

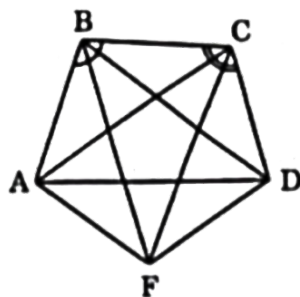
## CHƯƠNG IX. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP VÀ ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

### Bài 30. ĐA GIÁC ĐỀU

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**ĐA GIÁC** Trong đa giác  $ABCDE$  ở hình vẽ:

- Các đỉnh là các điểm  $A, B, C, D, E$ ;
- Các cạnh là các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DE, EA$ ;
- Các cặp đỉnh kề nhau là:  $A$  và  $B$ ,  $B$  và  $C$ ,  $C$  và  $D$ ,  $D$  và  $E$ ,  $E$  và  $A$ ;



- Các đường chéo là các đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau:  $AC, AD, BD, BE, CE$ ;
- Các góc là:  $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}, \widehat{EAB}$ .

Đa giác có  $n$  đỉnh ( $n \geq 3$ ) được gọi là hình  $n$  – giác hay hình  $n$  cạnh.

Ta thường gọi các đa giác có 3, 4, 5, 6, 8 đỉnh là tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác, bát giác.

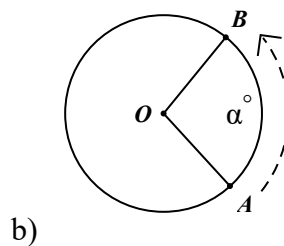
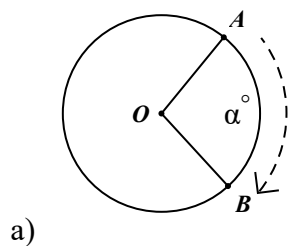
#### I. Đa giác đều

- Đa giác lồi là đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác.
- Đa giác đều là một đa giác lồi có cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau.

#### II. Phép quay

Phép quay thuận chiều  $\alpha^\circ$  ( $0^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$ ) tâm  $O$  giữ nguyên điểm  $O$ , biến điểm  $A$  khác điểm  $O$  thành điểm  $B$  thuộc đường tròn  $(O; OA)$  sao cho tia  $OA$  quay thuận chiều kim đồng hồ đến tia  $OB$  thì điểm  $A$  tạo nên cung  $AB$  có số đo  $\alpha^\circ$  (Hình a).

Định nghĩa tương tự cho phép quay ngược chiều  $\alpha^\circ$  tâm  $O$  (Hình b). Phép quay  $0^\circ$  và phép quay  $360^\circ$  giữ nguyên mọi điểm.



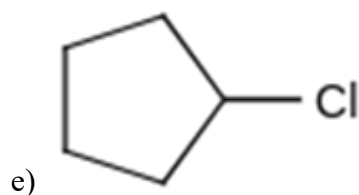
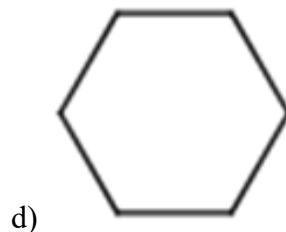
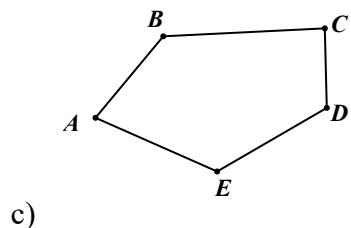
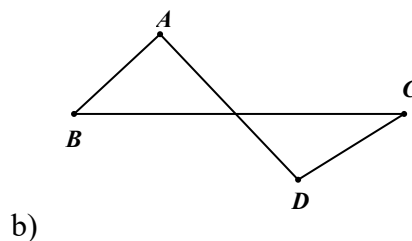
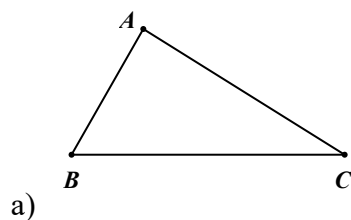
Một phép quay được gọi là giữ nguyên một đa giác đều  $H$  nếu phép quay đó biến mỗi điểm  $H$  thành một điểm của  $H$ .

Người ta nghĩ ra rằng nếu một phép quay biến các đỉnh của đa giác đều  $H$  thành các đỉnh của  $H$  thì phép quay đó giữ nguyên  $H$ .

#### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

##### I. Nhận dạng đa giác đều

**Bài toán 1.** Tìm các đa giác lồi trong hình vẽ và giải thích.



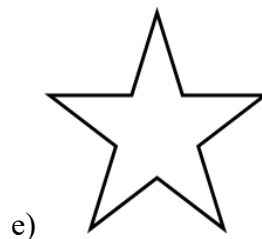
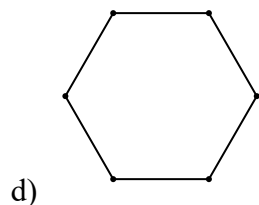
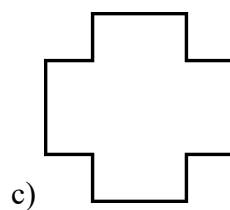
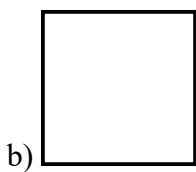
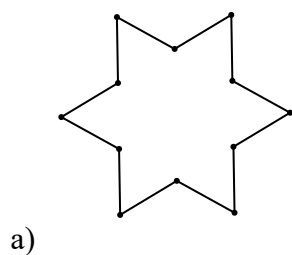
### Lời giải

Các đa giác trong hình a, c, e là các đa giác lồi vì đa giác luôn nằm về một phía của đường thẳng chứa một cạnh bất kì của đa giác.

Đa giác ở hình b không phải là đa giác lồi vì không cùng nằm về một phía so với đường thẳng  $AD$  hoặc  $BC$ .

Hình d cũng không phải là đa giác lồi và không cùng nằm về một phía so với đường thẳng  $BC$  hoặc  $CD$

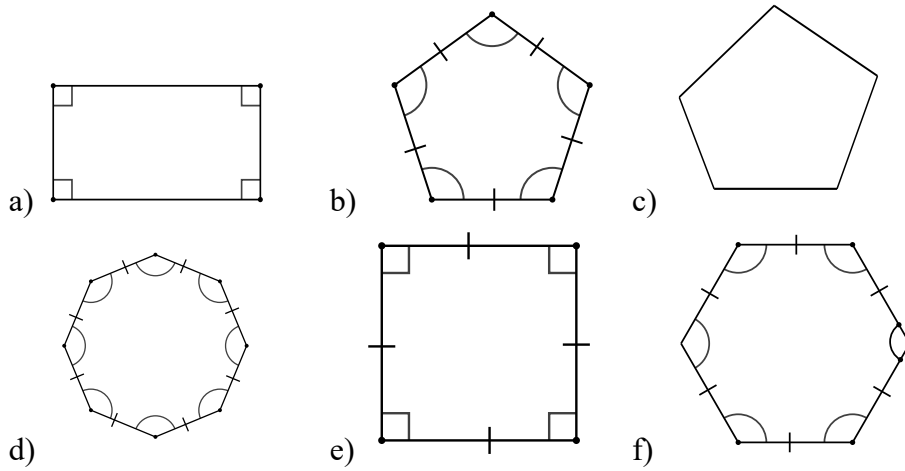
**Bài toán 2.** Trong các hình phẳng sau, hình nào là hình phẳng có dạng đa giác đều?



### Lời giải

Hình phẳng có dạng đa giác đều là hình b và d.

**Bài toán 3.** Tìm và gọi tên các đa giác đều có trong hình vẽ dưới đây.



**Lời giải**

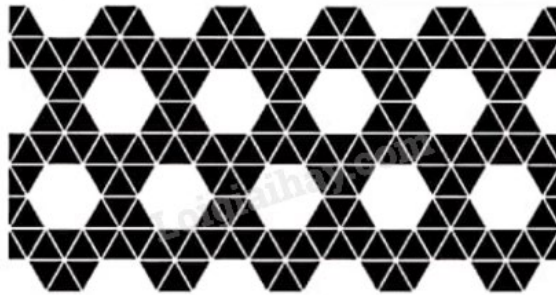
Hình 3b là ngũ giác đều;

Hình 3d là bát giác đều;

Hình 3e là tứ giác đều;

Hình 3g là lục giác đều.

