

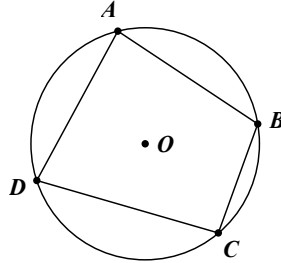
CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

BÀI 29. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Định nghĩa

Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (hoặc đơn giản là tứ giác nội tiếp) và đường tròn được gọi là ngoại tiếp tứ giác.



II. Tính chất

- Định lí: Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180°

III. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông

Hình chữ nhật và hình vuông là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính toán

Bài toán 1. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo của các góc còn lại của tứ giác trong mỗi trường hợp sau:

a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 60^\circ$

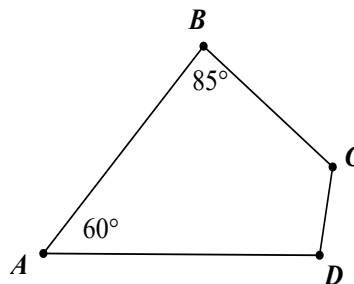
b) $\hat{A} = 70^\circ, \hat{B} = 90^\circ$

c) $\hat{A} = 100^\circ, \hat{B} = 60^\circ$

d) $\hat{A} = 100^\circ, \hat{B} = 80^\circ$

Lời giải

a) (Xem hình vẽ)



Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$

Hay $60^\circ + \hat{C} = 180^\circ$

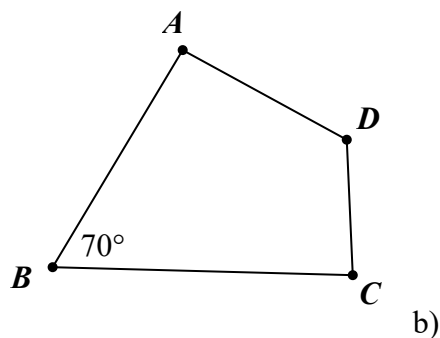
$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Tương tự: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

$\Rightarrow \hat{D} = 180^\circ - \hat{B}$

$= 180^\circ - 85^\circ$

$= 95^\circ$



Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{C} \\ &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tổng tời: } \hat{B} + \hat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{D} &= 180^\circ - \hat{B} \\ &= 180^\circ - 70^\circ \\ &= 110^\circ\end{aligned}$$

c) Bạn tự vẽ hình

Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - \hat{C} \\ &= 180^\circ - 100^\circ \\ &= 80^\circ\end{aligned}$$

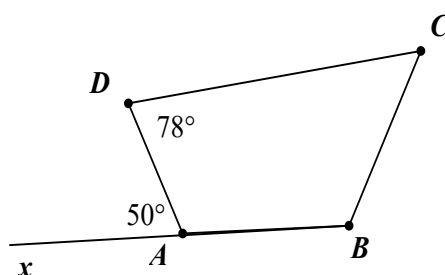
$$\begin{aligned}\text{Tổng tời: } \hat{B} + \hat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{D} &= 180^\circ - \hat{B} \\ &= 180^\circ - 60^\circ \\ &= 120^\circ\end{aligned}$$

d) Đáp số: $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Bài toán 2. Tính số đo các góc B và C của tứ giác ABCD trong hình vẽ. Biết tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn.

Lời giải



$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \widehat{BAD} &= 180^\circ - \widehat{DAx} \text{ (kề bù)} \\ &= 180^\circ - 50^\circ \\ &= 130^\circ\end{aligned}$$

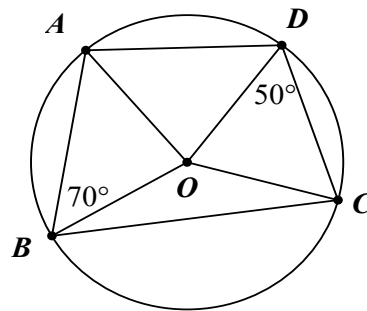
Ta có $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{C} &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \\ &= 180^\circ - 130^\circ \\ &= 50^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Tổng tổi: } \widehat{B} + \widehat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{B} &= 180^\circ - \widehat{D} \\ &= 180^\circ - 78^\circ \\ &= 102^\circ\end{aligned}$$

Bài toán 3. Bức tranh treo tường có vẽ một tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O (hình vẽ). Cho biết $\widehat{ABC} = 70^\circ, \widehat{ODC} = 50^\circ$. Tìm góc AOD .

Lời giải



Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

$$\text{Nên } \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{ADC} = \widehat{ADO} + \widehat{ODC}$$

$$\begin{aligned}\widehat{ADO} &= \widehat{ADC} - \widehat{ODC} \\ &= 110^\circ - 50^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

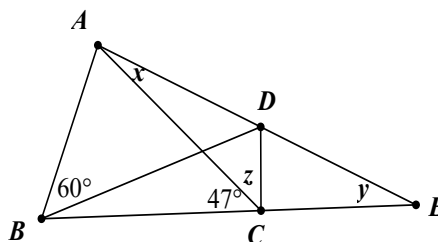
Tam giác AOD cân tại O có $\widehat{ADO} = 60^\circ$ (cmt) suy ra $\widehat{DAO} = 60^\circ$

$$\widehat{AOD} = 180^\circ - 2.60^\circ = 60^\circ$$

$$\text{Vậy } \widehat{AOD} = 60^\circ$$

Bài toán 4. Trong hình vẽ $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Tính số đo các góc x, y, z .

Lời giải



$$\text{Ta có : } \widehat{ADC} + \widehat{CDE} = 180^\circ \text{ (kề bù)}$$

$$\begin{aligned}\widehat{ADC} &= 180^\circ - \widehat{CDE} \\ &= 180^\circ - 70^\circ \\ &= 110^\circ\end{aligned}$$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$

$$\begin{aligned}\widehat{ABC} &= 180^\circ - \widehat{ADC} \\ &= 180^\circ - 110^\circ \\ &= 70^\circ\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$$

$$\begin{aligned}(\widehat{DBC} &= \widehat{ABC} - \widehat{ABD} \\ &= 70^\circ - 50^\circ \\ &= 20^\circ\end{aligned}$$

Bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn $\widehat{CAD} = \widehat{DBC} = 20^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD).

Vậy $x = 20^\circ$

Ta lại có $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACD}$ là hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 50^\circ \text{ hay } z = 50^\circ.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 47^\circ + 50^\circ = 97^\circ$$

Mà $(\widehat{BCD} + \widehat{DCE} = 180^\circ \text{ (kề bù)})$

$$\widehat{DCE} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - 97^\circ = 83^\circ$$

Xét tam giác DCE , ta có :

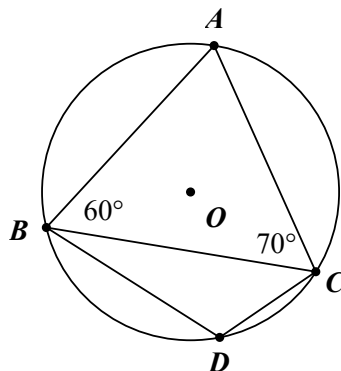
$$\widehat{DCE} + \widehat{CED} + \widehat{CDE} = 180^\circ \text{ hay } 83^\circ + 70^\circ + \widehat{CED} = 180^\circ$$

$$\widehat{CED} = 180^\circ - (83^\circ + 70^\circ) = 27^\circ$$

Vậy $y = 27^\circ$.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) thỏa mãn $\widehat{ABC} = 60^\circ, \widehat{ACB} = 70^\circ$. Giả sử D là điểm thuộc cung BC không chứa A . Tính số đo góc BDC .

