

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

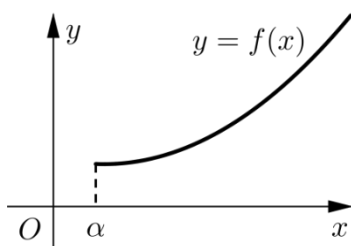
KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

I. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

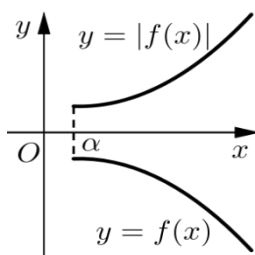
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía trên trục Ox .
 - ☐ Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục Ox .
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía bên phải trục Oy .
 - ☐ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía bên phải trục Oy .
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |u(x)| \cdot v(x)$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm trên miền $u(x) \geq 0$.
 - ☐ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm trên miền $u(x) < 0$.

II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM $y = |f(x)|$ TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN, NỬA KHOẢNG CHO TRƯỚC

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi

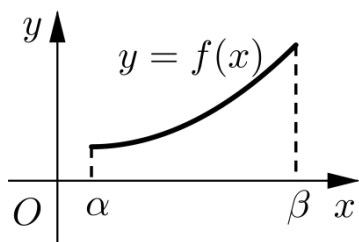


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

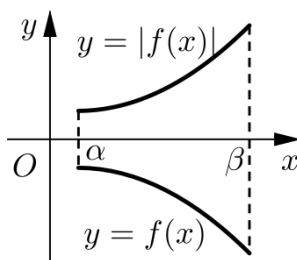


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi



$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}.$$

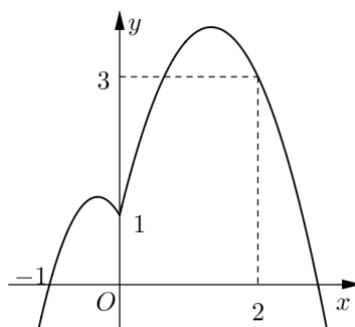


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}.$$

- Các dạng đồng biến $y = |f(x)|$ trên $(-\infty; a], [\alpha; \beta]$ ta thực hiện tương tự.

- Hàm số hồi nghịch biến làm ngược lại

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ có $f(-1) = 0$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



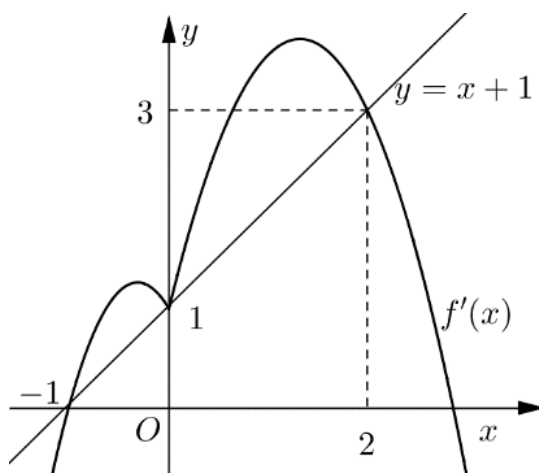
Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$.

Lời giải

ĐS: (0;3)

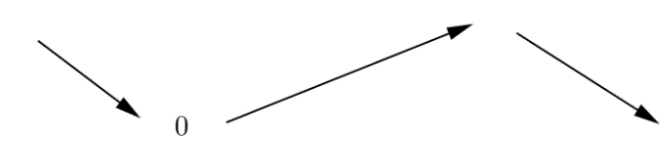
Đặt $g(x) = 2f(x-1) - x^2 \Rightarrow g'(x) = 2[f'(x-1) - (x-1) - 1]$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x+1$



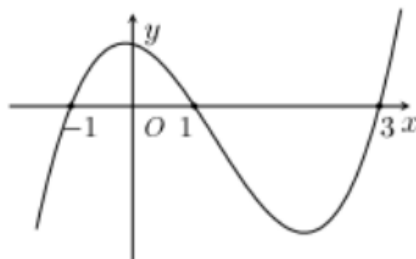
ta có: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > (x-1)+1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5;5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

ĐS: 5

TH 1: $x \geq 0$.