**Bài toán 4.** Kể tên các loại đa giác đều có trong hình.

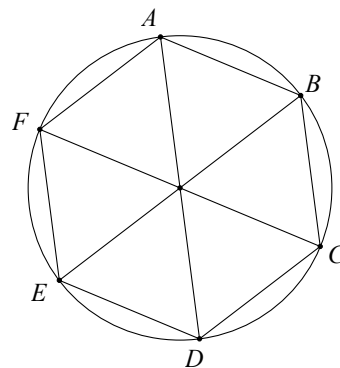


**Lời giải**

Các đa giác đều có trong hình là: Tam giác đều, tứ giác đều và lục giác đều.

**Bài toán 5.** Cho đường tròn  $(O; R)$ . Lấy các điểm  $A, B, C, D, E, F$  trên đường tròn  $(O; R)$  sao cho số đo các cung  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{DE}$ ,  $\widehat{EF}$ ,  $\widehat{FA}$  bằng nhau. Đa giác  $ABCDEF$  có là đa giác đều không?

**Lời giải**



Ta có  $sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{CD} = sđ\widehat{DE} = sđ\widehat{EF} = sđ\widehat{FA} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ .

Xét tam giác  $AOB$  cân tại  $O$  có  $\widehat{AOB} = 60^\circ$  (vì  $sđ\widehat{AB} = 60^\circ$ )

$\Rightarrow \Delta AOB$  đều nên  $AB = R$  và  $\widehat{ABO} = 60^\circ$  (1)

Tương tự với tam giác BOC đều  $\Rightarrow \widehat{OBC} = 60^\circ$  và  $BC = R(2)$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABO} + \widehat{OBC} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$  và  $AB = BC = R$ .

Chứng minh tương tự với các cạnh và các góc còn lại ta có đa giác ABCD có:

$AB = BC = CD = DE = EF = FA = R$ .

Và các góc  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDE} = \widehat{DEF} = \widehat{EFA} = \widehat{FAB} = 120^\circ$ .

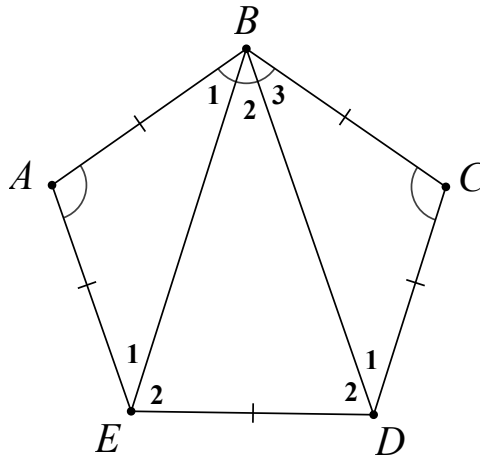
Do đó ABCDEF là một đa giác đều.

**Bài toán 6.** Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và  $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 108^\circ$ . Ngũ giác ABCDE có phải là ngũ giác đều không?

Hướng dẫn: Để chứng minh ngũ giác ABCDE đều ta phải chứng minh:

- Các cạnh bằng nhau (giả thiết đã cho).
- Các góc bằng nhau:  $\widehat{D} = \widehat{E} = 108^\circ$ .

**Lời giải**



Ta có:  $AB = BC = CD = DE = EA$  (gt) (\*)

Xét tam giác ABE có  $AB = AE$  (gt)

nên  $\triangle ABE$  cân tại A có  $\widehat{A} = 108^\circ$  (gt)

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

Tương tự với tam giác BCD, ta có:  $\widehat{B}_3 = \widehat{D}_1 = 36^\circ$

Lại có  $\widehat{ABC} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 = 108^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{B}_2 = 108^\circ - (\widehat{B}_1 + \widehat{B}_3) = 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 36^\circ$$

Dễ thấy  $\triangle ABE = \triangle CBD$  (c.g.c)

$\Rightarrow BE = BD$  hay tam giác EBD cân tại B có  $\widehat{B}_2 = 36^\circ$

$$\widehat{E}_2 = \widehat{D}_2 = \frac{180^\circ - \widehat{B}_2}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

Khi đó  $\widehat{AED} = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$

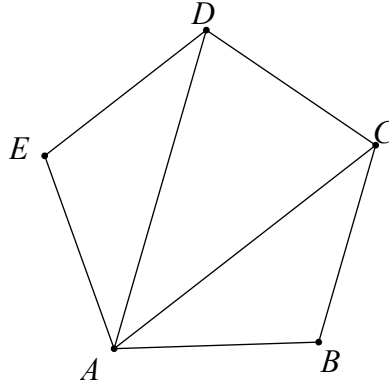
Tương tự  $\widehat{CDE} = 108^\circ$

Vậy  $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 108^\circ (**)$

Từ  $(*)$  và  $(**)$   $\Rightarrow$  ngũ giác ABCDE là ngũ giác đều (Các cạnh bằng nhau, các góc bằng nhau).