Lời giải



Xét tam giác ABC , ta có:

$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

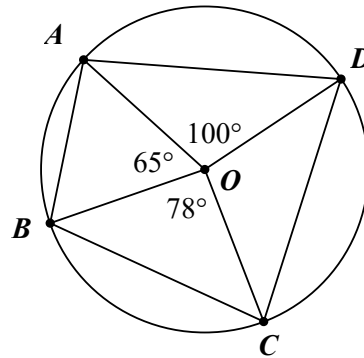
$$\begin{aligned}\widehat{BAC} &= 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &= 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) \\ &= 50^\circ\end{aligned}$$

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên: $\widehat{BDC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$$\widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

Bài toán 6. Tính số đo các góc của tứ giác nội tiếp $ABCD$ trong hình vẽ

Lời giải



Tam giác AOB cân tại O

$$\widehat{AOB} = \widehat{OBA} = \frac{180^\circ - 65^\circ}{2} = 57,5^\circ$$

Tương tự tam giác BOC cân tại O

$$\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \frac{180^\circ - 78^\circ}{2} = 51^\circ$$

$$\text{Do đó } \widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} = 57,5^\circ + 51^\circ = 108,5^\circ$$

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 108,5^\circ = 71,5^\circ$$

Lại có tam giác AOD cân tại O

$$\text{Nên } \widehat{OAD} = \widehat{ODA} = \frac{180^\circ - 106^\circ}{2} = 37^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{BAD} = \widehat{OAB} + \widehat{OAD} = 57,5^\circ + 37^\circ = 94,5^\circ$$

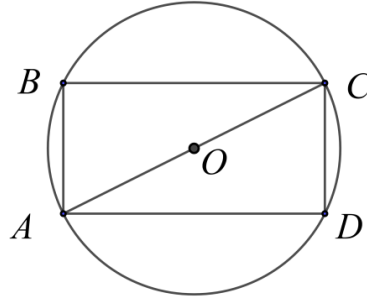
Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180^\circ$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - 94,5^\circ = 85,5^\circ.$$

Bài toán 7. Tính diện tích của một hình chữ nhật, biết rằng hình chữ nhật đó có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2,5 cm

Hướng dẫn: Hình chữ nhật $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp có tâm là giao điểm hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải



Ta có AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $AC = 2.2,5 = 5(\text{cm})$

Gọi chiều rộng hình chữ nhật là x thì chiều dài hình chữ nhật là $2x$

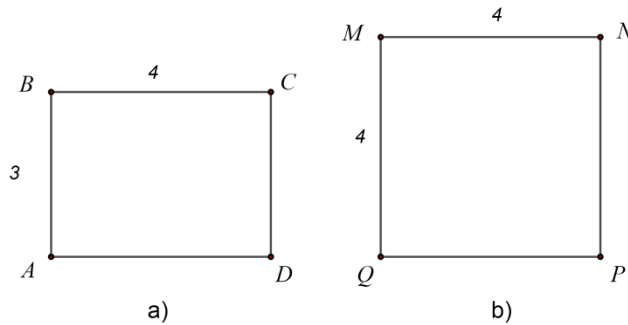
Xét tam giác ABC vuông tại B . Theo định lí Pythagore; ta có:

$$x^2 + (2x)^2 = 5^2 \Rightarrow 5x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}(\text{cm})$$

Vậy chiều rộng hình chữ nhật là $\sqrt{5}(\text{cm})$ và chiều dài là $2\sqrt{5}(\text{cm})$

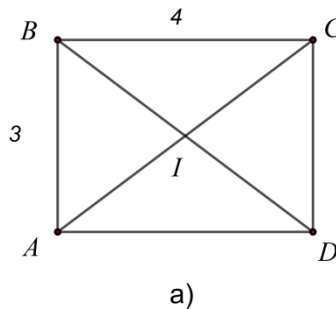
Do đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $\sqrt{5}.2\sqrt{5} = 10(\text{cm}^2)$

Bài toán 8. Xác định tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật và hình vuông trong hình vẽ.



Lời giải

(Xem hình vẽ a).



Gọi I là giao điểm của hai đường chéo $AC; BD$ của hình chữ nhật $ACBD$ nên I là trung điểm của AC .

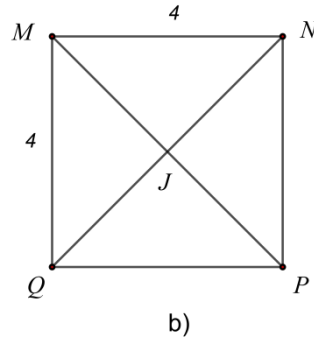
Tam giác ABC vuông tại B . Theo định lí Pythagore; ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật có tâm I (là trung điểm của AC) và bán kính

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

(Xem hình vẽ b).



Gọi J là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $MNPQ$ nên J là trung điểm của QN .

Tam giác QMN vuông tại M . Theo định lý Pythagore; ta có: $QN^2 = QM^2 + MN^2 = 4^2 + 4^2$

$$\Rightarrow QN = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp hình vuông có tâm J (là trung điểm của QN) và bán kính

$$R = \frac{QN}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Tổng quát: Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài toán 9. Cho đường tròn tâm O có bán kính $R=5$ cm

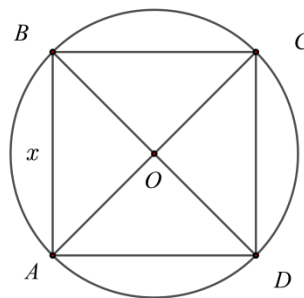
a) Tính độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp trong (O) .

b) Một hình chữ nhật nội tiếp trong (O) có chu vi (O) . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó

Hướng dẫn: Hình vuông và hình chữ nhật là các tứ giác nội tiếp. Đường tròn ngoại tiếp của chúng có tâm là giao điểm của hai đường chéo và bán kính bằng một nửa độ dài đường chéo.

Lời giải

a) (Xem hình vẽ).



Gọi hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O; 5 \text{ cm})$ là $ABCD$

Ta có : $AC = 2.R = 2.5 = 10(\text{cm})$

Gọi cạnh hình vuông là x . Theo định lý Pythagore, ta có:

$$x^2 + x^2 = AC^2$$

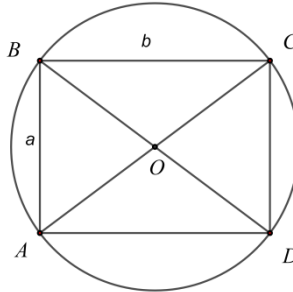
$$2x^2 = 10^2$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Vậy cạnh hình vuông nội tiếp trong đường tròn $(O; 5\text{ cm})$ bằng $5\sqrt{2}$

b) (Xem hình vẽ)



Gọi chiều dài a , chiều rộng b .

Ta có chu vi hình chữ nhật $2(a+b)=28$

Nửa chu vi $a+b=14$

Tam giác ABC vuông tại B . Theo định lý Pythagore; ta có:

$$a^2 + b^2 = AC^2$$

$$a^2 + b^2 = 10^2$$

$$a^2 + b^2 = 100$$

Theo bài ra, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a+b=14 & (1) \\ a^2+b^2=100 & (2) \end{cases} \quad (a>b>0)$$

Từ (1) suy ra $b=14-a$ (*)

Thế (*) vào (2), ta có:

$$a^2 + (14-a)^2 = 100$$

$$a^2 + (196 - 28a + a^2) = 100$$

$$2a^2 - 28a + 196 - 100 = 0$$

$$a^2 - 14a + 48 = 0$$

$$a^2 - 8a - 6a + 48 = 0$$

$$a(a-8) - 6(a-8) = 0$$

$$(a-8)(a-6) = 0$$

$$a-8=0 \text{ hoặc } a-6=0$$

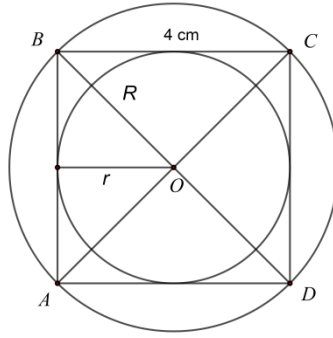
$$a=8 \Rightarrow b=14-8=6 \text{ (vì } a>b)$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 8 cm và chiều rộng là 6 cm.

Bài toán 10. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. Tính chu vi; diện tích của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

Hướng dẫn: Cần tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp

Lời giải



Dễ thấy bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (cm)}$

Chu vi đường tròn nội tiếp hình vuông $P_1 = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \text{ (cm)}$

Diện tích đường tròn nội tiếp hình vuông $S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ có $ABCD$ là đường kính.