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$ vì $y' = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ đồ thị ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{cases}$.

Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq -1-m \\ 1-m \leq 1 \\ 2 \leq 3-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}. \text{ Vì } m \in [-5;5] \text{ và } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$$

TH 2: $x < 0$ vì $x \in (1;2)$ nên không có m

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;10]$ để hàm số $g(x) = f(3|x-m|+m^2)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$?

Lời giải

ĐS: 10

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Ta có $g'(x) = f'(3|x-m|+m^2) \cdot (3|x-m|+m^2)' = f'(3|x-m|+m^2) \cdot \frac{3(x-m)}{|x-m|}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-m=0 & (1) \\ 3|x-m|+m^2=0 & (2) \end{cases}$$

TH1: Nếu $m=0 \Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$ không thỏa mãn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên trường hợp này bị loại.

TH2: Nếu $m>0 \Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=m$

Ta có $3|x-m|+m^2 > 0 \forall x < 1 \Rightarrow f'(3|x-m|+m^2) > 0 \forall x \in (-\infty;1)$ nên $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < m$.

$\Rightarrow$ hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1) \Leftrightarrow g'(x) < 0 \forall x \in (-\infty;1)$
 $\Leftrightarrow (-\infty;1) \subset (-\infty;m) \Leftrightarrow 1 \leq m \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2022;2023)$ để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

ĐS: 2018

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1
$f'(x)$		$-$
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $f(x)$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $|f(x)|$. Từ bảng biến thiên

ta thấy hàm số $|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m-5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Vì m nguyên và $m \in (-2022; 2023)$ suy ra $m \in \{5; 6; \dots; 17; 18; 2022\}$.

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để hàm số: $y = |x^3 - 2mx + 2m^2 - 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$?

Lời giải

ĐS: 21

Đặt: $f(x) = x^3 - 2mx + 2m^2 - 1$. Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 2m$.

Điều kiện để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$ có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (1; 5)$ và $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2m \geq 0, \forall x \in (1; 5) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{(1;5)} \left(\frac{3}{2} x^2 \right) \\ 2m^2 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Vì m nhận giá trị nguyên và $m \in (-20; 20)$ nên $m = \{-19, -18, \dots, 0, 1\}$.

Vậy có 21 giá trị của m thỏa mãn.

Trường hợp 2. $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in (1; 5)$ và $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $x \in (1; 5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2m \leq 0, \forall x \in (1; 5) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(1;5)} \left(\frac{3}{2} x^2 \right) \\ 2m^2 - 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{75}{2} \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có 21 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(4m+5)x^2 - (3m^2+5m)x + \frac{2}{3}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

Lời giải:

ĐS: 1

Xét hàm số $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(4m+5)x^2 - (3m^2+5m)x + \frac{2}{3}$

Ta có: $g'(x) = -x^2 + (4m+5)x - (3m^2+5m) = -(x-m)(x-3m-5)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \text{ hoặc } \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2)$$

$$\text{TH 1: } \begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -6m^2 - 2m + 8 \leq 0 \\ -(x-m)(x-3m-5) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [1; +\infty) \\ m \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{TH 2: } \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -6m^2 - 2m + 8 \geq 0 \\ -(x-m)(x-3m-5) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left[-\frac{4}{3}; 1\right] \\ m \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

Do m là số nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m = 1$.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2023; 2023)$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 7 - m^2|$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

ĐS: 2024

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 7 - m^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + m + 1$$

Để $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m + 1 \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ -m^2 + m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{(0;1)} (-3x^2 + 6x - 1) \\ -2 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ -2 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1$$

$a \in \{-2; -1; 0; 1\} \rightarrow 4$ giá trị

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m + 1 \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ -m^2 + m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(0;1)} (-3x^2 + 6x - 1) \\ \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

$a \in \{3; K; 2022\} \rightarrow 2020$ giá trị

Vậy có 2024 giá trị thỏa mãn.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 1 - m^2|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

Lời giải

ĐS: 5

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 2mx + 1 - m^2$ có $f'(x) = 6x^2 - 2m$; $\Delta' = 12m$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |2x^3 - 2mx + 1 - m^2|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox .
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox .

+ **Trường hợp 1:** $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -m^2 - 2m + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -3 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-2023; 2023)$ ta được $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Ta có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ **Trường hợp 2:** $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y							$+\infty$

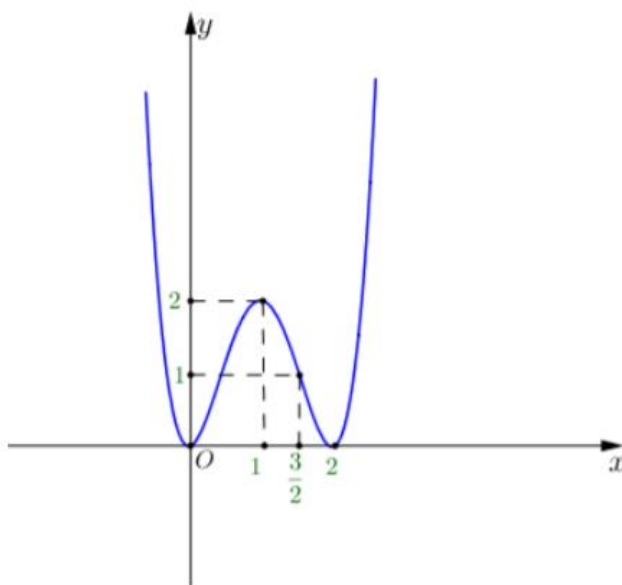
$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \sqrt{\frac{m}{3}} \leq 1 \\ -m^2 - 2m + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 3 \\ -3 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Q}; m \in (-2023; 2023)$ ta được $m = 1$.

Ta có 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ và suy ra có tất cả có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(2x - 2)$ có đồ thị như hình dưới.



Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - m|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

ĐS: 3

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f'(-2) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow f'(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \end{cases}$$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$+\infty$
			0		2	
					1	
					0	

Đặt $h(x) = 4f(\sin x) + \cos 2x - m$

Khi đó $h'(x) = 4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x$

Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos x, \sin 2x > 0 \\ \sin x \in (0; 1) \Rightarrow f'(\sin x) < 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó, hàm số $y = |h(x)|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 4f(1) - 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện nguyên dương của $m \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow$ có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 2007$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2006

Ta có $f'(x) = x^4 - 2x + m - 1$

Đặt $g(x) = f(x-1)$, để hàm số $y = |g(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ thì xảy ra hai trường hợp sau

TH1: hàm số $g(x)$ không âm và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(x-1) \leq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2008,8 \geq 0 \\ f'(t) \leq 0, \forall t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2008,8 \\ f'(t) \leq 0, \forall t < 1 \end{cases}$$

Xét $f'(t) \leq 0, \forall t < 1 \Leftrightarrow m \leq -t^4 + 2t + 1 = h(t), \forall t < 1$

Ta có BBT $h(t)$

t	$-\infty$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	1
$h'(t)$	$+$	0	$-$
$h(t)$	$-\infty$	$\nearrow \approx 2,19$	$\searrow 2$

Từ BBT ta có $m \in \emptyset$. Vậy $m \in \emptyset$.

TH2: hàm số $g(x)$ không dương và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f'(x-1) \geq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2008,8 \leq 0 \\ f'(t) \geq 0, \forall t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2008,8 \\ f'(t) \geq 0, \forall t < 1 \end{cases}$$

Xét $f'(t) \geq 0, \forall t < 1 \Leftrightarrow m \geq -t^4 + 2t + 1 = h(t), \forall t < 1 \Leftrightarrow m \geq 2,19$. Vậy $\{3; 4; \dots; 2008\}$.

Vậy có 2006 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1) + 2022|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2006

Đặt $t = x - 1$. Đặt $g(t) = f(t) + 2022, t \in (-\infty; 1)$.

$y(t) = |f(t) + 2022|$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} f(t) + 2022 < 0 \\ f'(t) > 0 \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) + 2022 < 0 \quad (1) \\ t^4 - 2t + m - 1 > 0 \quad (2) \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} - 1 + (m-1)1 - 2007 < 0 \quad (1) \\ t^4 - 2t + m - 1 > 0 \quad (2) \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{10056}{5} \quad (1) \\ t^4 - 2t + m - 1 > 0 \quad (2) \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1)$$

$$t^4 - 2t + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > -t^4 + 2t + 1, t \in (-\infty; 1).$$

$$\text{Đặt } h(t) = -t^4 + 2t + 1 \Rightarrow h'(t) = -4t^3 + 2 \Rightarrow h'(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	$-\infty$	$1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2.19$	0

Điều kiện $m > 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2.19$.