## II. Tính toán

**Bài toán 7.** Cho ngũ giác đều ABCDE như hình vẽ.



- Tính tổng các góc trong của tam giác ABC, ACD, ADE, từ đó suy ra tổng các góc trong ngũ giác đều ABCED.
- Tính số đo góc E.

### Lời giải

- Tổng các góc trong của tam giác ABC bằng  $180^\circ$ .

Tương tự với hai tam giác còn lại ACD và ADE.

Vậy tổng các góc trong của ba tam giác ABC, ACD và ADE là:  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

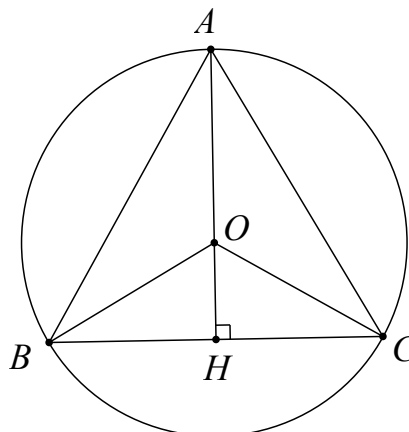
$\Rightarrow$  Tổng các góc trong của ngũ giác đều ABCED là  $540^\circ$ .

- Vì ABCED là ngũ giác đều nên tất cả các góc đều bằng nhau nên số đo mỗi góc của ngũ giác đều bằng  $\frac{540}{5} = 108^\circ$ .

Vậy số đo góc E bằng  $108^\circ$ .

**Bài toán 8.** Cho hình tròn  $(O; R)$ .

- Vẽ hình tam giác đều, hình vuông, hình lục giác đều có các đỉnh nằm trên  $(O; R)$ .
- Tính các cạnh của các hình vừa vẽ theo  $R$ .

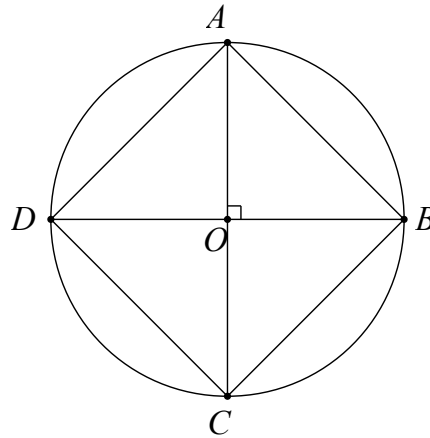


**Lời giải**

a) - Vẽ tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$

Vẽ đường cao  $AH$ , ta có:  $AB = AC; OB = OC = R$

Nên  $A, O, H$  thuộc đường trung trực của  $BC$  vì  $\Delta ABC$  đều nên  $O$  là trọng tâm của tam giác.



Ta có  $AH = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2}R$  (1) (tính chất trọng tâm)

Lại có  $AH$  là đường cao của tam giác  $ABC$  đều nên  $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \frac{3}{2}R = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot R$

Vậy cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  là  $\sqrt{3} \cdot R$ .

-Vẽ hình vuông  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$

Ta có:  $AC \perp BD$  (tính chất hai đường chéo hình vuông)

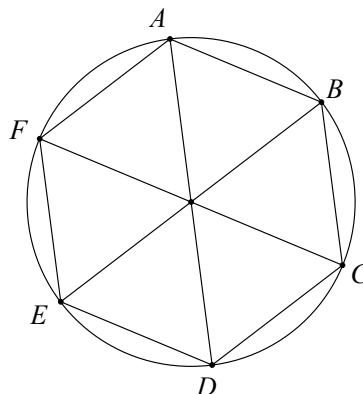
Xét tam giác  $AOB$  vuông tại  $O$ .

Theo định lý Pythagore, ta có:  $AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$ .

Vậy cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  là  $R\sqrt{2}$ .

-Vẽ lục giác đều  $ABCDEF$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$



Vì  $ABCDEF$  là lục giác đều  $\Rightarrow AB = BC = CD = DE = EF = FA$

$$\Rightarrow sđ\widehat{AB} = sđ\widehat{BC} = sđ\widehat{CD} = sđ\widehat{DE} = sđ\widehat{EF} = sđ\widehat{FA}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \frac{360}{6} = 60^\circ$$

Xét tam giác  $AOB$  cân tại  $O$  có  $\widehat{AOB} = 60^\circ$  nên  $\triangle AOB$  đều  $\Rightarrow AB = R$ .