Xét tam giác ABC vuông tại B . Theo định lý Pythagore; ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow R = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

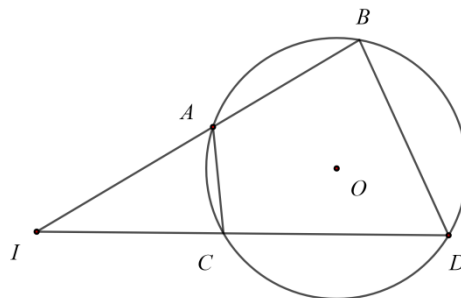
Chu vi đường tròn ngoại tiếp hình vuông $P_2 = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi \text{ (cm)}$

Diện tích đường tròn ngoại tiếp hình vuông $S_2 = \pi R^2 = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

II. Chứng minh

Bài toán 11. Cho điểm I nằm ngoài đường tròn (O) . Qua I kẻ hai đường thẳng lần lượt cắt (O) tại bốn điểm $A; B; C; D$ sao cho A nằm giữa B và I ; C nằm giữa D và I . Chứng minh rằng $\widehat{IBD} = \widehat{ICA}$; $\widehat{IAC} = \widehat{IDB}$ và $IA \cdot IB = IC \cdot ID$

Lời giải



Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) nên $\widehat{IBD} + \widehat{ACD} = 180^\circ$

Mà $\widehat{ICA} + \widehat{ACD} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{IBD} = \widehat{ICA}.$$

Chứng minh tương tự ta có : $\widehat{IDB} = \widehat{IAC}$

Xét $\triangle IAC$ và $\triangle IDB$ có:

$$\widehat{IDB} = \widehat{IAC} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{IBD} = \widehat{ICA} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle IAC \sim \triangle IDB$ (g-g)

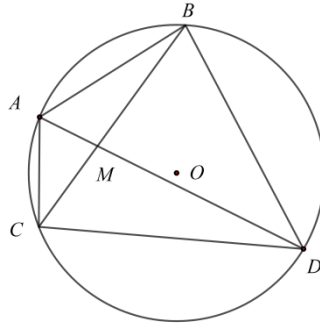
$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB} \Rightarrow IA \cdot IB = IC \cdot ID$$

Bài toán 12. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

b) AC cắt BD tại M . Chứng minh rằng: $MA \cdot MC = MB \cdot MD$.

Lời giải



a) Ta có : Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O)

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BC của đường tròn (O)).

b) Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có:

$$\widehat{AMB} = \widehat{CMD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC} \text{ (cm ý a)}$$

Vậy $\triangle MAB \sim \triangle MDC$ (g-g)

$$\text{Suy ra } \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} \text{ Hay } MA \cdot MC = MB \cdot MD \text{ (đpcm)}$$

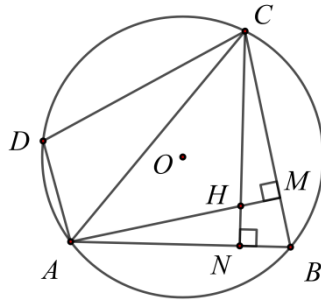
Bài toán 13. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có tam giác ABC là tam giác nhọn. Hai đường cao AM và CN của tam giác ABC cắt nhau tại H (Hình vẽ). Chứng minh:

$$\text{a) } \widehat{MHN} + \widehat{ABC} = 180^\circ;$$

$$\text{b) } \widehat{AHC} = \widehat{ADC}$$

$$\text{c) } \widehat{ADC} = \widehat{BAM} + 90^\circ$$

Lời giải



a) Xét tứ giác $HMBN$ có:

$$\widehat{HMN} + \widehat{HNB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{MHN} + \widehat{ABC} = 180^\circ \quad (1)$$

b) Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MHN} = \widehat{ADC}$ mà $\widehat{MHN} = \widehat{AHC}$ (đối đỉnh)

$$\text{Do đó } \widehat{AHC} = \widehat{ADC}$$

c) Xét tam giác AMB vuông tại M , ta có:

$$\widehat{MAB} + \widehat{ABC} + 90^\circ = 180^\circ \quad (\text{Định lý tổng ba góc trong tam giác})$$

$$\Rightarrow \widehat{MAB} + 90^\circ = 180^\circ - \widehat{ABC} \quad (*)$$

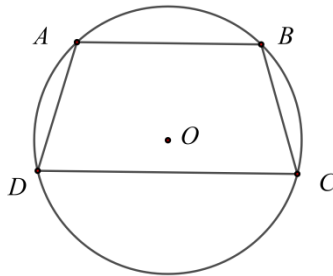
Lại có $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{BAM} + 90^\circ$

Bài toán 14. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) nội tiếp đường tròn. Chứng minh hình thang $ABCD$ là hình thang cân

Lời giải



Xét hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ nên $\widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 180^\circ \quad (1)$ (cặp góc trong cùng phía)

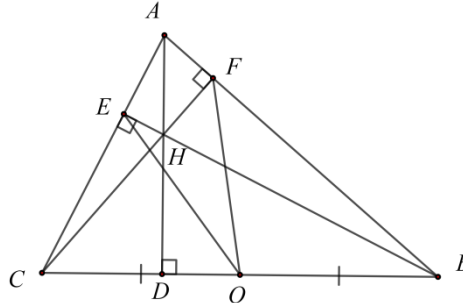
Vì $ABCD$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{DCB}$

Xét hình thang $ABCD$ có $\widehat{ADC} = \widehat{DCB}$ nên hình thang $ABCD$ là hình thang cân (hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau).

Bài toán 15. Cho tam giác ABC có các đường cao $AD; BE; CF$. Chứng minh rằng các tứ giác $BCEF$; $CAFD$; $ABDE$ là những tứ giác nội tiếp.

Lời giải



Gọi O là trung điểm BC .

Xét tam giác BCF vuông tại F (gt) có FO là đường trung tuyến nên $FO = \frac{BC}{2}$ hay $FO = CO = BO$.

Chúng tỏ $B; F; C$ thuộc đường tròn (O)

Chứng minh tương tự ta cũng có $EO = CO = BO$ nên ba điểm $B; E; C$ thuộc đường tròn (O)

Do đó bốn điểm $B; F; C; E$ thuộc đường tròn (O) hay tứ giác $BCEF$ nội tiếp

Hai trường hợp còn lại chứng minh tương tự

Bài toán 16. Cho tam giác nhọn ABC có $AD; BE; CF$ là đường cao và H là trực tâm. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $AEHF$; $BDHF$; $CDHF$ là các tứ giác nội tiếp.

b) DA là đường phân giác của góc FDE .

Lời giải

a) Ta có $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự, ta có các tứ giác $BDHF$ và $CDHF$ nội tiếp.

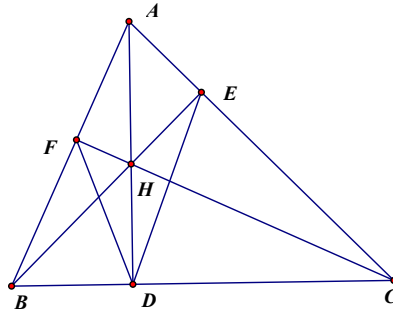
b) Xét tứ giác $BDHF$ nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{FBH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FH)

Tương tự với tứ giác nội tiếp $CDHE$, ta có $\widehat{HDE} = \widehat{HCE}$

mà $\widehat{FBH} = \widehat{HCE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$)

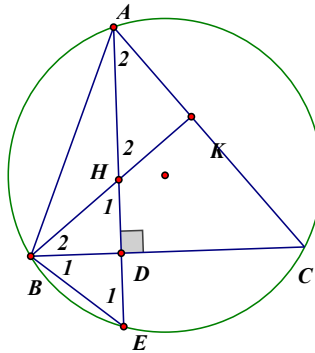
$\Rightarrow \widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, chứng tỏ AD là đường phân giác của góc FDE



Bài toán 17. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AD cắt đường tròn (O) tại E . Trên AD lấy H sao cho D là trung điểm của EH , BH cắt AC tại K . Chứng minh tứ giác $HKCD$ nội tiếp.

Hướng dẫn: Ta đưa về câu a, bài toán 16 bằng cách chứng minh $\widehat{BKC} = 90^\circ$.

Lời giải



Dễ thấy $\triangle BDE = \triangle BDH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ và $\widehat{E_1} = \widehat{H_1}$.

