P = \frac{1}{\sqrt{x}-6}$.

VII. Biết một nghiệm của phương trình, tìm nghiệm còn lại

Bài 26. Chứng tỏ phương trình $3x^2 + 2x - 21 = 0$ có một nghiệm là -3 .

Tìm nghiệm kia.

Hướng dẫn: Thay $x = -3$ vào phương trình.

Dùng hệ thức: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm x_2 ($x_1 = -3$) (hoặc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$).

Lời giải

Thay $x = -3$ vào phương trình đã cho, ta có

$$3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 21 = 0 \Leftrightarrow 27 - 6 - 21 = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $x = -3$ là một nghiệm của phương trình.

Đặt $x_1 = -3$, nghiệm còn lại là x_2 .

Theo hệ thức Viète, ta có: $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-21}{3} = -7$

Với $x_1 = -3 \Rightarrow (-3) \cdot x_2 = -7 \Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}$.

Cách khác: Theo hệ thức Viète:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ với } x_1 = -3 \Rightarrow (-3) + x_2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{3}.$$

Bài 27. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có một nghiệm là 2. Tìm nghiệm còn lại.

Hướng dẫn: Xem Bài 26.

Lời giải

Thay $x = 2$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$4 - 4m + m - 1 = 0 \Rightarrow -3m = -3 \Rightarrow m = 1$$

Với $m = 1$, phương trình trở thành: $x^2 - 2x = 0$.

$$\Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

Nghiệm còn lại là $x = 0$.

Cách khác: Tương tự, ta có $m = 1$. Đặt $x_1 = 2$.

Theo hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow 2 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 0$.

(Cũng có thể tìm x_2 nhờ hệ thức $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$).

Bài 28. Cho phương trình $4x^2 + 3x + 3m - m^2 = n$ có một nghiệm $x_1 = -2$. Tìm x_2 và m .

Hướng dẫn: Dùng hệ thức Viète: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ để tìm x_2 ; dùng hệ thức $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ để tìm m .

Lời giải

Theo hệ thức Viète, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{3}{4} \text{ và } x_1 = -2 \Rightarrow -2 + x_2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Lại theo hệ thức Viète: } x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m - m^2}{4}; x_1 = -2; x_2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3m - m^2}{4} = (-2) \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow m^2 - 3m - 10 = 0.$$

Tính nhẩm: $a = 1; c = -10 \Rightarrow ac < 0$, phương trình có nghiệm trái dấu (m_1 và m_2).

$$\text{Ta có: } m_1 m_2 = -10 = (-2) \cdot 5 = 2 \cdot (-5) = 1 \cdot (-10) = (-1) \cdot 10.$$

Vì $m_1 + m_2 = 3$. Vậy ta lấy $m_1 = -2; m_2 = 5$.

$$\text{Đáp số: } x_2 = \frac{5}{4}; m_1 = -2 \text{ (hoặc } m_2 = 5 \text{)}.$$

☞ HẾT ☞