Chứng minh tương tự, ta có  $BC = CD = DE; EF = FA = AB = R$ .

Vậy cạnh của hình lục giác đều nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  là  $R$ .

**Ghi nhớ:** Bán kính đường tròn ngoại tiếp là  $R$ .

- Độ dài cạnh tam giác đều nội tiếp là  $R\sqrt{3}$

- Độ dài cạnh hình vuông nội tiếp là  $R\sqrt{2}$ .

- Độ dài cạnh hình lục giác đều nội tiếp

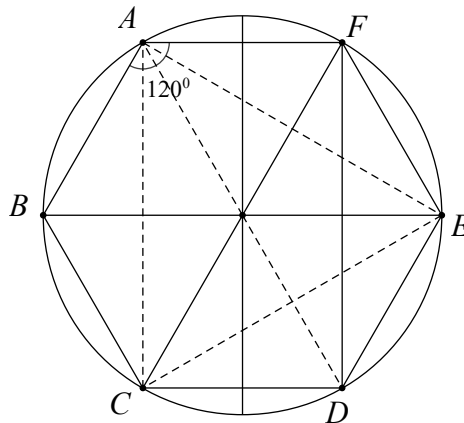
### III. Phép quay

**Bài toán 9.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$ .

a) Tính số đo các góc  $BCF, BDF, BEF$ .

b) Gọi  $O$  là tâm của lục giác đều. Hãy chỉ ra ba phép quay tâm  $O$  giữ nguyên tam giác  $ACE$ .

**Lời giải**



a) Dễ thấy  $ABCDEF$  là lục giác đều nên  $\widehat{ABF} = \widehat{AFE} = \widehat{FED} = \widehat{EDC} = \widehat{DCB} = \widehat{CBA} = 120^\circ$ .

Ta có tứ giác  $ABCF$  nội tiếp đường tròn  $(R)$  nên  $\widehat{BCF} = \widehat{BAF} = 180^\circ$  hay

$$\widehat{BCF} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Tương tự tứ giác  $ABDF$  nội tiếp đường tròn  $(R)$  nên  $\widehat{BDF} = \widehat{BAF} = 180^\circ$  hay

$$\widehat{BDF} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BDF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Tương tự ta có  $\widehat{BEF} = 60^\circ$ .

b) Ba đỉnh  $A, C, E$  của tam giác đều  $ACE$  chia đường tròn  $(O)$  thành ba cung bằng nhau:

$$sđ\widehat{AC} = sđ\widehat{CE} = sđ\widehat{EA} = 120^\circ.$$

Do đó có 6 phép quay tâm  $O$  giữ nguyên tam giác đó là:

Phép quay  $120^\circ, 240^\circ$  thuận chiều hoặc  $120^\circ$  ngược chiều.

**Nhận xét:** Có tất cả 6 phép quay  $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$  tâm  $O$  thuận chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ giữ nguyên tam giác.

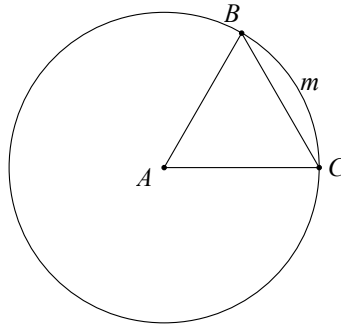
**Bài toán 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Hãy chỉ ra các phép quay biến tam giác thành chính nó.

*Hướng dẫn:* Tương tự câu b, **bài toán 9**, có tất cả 6 phép quay đó là phép quay  $120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$  tâm  $O$  thuận chiều và ngược chiều.

**Bài toán 11.** Cho tam giác  $ABC$  đều như hình vẽ. Điểm  $B$  biến thành điểm nào:

- Phép quay thuận chiều  $60^\circ$  tâm  $A$
- Phép quay ngược chiều  $300^\circ$  tâm  $A$

**Lời giải**



a) Tam giác  $ABC$  đều nên  $AB = AC$ . Do đó  $C$  thuộc đường tròn  $(A; AB)$ .