$\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh)

$\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

mà $\widehat{B_1} + \widehat{E_1} = 90^\circ$ (do $\widehat{BDE} = 90^\circ$ (gt))

$\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{H_2} = 90^\circ$

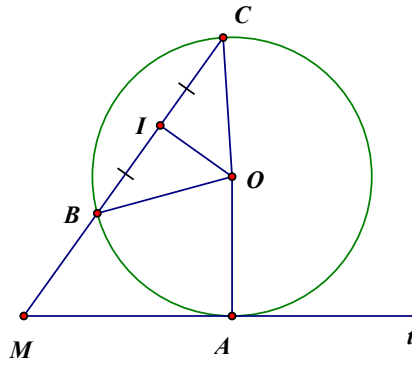
Trong $\triangle AHK \Rightarrow \widehat{AKH} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HKC} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{HKC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$

Do tứ giác $HKCD$ nội tiếp

Bài toán 18. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ cát tuyến MBC và tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A . Gọi I là trung điểm của dây BC . Chứng minh $AMIO$ là một tứ giác nội tiếp.



Lời giải

Để thấy $\triangle BOC$ cân tại O , có OI là trung tuyến (gt) nên OI đồng thời là đường cao, nên $OI \perp BC$.

Mặt khác tiếp tuyến Mt tiếp xúc với (O) tại A nên $OA \perp Mt$.

Xét tứ giác $AMIO$ có $\widehat{MAO} + \widehat{MIO} = 180^\circ$. Nên $AMIO$ là một tứ giác nội tiếp.

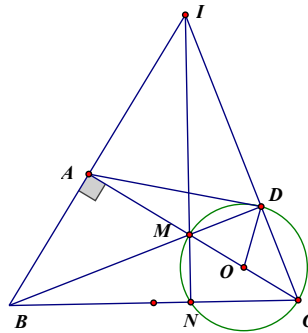
Bài toán 19. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy điểm M bất kì trên đoạn AC , đường tròn đường kính CM cắt hai đường thẳng BM và BC lần lượt tại D và N . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

b) Các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm.

Hướng dẫn: câu b cho hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm, chứng minh đường thứ ba đi qua điểm đó.

Lời giải



a) Gọi O là tâm đường tròn đường kính CM .

Ta có $DO = MO = CO$ hay $DO = \frac{MC}{2}$.

Chứng tỏ $\triangle MDC$ là tam giác vuông tại D .

Xét tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAM} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (cmt) nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn đường kính BC hay tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

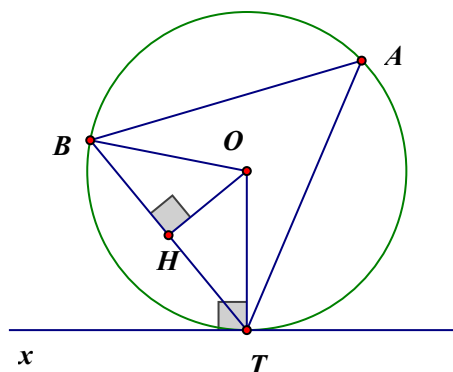
b) Gọi giao điểm của hai đường thẳng AB và CD là I , ta có M là trực tâm của $\triangle BIC$ nên IM là đường cao thứ ba $\Rightarrow IM \perp BC$.

$\Rightarrow IM$ và IN phải trùng nhau hay ba điểm I, M, N thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng AB, MN, CD cùng đi qua một điểm I .

Bài toán 20. Trong một đường tròn. Chứng minh rằng góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Lời giải



Kẻ $OH \perp TB$. Tam giác BOT cân tại O nên đường cao OH đồng thời là đường phân giác
hay $\widehat{BOH} = \widehat{HOT} = \frac{1}{2} \widehat{BOT}$. Lại có $\widehat{BAT} = \frac{1}{2} \widehat{BOT}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng
chắn một cung)

$$\Rightarrow \widehat{HOT} = \widehat{BAT} \quad (1)$$

ΔOHT vuông tại H , ta có $\widehat{HOT} + \widehat{OTB} = 90^\circ$

Lại có $\widehat{OTB} + \widehat{BTx} = 90^\circ$ (do Tx là tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \widehat{HOT} = \widehat{BTx} \quad (2)$$

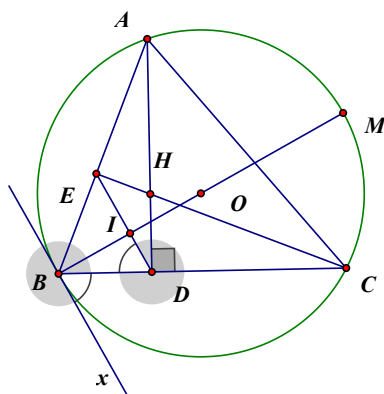
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{BTx}$ ($\widehat{BTx}$ là góc giữa tiếp tuyến một dây và một dây chắn cung BT , $\widehat{BAT}$ là góc nội tiếp chắn cung BT)

Kết luận: Trong một đường tròn, góc giữa tiếp tuyến một dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Ghi chú: Kết luận của bài toán 20 này sẽ dùng để chứng minh cho các bài toán khác và chúng ta xem là một định lí trong hình học.

Bài toán 21. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) , các đường cao AD và CE cắt nhau tại H . BO cắt DE tại I và cắt đường tròn (O) tại M . Chứng minh rằng tứ giác $DIMC$ nội tiếp.

Hướng dẫn: Dùng kết quả của câu a, bài toán 16 và bài toán 20.



Lời giải

Ta có $\widehat{AEC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác $AEDC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EDC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{EDC} + \widehat{EDB} = 180^\circ \text{ (kề bù)} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDE} \quad (1)$$

Kẻ tiếp tuyến Bx với đường tròn (O) ta có $\widehat{CBx} = \widehat{BAC}$ (2) (góc giữa tiếp tuyến một dây và một dây chắn cung và góc nội tiếp chắn cung BC)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{CBx} \Rightarrow Bx \parallel ED$ (cặp góc so le trong bằng nhau)

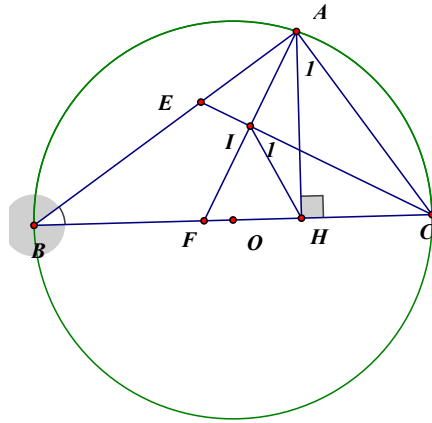
mà $Bx \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\Rightarrow DE \perp OB \text{ hay } \widehat{DIM} = 90^\circ$$

Dễ thấy $\widehat{BCM} = 90^\circ$ (do BM là đường kính) $\Rightarrow \widehat{DIM} + \widehat{BCM} = 180^\circ$

Chứng tỏ tứ giác $DIMC$ nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°)

Bài toán 22. Cho $\triangle ABC$ ($AB > AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính BC . Vẽ đường cao AH của tam giác. Trên cạnh BC lấy F ($F \neq O$) sao cho $CF = CA$. Vẽ $CI \perp AF$ tại I và CI cắt cạnh AB tại E . Chứng minh rằng tứ giác $AIHC$ và $BEIH$ nội tiếp.



Lời giải

Dễ thấy tứ giác $AIHC$ nội tiếp ($\widehat{AIC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{I_1} \quad (1) \text{ (góc nội tiếp chắn cung } HC \text{)}$$

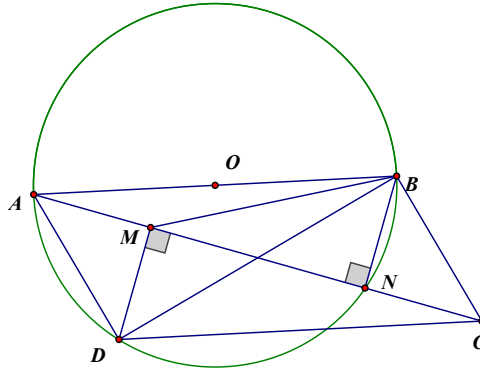
Lại có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (BC là đường kính) hay $\widehat{BAH} + \widehat{A_1} = 90^\circ$

$$\text{mà } \widehat{BAH} + \widehat{B} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{I_1}$ mà $\widehat{I_1} + \widehat{EIH} = 180^\circ$ (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{EIH} = 180^\circ. \text{ Chứng tỏ tứ giác } BEIH \text{ nội tiếp}$$

Bài toán 23. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB . Kẻ DM và BN cùng vuông góc với đường chéo AC . Chứng minh tứ giác $CBMD$ nội tiếp.