Xét đường tròn  $(A; AB)$ , ta có:  $\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow sđ\widehat{BmC} = 60^\circ$

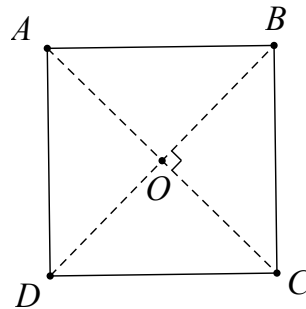
Khi đó điểm  $B$  biến thành điểm  $C$  qua phép quay thuận chiều  $60^\circ$  tâm  $A$ .

b) Ta có:  $sđ\widehat{BnC} = 360^\circ - sđ\widehat{BmC} = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

Khi đó điểm  $B$  biến thành điểm  $C$  qua phép quay ngược chiều  $300^\circ$  tâm  $A$ .

**Bài toán 12.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  (hình vẽ). Nêu các phép quay giữ nguyên hình vuông đó.

**Lời giải**



Ta có bốn điểm  $A, B, C, D$  thuộc đường tròn tâm  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ .

Ta có  $AC \perp BD$ .

Có 8 phép quay giữ nguyên hình vuông  $ABCD$  là:

- Phép quay  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  tâm  $O$  thuận chiều.
- Phép quay  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  tâm  $O$  ngược chiều.

**Bài toán 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  như hình vẽ. Phép quay thuận chiều tâm  $O$  biến điểm  $A$  thành điểm  $D$  thì các điểm  $B, C, D$  tương ứng biến thành các điểm nào?

**Lời giải**

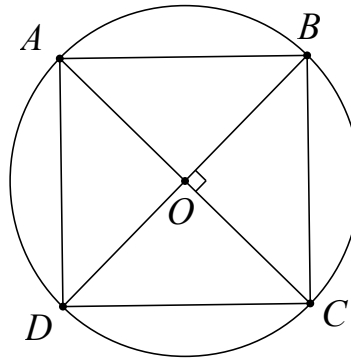
Ta có  $ABCD$  là hình vuông nên  $OA = OB = OC = OD$  và  $AC \perp BD$ .

Ta có:  $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90^\circ$ .

Phép quay thuận chiều tâm O biến điểm A thành điểm D là phép quay  $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ . Khi đó điểm B biến thành điểm A, điểm C biến thành điểm B và điểm D biến thành điểm C.

**Bài toán 14.** Cho hình vuông nội tiếp đường tròn tâm O. hãy cho biết các phép quay thuận chiều lần lượt  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  với tâm O sẽ biến các điểm A, B, C, D thành những điểm nào?

**Lời giải**

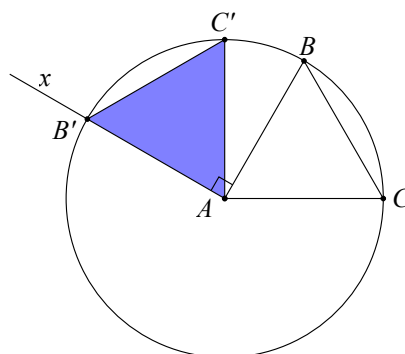


Các phép quay thuận chiều lần lượt là  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  với tâm O biến các điểm A, B, C, D thành những điểm tương ứng cho bởi bảng sau:

| Đỉnh<br>Phép quay<br>cùng chiều | A | B | C | D |
|---------------------------------|---|---|---|---|
| $90^\circ$                      | B | C | D | A |
| $180^\circ$                     | C | D | A | B |
| $270^\circ$                     | D | A | B | C |

**Bài toán 15.** Cho tam giác đều, thực hiện phép quay ngược chiều tâm A góc  $90^\circ$  ta được tam giác đều. Hãy vẽ tam giác đều đó.

**Lời giải**



**Cách dựng:** Phép quay ngược chiều  $90^\circ$  tâm A, biến điểm B thành điểm B'.

Xác định điểm B' theo hướng dẫn sau:

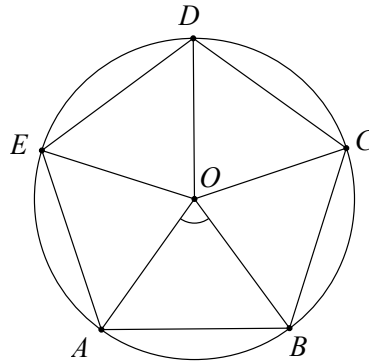
Vẽ đường tròn  $(A; AB)$  và tia Ax sao cho  $\widehat{BAx} = 90^\circ$ , tia Ax cắt đường tròn  $(A; AB)$  tại điểm B'.

Tương tự ta dựng được điểm C'.

**Bài toán 16.** Cho hình ngũ giác đều ABCDE có tâm O (Hình vẽ).

- a) Phép quay ngược chiều tâm  $O$  biến điểm  $A$  thành điểm  $B$  thì các điểm  $B, C, D, E$  tương ứng biến thành các điểm nào?  
 b) Chỉ ra ba phép quay tâm  $O$  giữ nguyên hình ngũ giác đều đã cho.

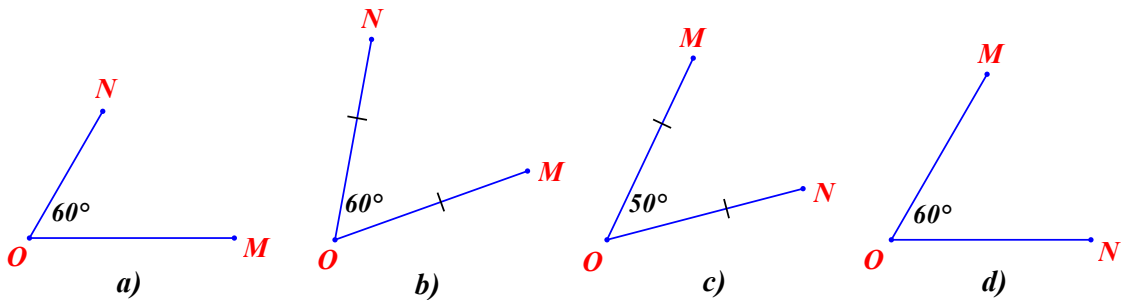
**Lời giải**



- a) Phép quay ngược chiều  $72^\circ$  tâm  $O$  biến điểm  $A$ , biến  $B$  thì các điểm  $B, C, D, E$  lần lượt biến thành các điểm  $C, D, E$  và  $A$ .  
 b) Ba phép quay tâm  $O$  giữ nguyên hình ngũ giác đều:  
 1. Phép quay ngược chiều  $144^\circ$ ;  
 2. Phép quay ngược chiều  $216^\circ$ ;  
 3. Phép quay thuận chiều  $72^\circ$ .

Bạn hãy tìm thêm những phép quay còn lại giữ nguyên hình ngũ giác đều.

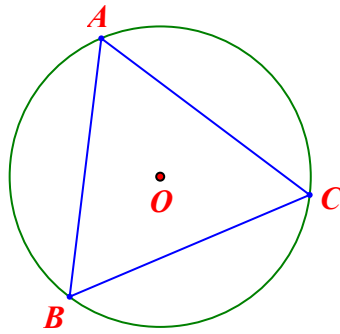
**Bài toán 17.** Trong các hình dưới đây, hình nào vẽ hai điểm  $M$  và  $N$  thỏa mãn phép quay thuận chiều  $60^\circ$  tâm  $O$  biến điểm  $M$  thành điểm  $N$  ?



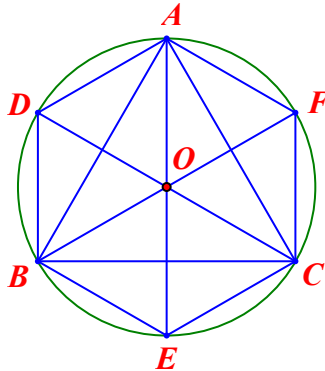
**Lời giải**

Phép quay thuận chiều  $60^\circ$  tâm  $O$  biến điểm  $M$  thành điểm  $N$  là hình d, vì ta có  $OM = ON$  và  $\widehat{MON} = 60^\circ$ .

**Bài toán 18.** Cho tam giác đều  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  như hình vẽ. Phép quay ngược chiều  $60^\circ$  tâm  $O$  biến các điểm  $A, B, C$  lần lượt thành các điểm  $D, E, F$ . Chứng minh. rằng  $ADBECF$  là một lục giác đều.



Lời giải



Phép quay ngược chiều  $60^\circ$  tâm O biến A thành D.

Ta có:  $OD = OA$  và  $\widehat{AOD} = 60^\circ$  nên tam giác AOD là tam giác đều  $\Rightarrow AD = OA = OD = R$  ( $R$  là bán kính đường tròn (O)).