Lời giải

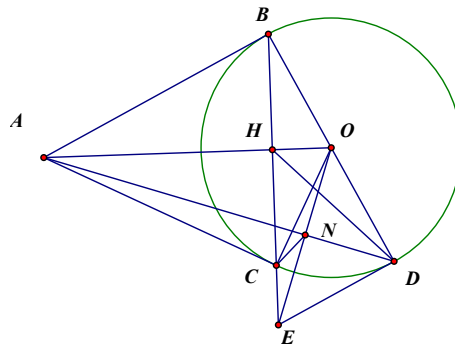
Nối B với D , ta có $\triangle ADB$ vuông tại D (AB là đường kính) hay $AD \perp BD$.

mà $AD \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$ hay $\widehat{DBC} = \widehat{DMC} = 90^\circ$.

Hai đỉnh M, B cùng nhìn DC dưới hai góc bằng nhau cùng bằng 90° nên tứ giác $CBMD$ nội tiếp.

Bài toán 24. Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Vẽ đường kính BD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại D của (O) cắt đường thẳng BC ở E , OE cắt AD ở N . Chứng minh tứ giác $AONC$ nội tiếp.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AO và BC , ta có $OA = OC = (R)$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên OA là đường trung trực của đoạn BC hay $OA \perp BC$ tại H . Xét $\triangle ACO$ vuông tại C (tính chất tiếp tuyến) và $\triangle CHO$ vuông tại H (cmt) có $\widehat{OAC}$ chung

$$\Rightarrow \triangle ACO \sim \triangle CHO (g - g) \Rightarrow \frac{OC}{OH} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow OC^2 = OH.OA$$

$$\text{Mà } OD = OC (= R) \Rightarrow OD^2 = OH.OA \quad (1)$$

Xét $\triangle AOD$ và $\triangle DOH$, có $\widehat{AOD}$ chung và (1)

$$\Rightarrow \triangle AOD \sim \triangle DOH (c - g - c) \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{ODH} \quad (2)$$

Lại có tứ giác $OHED$ nội tiếp ($\widehat{OHE} + \widehat{ODE} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OEH} \quad (3) \quad (\text{góc nội tiếp cùng chắn cung } HO)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \widehat{OAD} = \widehat{OEH} \text{ mà } \widehat{OEH} + \widehat{EOH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAD} + \widehat{EOH} = 90^\circ.$$

Xét $\triangle AON$, ta có $\widehat{ANO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$

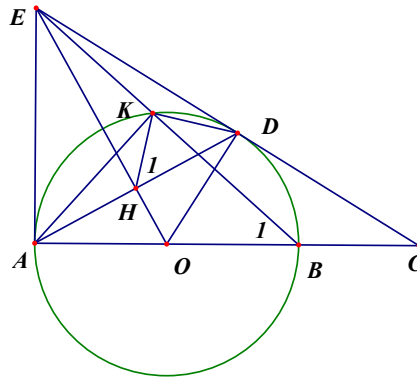
Do đó tứ giác $AONC$ nội tiếp

Bài toán 25. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tia đối của tia BA lấy điểm C (C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyến CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E . Gọi H là giao điểm của AD và OE , K là giao điểm của BE và đường tròn (O) (K không trùng với B).

a) Chứng minh: $AE^2 = AK.EB$

b) Chứng minh: tứ giác $BOHK$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AKB} = 90^\circ$ (vì AB là đường kính) $\Rightarrow \triangle AKE$ vuông tại K .

Lại có $\triangle ABE$ vuông tại A (tính chất tiếp tuyến).

Xét $\triangle AKE$ và $\triangle EAB$, có $\widehat{AEK}$ chung

$\Rightarrow \triangle AKE \sim \triangle EAB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{EB}{AE} \Rightarrow AE^2 = EK.EB \quad (1) \quad (\text{đpcm})$$

b) Dễ thấy EO là đường trung trực của AD hay $EO \perp AD$ tại H . Xét $\triangle EHA$ và $\triangle EAO$ có: $\widehat{EHA} = \widehat{EAO} = 90^\circ$; $\widehat{AEH}$ chung. Do đó $\triangle EHA \sim \triangle EAO$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{EH} = \frac{EO}{AE} \Rightarrow AE^2 = EH.EO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EK.EB = EH.EO$

$\Rightarrow \triangle EHK \sim \triangle EBO$ (c - g - c)

$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{B_1}$ mà $\widehat{H_1} + \widehat{KHO} = 180^\circ$ (kề bù)

$\widehat{B_1} + \widehat{KHO} = 180^\circ$

Chứng tỏ tứ giác $BOHK$ nội tiếp

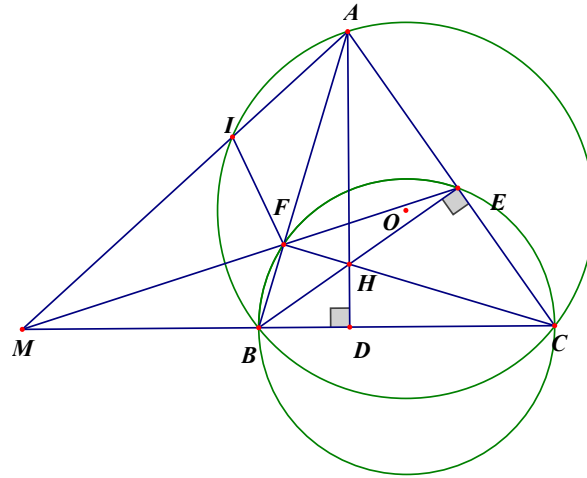
Nhận xét: Trong bài toán 6 có cát tuyến qua E trong đó có cát tuyến đi qua tâm của đường tròn (O) . Nếu cả hai cùng không đi qua tâm (O) ta có bài toán phức tạp hơn.

Bài toán 26. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) ba đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AFHE$ nội tiếp. Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AFHE$.

b) Gọi M là giao điểm của EF và CB và AM cắt đường tròn (O) tại I . Chứng minh tứ giác $AEFI$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ$

Do đó tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn tâm là trung điểm của AH và đường kính là AH .

b) Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt) $\Rightarrow BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MCE}$
 $\Rightarrow \Delta MFB \sim \Delta MCE$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{MF}{MC} = \frac{MB}{ME} \Rightarrow MF \cdot ME = MC \cdot MB \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có : $MC \cdot MB = MI \cdot MA$ (2) (vì 4 điểm A, I, B, C thuộc (O))

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MF \cdot ME = MI \cdot MA$

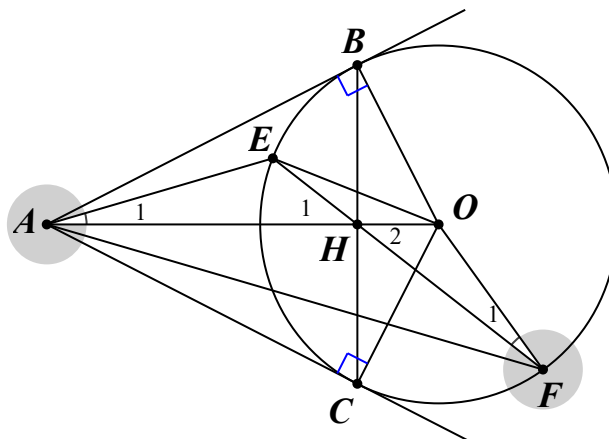
$$\Rightarrow \Delta MIF \sim \Delta MEA$$

Vậy tứ giác $AEFI$ nội tiếp

Bài toán 27. Từ điểm A bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC , EF là một dây cung đi qua H . Chứng minh tứ giác $AEOF$ nội tiếp.

Lời giải

Lời giải



Dễ thấy OA là đường trung trực của BC hay $OA \perp BC$ tại H .

Ta có $\triangle ABO$ vuông tại B (tính chất tiếp tuyến)

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BHO$ có:

$\widehat{AHB} = \widehat{BHO} = 90^\circ, \widehat{ABH} = \widehat{BOH}$ (góc giữa tiếp tuyến một dây và góc ở tâm cùng chắn một cung BC).