Chứng minh tương tự, ta có:  $BE = CF = R \Rightarrow AD = BE = CF = R$  (\*)

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O), ta có:  $OD = OA = OB$  (1)

Lại có  $\widehat{AOB} = 120^\circ$  mà  $\widehat{AOD} = 60^\circ$  (cmt)  $\Rightarrow \widehat{DOB} = 60^\circ$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  Tam giác DOB là tam giác đều.  $\rightarrow$

chứng minh tương tự các tam giác ECC và FOA cũng là tam giác đều

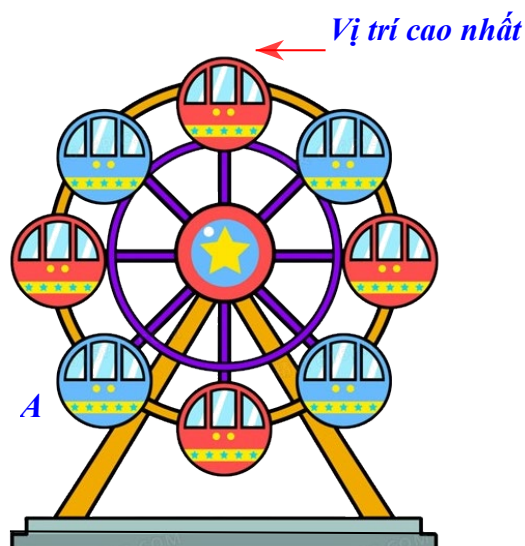
$\Rightarrow DB = EC = EA = R$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow AD = DB = BE = EC = CE = EA (= R)$  (3)

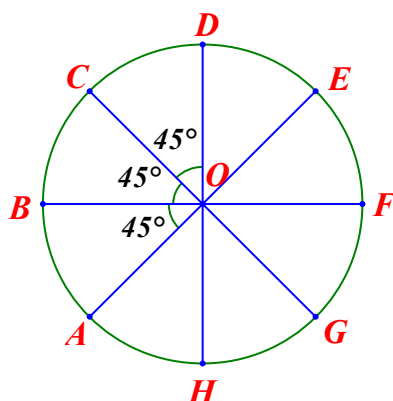
Dễ thấy  $\widehat{ADB} = \widehat{DBE} = \widehat{BEC} = \widehat{ECF} = \widehat{CFA} = \widehat{FAD}$  (4)

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow$  ADBECF là một lục giác đều.

**Bài toán 19.** Cho vòng quay mặt trời gồm 8 cabin như hình vẽ. Hỏi để cabin A di chuyển đến vị trí cao nhất thì vòng quay phải quay thuận chiều kim đồng hồ quanh tâm bao nhiêu độ?



Lời giải



Ta có một bát giác đều  $ABCDEFGH$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$ , mỗi góc ở tâm là:  
 $360^\circ : 8 = 45^\circ$  (Xem hình vẽ).

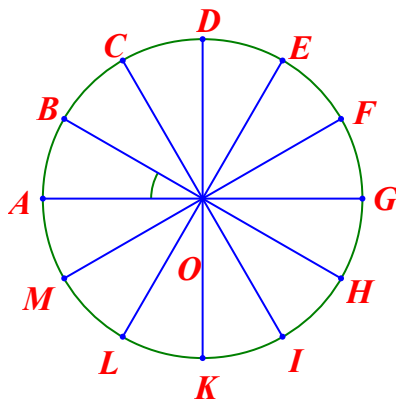
Theo giả thiết, ta có:  $\widehat{AOD} = 45^\circ \cdot 3 = 135^\circ$ .

Vậy qua phép quay thuận chiều  $135^\circ$  tâm  $O$ , cabin  $A$  di chuyển đến vị trí cao nhất (điểm  $D$ ).

**Bài toán 20.** Vòng trong của mái giếng trời hình hoa sen của nhà ga Bến Thành (Thành phố Hồ Chí Minh) có dạng đa giác đều 12 cạnh (Hình vẽ). Hãy chỉ ra bốn phép quay biến đa giác đều đó thành chính nó.



Lời giải



Đa giác đều 12 cạnh ABCDEFGHIKLM nội tiếp đường tròn (O) (Xem hình vẽ).

$$\text{Ta có: } \widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\text{và } \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \dots = 30^\circ$$

Và  $OA = OB = OC = OD = \dots$  (bán kính đường tròn ngoại tiếp)

Ta chọn phép quay thuận chiều (hoặc ngược chiều) góc quay  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  biến đa giác đã cho thành chính nó.

**♣ HẾT ♣**