Do đó $\triangle AHB \sim \triangle BHO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HB}{HO} \Rightarrow HB^2 = HO \cdot HA$$

Mà $HB = HC$ nên $HO \cdot HA = HB \cdot HC$ (1)

Dễ thấy $\triangle EHB \sim \triangle CHF$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{HE} = \frac{HF}{HC} \Rightarrow HB \cdot HC = HE \cdot HF$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HO \cdot HA = HE \cdot HF$

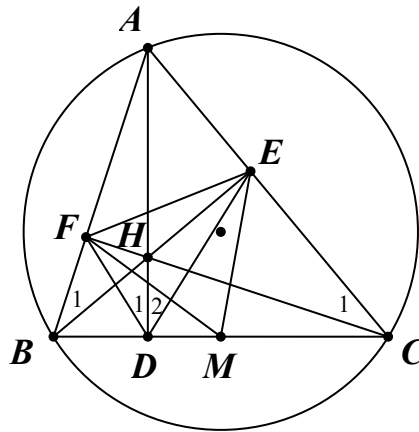
Xét $\triangle HEA$ và $\triangle FOH$ có $\widehat{H_1} = \widehat{H_2}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \triangle FOH \sim \triangle HEA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{F_1}.$$

Hai đỉnh A và D nhìn E, O dưới một góc bằng nhau nên tứ giác $ADEO$ nội tiếp.

Bài toán 28. Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi H là giao điểm của ba đường cao AD, BE, CF . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh tứ giác $EFDM$ nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy các tứ giác $AFHE, AFDC$ nội tiếp:

Tứ giác $AFHE$ có: $\widehat{BAD} = \widehat{BEF}$ (cùng chắn cung FH) (1)

Lại có M là trung điểm BC ; $\triangle BEC$ vuông có trung tuyến ứng với cạnh huyền EM

$$\Rightarrow \triangle BME \text{ cân} \Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{EBC}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{FEM}$

Lại có tứ giác $AFDC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{FDB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ tứ giác $FEDM$ nội tiếp.

Cách khác:

Ta có $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 180^\circ.$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEHF$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác $BFHD$ và $CEHD$.

Cũng là những tứ giác nội tiếp lại có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt) nên $BFEC$ nội tiếp.

Xét đường tròn tâm M bán kính $\frac{BC}{2}$ đi qua 4 điểm B, F, E, C ta có $2\widehat{B_1} = \widehat{FME}$ (1) (góc nội tiếp và góc ở tâm) và $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EF)

Tương tự xét đường tròn đi qua 4 điểm B, F, H, D ta có $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FH).

Tương tự với đường tròn đi qua 4 điểm C, E, H, D , ta có $\widehat{C_1} = \widehat{D_2}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HE).

$$\Rightarrow \widehat{FDE} = 2\widehat{B_1} \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{FME} = \widehat{FDE}$. Hai đỉnh M và D cùng nhìn hai đỉnh E, F còn lại dưới 1 góc bằng nhau nên tứ giác $EFDM$ nội tiếp.

Nhận xét:

* Bài toán trên đây là bài toán thu hẹp của bài toán đường tròn Ôle hay vòng tròn 9 điểm mà chúng ta đã có dịp làm quen trong §3. GÓC NỘI TIẾP, ở đây trong 4 đỉnh của tứ giác đã có 3 đỉnh là chân 3 đường cao và 1 đỉnh là trung điểm của một cạnh của tam giác, trong trường hợp này nếu ta đưa về cách giải của bài toán "Đường tròn Ô le" thì có phần phức tạp hơn.

* Mặt khác: Nếu chúng ta kẻ đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm và cắt đường thẳng BC thì ta lại có một tứ giác nội tiếp khác mà hai đỉnh vẫn là một chân đường cao với trung điểm và hai đỉnh kia là giao của đường thẳng EF với đường tròn (O) . Chúng ta hãy đưa về bài toán sau.

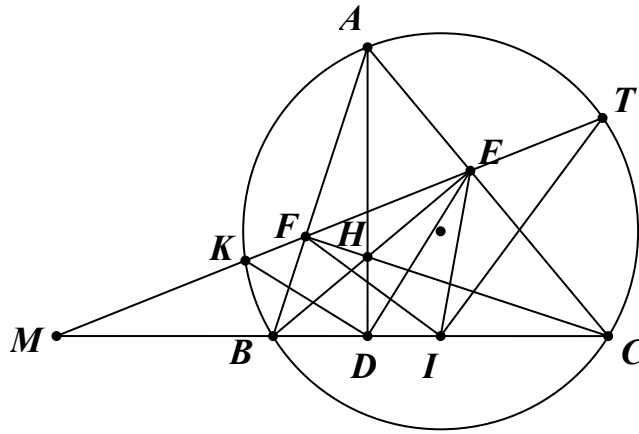
Bài toán 29. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $BFEC$ nội tiếp, xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường tròn (O) tại K và T (K nằm giữa M và T). Chứng minh rằng: $MK.MT = ME.MF$.

c) Chứng minh tứ giác $KTID$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ (gt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm I là trung điểm của BC và bán kính $\frac{BC}{2}$.

b) Xét đường tròn (I) ta có $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung FB).

$$\Rightarrow \triangle MEB \sim \triangle MCF \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{ME}{MC} = \frac{MB}{MF} \Rightarrow ME \cdot MF = MB \cdot MC$$

Chứng minh tương tự với đường tròn (O) ta có: $MB \cdot MC = MK \cdot MT$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow MK \cdot MT = ME \cdot MF$$

c) Dễ thấy tứ giác $HECD$ nội tiếp ($\widehat{HEC} + \widehat{HDC} = 180^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{HCD} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } HD \text{)}.$$

Lại có $BFEC$ nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{HCD} = \widehat{FEB} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } FB \text{)}.$$

$$\Rightarrow \widehat{HED} = \widehat{FEB} (= \widehat{HCD})$$

Lại có $\widehat{BIF} = 2\widehat{FCB}$ (góc ở tâm đường tròn (I) và góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

$$\Rightarrow \widehat{BIF} = \widehat{MED} \Rightarrow \triangle MIF \sim \triangle MED \text{ (g.g.)}$$

$$\Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{MF}{MD} \Rightarrow MI \cdot MD = ME \cdot MF$$

$$\text{Từ (2), (4)} \Rightarrow MI \cdot MD = MK \cdot MT$$

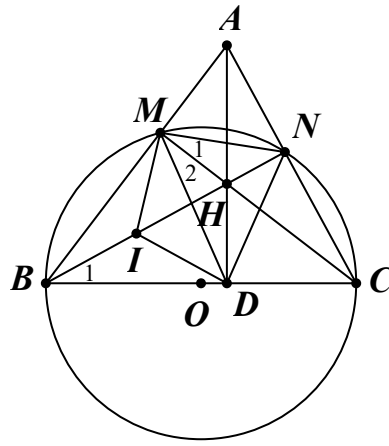
Do đó $\triangle MDK \sim \triangle MTI$ (c.g.c).

$$\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{MTI} \Rightarrow \text{Tứ giác } KTID \text{ nội tiếp.}$$

Nhận xét: Cũng nói về đường tròn O le ta hãy xét bài toán tương tự sau, trong đó 3 điểm là chân ba đường cao và điểm còn lại là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm đến đỉnh.

Bài toán 30. Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$), đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC tại M và N , CM cắt BN tại H , AH cắt BC tại D . Gọi I là trung điểm của HB . Chứng minh tứ giác $MNDI$ nội tiếp.

Lời giải



Dễ thấy các tứ giác sau đây nội tiếp $BMHO, BMNC$.

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{M_1} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } NC \text{)}.$$

$$\text{Tương tự } \widehat{B_2} = \widehat{M_2} \text{ (chắn cung } HD \text{)}$$

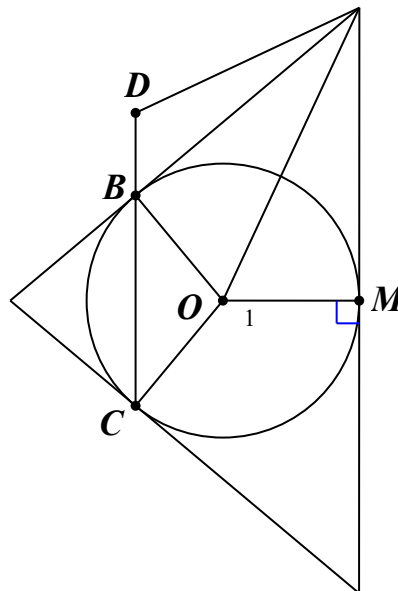
$$I \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác } BMHD \Rightarrow \widehat{HID} = 2\widehat{B_1} \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm).}$$

$$\text{Mà } \widehat{NMD} = \widehat{M_1} + \widehat{M_2} \text{ mà } \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{HID} = \widehat{NMD}$$

Hai đỉnh M, I cùng nhìn N, D dưới 1 góc bằng nhau nên tứ giác $MNDI$ nội tiếp.

Bài toán 31. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên tia đối của tia BC lấy D . Gọi E là giao điểm của DO và AC . Qua E kẻ tiếp tuyến thứ hai, tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB ở K . Chứng minh rằng 4 điểm B, D, K, O cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Gọi M là điểm tiếp xúc của KE với (O) ta có $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và $\widehat{MBC} = \widehat{M_1}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp) mà $\widehat{MBC} + \widehat{MBD} = 180^\circ$ (kề bù).

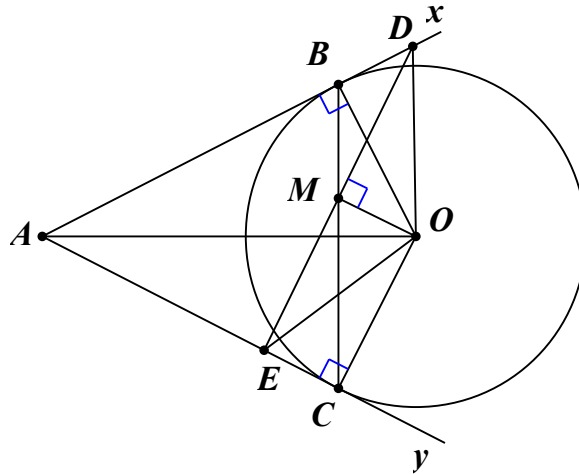
$$\text{Tương tự } \widehat{M_1} + \widehat{MOD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{MOD}.$$

Hai đỉnh B và O cùng nhìn hai đỉnh còn lại M, D dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm M, O, B, D cùng thuộc 1 đường tròn.

Dễ thấy tứ giác $MOBK$ nội tiếp $\Rightarrow B, D, K, O$ cùng thuộc 1 đường tròn đi qua 3 điểm B, K, O .

Bài toán 32. Cho góc $\widehat{xAy}$ và đường tròn (O) tiếp xúc với Ax và Ay tại B và C . Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M (khác B và C). Đường thẳng vuông góc với OM tại M cắt Ax, Ay lần lượt tại D và E . Chứng minh các điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



$Ax \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OBD} = 90^\circ$.

$\widehat{DMO} = 90^\circ$ (gt) nên tứ giác $OMBD$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OBM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OM của đường tròn qua O, M, B, D).

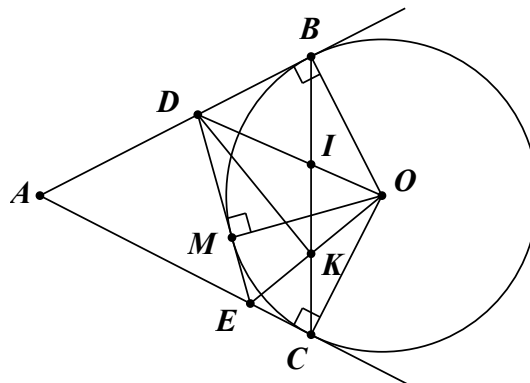
Ta lại có tứ giác $ABOC$ nội tiếp nên $\widehat{OBM} = \widehat{OAC}$.

$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OAC}$ hay $\widehat{ODE} = \widehat{OAE}$

Vì A, D ở cùng phía đối với EO nên A và D nằm trên một cung chứa góc $\frac{1}{2}\widehat{xAy}$ dựng trên OE hay A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài toán 33. Cho đường tròn (O) . Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến AB, AC . Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ BC . Tiếp tuyến tại M cắt AB, AC lần lượt ở D và E . Gọi I và K lần lượt là giao điểm OD, OE với BC . Chứng minh rằng tứ giác $OBDK$ nội tiếp.

Lời giải



Để thấy tứ giác $ABOC$ nội tiếp (vì $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$ tính chất tiếp tuyến)
 $\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BOC} = 180^\circ$. Do đó $\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{A}$.

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OD, OE lần lượt là phân giác của hai góc kề $\widehat{BOM}$ và $\widehat{MOC}$.

$$\text{Nên } \widehat{DOC} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

Mặt khác: $\triangle ABC$ cân ($AB = AC$)

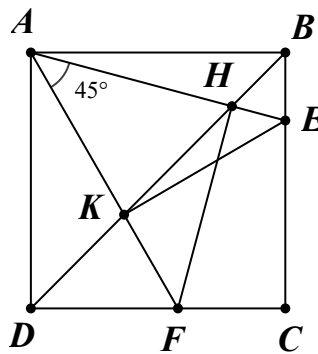
$$\text{Nên } \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{DOE} = \widehat{ABC}$ hay $\widehat{DOK} = \widehat{DBK}$.

Do đó bốn điểm O, B, K, D cùng nằm trên một đường tròn, hay tứ giác $OB DK$ nội tiếp.

Bài toán 34. Trên các cạnh BC và CD của hình vuông $ABCD$ lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{EAF} = 45^\circ$. Các đoạn thẳng AE, AF cắt BD theo thứ tự ở H và K . Chứng minh tứ giác $EHKF$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có $\widehat{EAF} = \widehat{BDC} = 45^\circ$.

Hai điểm A và D ở cùng phía với HF nên AD thuộc cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn HF .
 Hay bốn điểm A, D, F, H cùng thuộc một đường tròn nên tứ giác $ADFH$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{ADF} + \widehat{AHF} = 180^\circ \text{ mà } \widehat{ADF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FHE} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{FKE} = 90^\circ$.

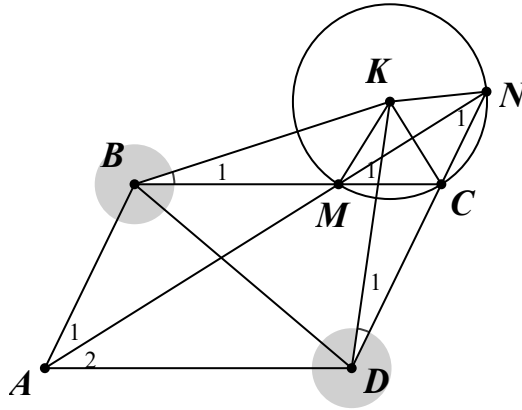
Do đó $EHKF$ là tứ giác nội tiếp.

Bài toán 35. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc A nhọn ($AB < AD$). Các phân giác của góc BAD cắt BC tại M và cắt DC tại N . Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCN .

a) Chứng minh $DN = BC$ và CK vuông góc với MN .

b) Chứng minh tứ giác $BKCD$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $AB \parallel CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (so le trong) mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (gt)

$\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{N_1}$. Do đó $\triangle AND$ cân tại D

$$\Rightarrow \begin{cases} DN = DA \\ DA = BC \end{cases} \Rightarrow DN = BC$$

Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{M_1}$ (đồng vị)

$$\widehat{A_2} = \widehat{N_1} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{N_1} \text{ hay } \triangle MCN \text{ cân tại } C \Rightarrow CM = CN$$

Lại có $KM = KN (= R)$ (R là bán kính của đường tròn (K)).

Do đó CK là đường trung trực của $MN \Rightarrow CK \perp MN$.

b) Dễ thấy $\triangle KNC = \triangle KMC$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{CNK} = \widehat{CMK} \text{ (góc tương ứng) hay } \widehat{DNK} = \widehat{CMK} \text{ (1)}$$

Lại có $\triangle MKC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{MCK}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{DNK} = \widehat{MCK}$.

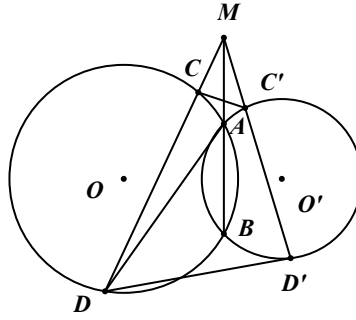
Xét $\triangle BKC$ và $\triangle DKN$ có $BC = DN$ (cmt), $\widehat{BCK} = \widehat{DNK}$ (cmt)

$$KC = KN (= R).$$

Do đó $\triangle BKC = \triangle DKN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ hai đỉnh B, D cùng nhìn CK dưới hai góc bằng nhau nên tứ giác $BKCD$ nội tiếp.

Bài toán 36. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Gọi M là điểm tùy ý trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB . Vẽ qua M hai cát tuyến MCD và $MC'D'$ với (O') và (O) . Chứng minh tứ giác $CDD'C'$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{CDA} = \widehat{CBM}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$).

Do đó $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD.$$

Chứng minh tương tự:

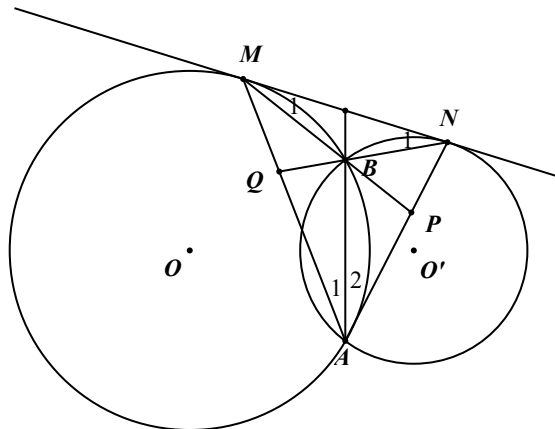
$$MA \cdot MB = MC' \cdot MD' \Rightarrow MC \cdot MD = MC' \cdot MD'$$

Do đó $\triangle MCC' \sim \triangle MDD'$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{MCC'} = \widehat{MD'D}$.

Vậy tứ giác $CDD'C'$ nội tiếp.

Bài toán 37. Cho đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm A và B , và O, O' về hai phía của dây chung AB . Vẽ tiếp tuyến chung MN sao cho $M \in (O)$ và $N \in (O')$ đường thẳng AB cắt MN tại I (B nằm giữa A và I). Đường thẳng MA cắt đường thẳng NB tại Q , đường thẳng NA cắt đường thẳng MB tại P . Chứng minh tứ giác $APBQ$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{A_1}$ (1) (góc giữa tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp cùng chắn cung MB).

Tương tự $\widehat{N_1} = \widehat{A_1}$ (2).

Xét $\triangle MBM$ có $\widehat{M_1} + \widehat{MBN} + \widehat{N_1} = 180^\circ$ (3)

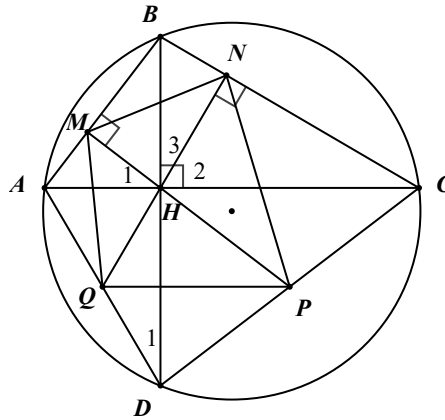
mà $\widehat{MBN} = \widehat{QBP}$ (đối đỉnh) (4)

$\Rightarrow$ Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{QBP} + \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $APBQ$ nội tiếp.

Bài toán 38. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H . (H không trùng với tâm của đường tròn). Gọi M, N lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H xuống các đường thẳng AB, BC , P và Q theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng MH, NH với các đường thẳng CD và AD . Chứng minh rằng PQ và AC song song với nhau và 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



Ta có $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{CD}$).

$\widehat{CBD} = \widehat{H}_2$ (cùng phụ với $\widehat{H}_3$)

$\widehat{H}_2 = \widehat{H}_1$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{H}_1$

$AC \perp BD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{H}_1 + \widehat{H}_4 = 90^\circ$

$\widehat{D}_1 = \widehat{CAD} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{H}_4 = \widehat{D} \Rightarrow \Delta HQD$ cân tại $Q \Rightarrow QH = QD$

Lại có ΔAQH cân tại $Q \Rightarrow QH = QA$

$\Rightarrow QA = QD$

Chứng minh tương tự ta có $PD = PC$.

Do đó QP là đường trung bình $\Delta ADC \Rightarrow QP \parallel AC$

$\Rightarrow \widehat{NQP} = \widehat{H}_1$ (so le trong)

$\widehat{H}_1 = \widehat{CAD}$; $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{NQP} = \widehat{CBD}$ (1)

Xét tứ giác $BNHM$ có $\widehat{BNH} + \widehat{BMH} = 180^\circ \Rightarrow BNHM$ nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{NBH} = \widehat{NMH}$ hay $\widehat{CBD} = \widehat{NMP}$

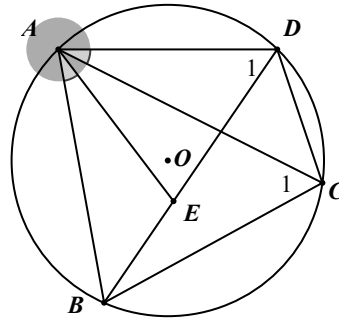
Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{NQP} = \widehat{NMP}$. Hai đỉnh M và Q cùng nhìn 2 đỉnh còn lại NP dưới hai góc bằng nhau nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn.

Bài toán 39. Chứng minh rằng trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối.

Định lý: Ptô-lê-mê (Plolê-mê nhà toán học Hy Lạp).

Hướng dẫn: Điều phải chứng minh: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Lời giải



Vẽ tia AE hợp với tia AB một góc $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ (cách vẽ)

$\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp chắn cung AD)

$$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

$$\Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad (1)$$

Lại có $\widehat{BAE} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{A_1} = \widehat{CAD} + \widehat{A_1}$

hay $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AED$ có $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

và $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ (cmt)

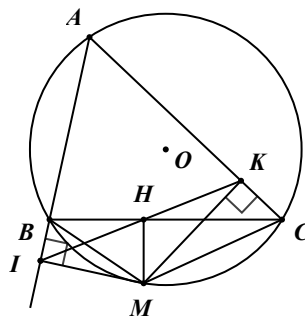
$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AED \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot DE = AC(BE + DE) = AC \cdot BD$$

Bài toán 40. Từ một điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp của một tam giác kẻ các đường vuông góc xuống ba cạnh của tam giác thì chân ba đường vuông góc đó thẳng hàng (Đường thẳng Sin Sơn).

Lời giải



Gọi chân ba đường vuông góc kẻ từ M đến ba cạnh AB, BC, AC lần lượt là I, H, K .

$$\text{Ta có: } \widehat{MIB} = \widehat{MHB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MIB} + \widehat{MHB} = 180^\circ$$

Do đó $MIBH$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IHM} = \widehat{IBM} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } MI \text{)}$$

Lại có bốn điểm $ABMC$ cùng thuộc đường tròn (hay tứ giác $ABMC$ nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{ACM}$$

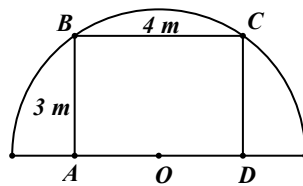
Dễ thấy tứ giác $MHKC$ nội tiếp vì $\widehat{MHK} = \widehat{NKC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{ACM} + \widehat{MHK} = 180^\circ. \text{ Mà } \widehat{ACM} = \widehat{IBM} = \widehat{IHM} \text{ (cmt)}$$

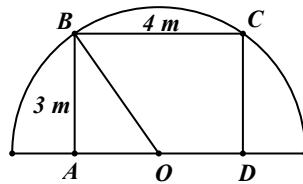
$$\Rightarrow \widehat{IHM} + \widehat{MHK} = 180^\circ. \text{ Hay } I, H, K \text{ thẳng hàng.}$$

III Toán thực tế

Bài toán 41. Người ta muốn dựng một khung cổng hình chữ nhật rộng $4m$ và cao $3m$, bên ngoài khung cổng được bao bởi một khung thép dạng nửa đường tròn như hình vẽ. Tính chiều dài của đoạn thép làm khung nửa đường tròn đó.



Lời giải



(Xem hình vẽ).

$$\text{Ta có: } OA = \frac{AD}{2} = \frac{4}{2} = 2(m)$$

Xét tam giác ABD vuông tại A .

$$\text{Theo định lí Pythagore, ta có: } OB^2 = OA^2 + AB^2 = 2^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}(m)$$

Vậy chiều dài của đoạn thép làm khung là nửa chu vi đường tròn (O) .

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2} \pi \cdot 2\sqrt{13} = \pi\sqrt{13} \approx 11,33(m).$$

☞ HẾT ☞