Từ và thì số giá trị nguyên của m là $2008 - 3 + 1 = 2006$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 15)$ để hàm số $y = g(x) = f(|x^2 + 3x - m|)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS: 13

Ta có: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$ yêu cầu bài toán khi và chỉ khi

$$g'(x) = \frac{2x+3}{|x^2+3x-m|} f'(|x^2+3x-m|) \geq 0, \forall x \in (0; 2),$$

$$\Leftrightarrow f'(|x^2+3x-m|) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2+3x-m| \geq 1 \\ |x^2+3x-m| \leq -3 \end{cases} \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow |x^2+3x-m| \geq 1, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-m \geq 1 \\ x^2+3x-m \leq -1 \end{cases} \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-1 \geq m \\ x^2+3x+1 \leq m \end{cases} \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 11 \end{cases}$$

Mà $m \in (-10; 15), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-9; \dots; -1; 11; 12; 13; 14\}$

Vậy có tất cả 13 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025, 2025]$ để hàm số $y = | -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3) |$ đồng biến trên khoảng $(0, 1)$.

Lời giải

ĐS: 2025

$$\text{Xét } f(x) = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases}$$

Hàm số $y = \left| -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3) \right|$ đồng biến trên khoảng $(0,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &f(x) \text{ db } \forall x \in (0,1) \\ &f(0) \geq 0 \end{aligned} \right. & \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,1) & (I) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \\ \left[\begin{aligned} &f(x) \text{ nb } \forall x \in (0,1) \\ &f(0) \leq 0 \end{aligned} \right. & \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1) & (II) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Giải (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) \geq 0 \quad \forall x \in (0,1) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 < 1 \leq m+2 \\ m^2(m+3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

$$\text{Giải (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \leq 0 \\ m \geq 1 \\ m^2(m+3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -3.$$

$$\text{Kết hợp (I) và (II) suy ra } \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ m \leq -3 \end{cases} \xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m \in [-2025, 2025]} m \in \{-2025, -2022, \dots, -3, -1, 0\}.$$

Vậy có 2025 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ của tham số thực m để hàm số $y = \left| x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x \right|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS: 4045

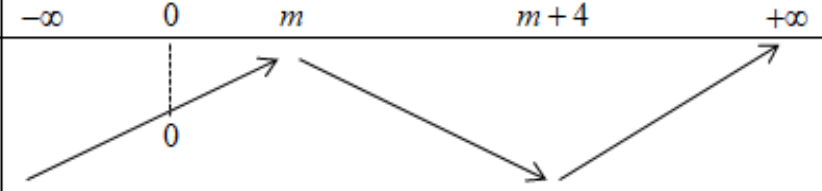
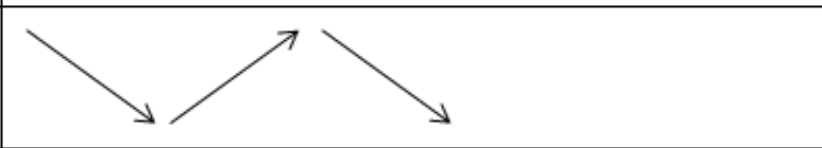
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4) = 3[x^2 - 2(m+2)x + m(m+4)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+4 \end{cases}.$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0; 0)$.

* Trường hợp 1: Nếu $m > 0$

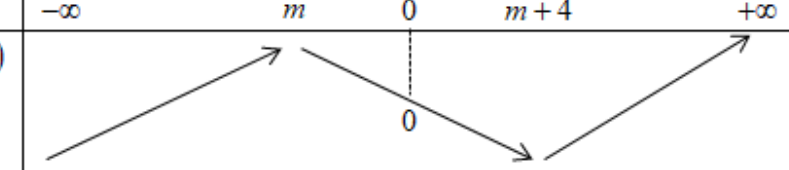
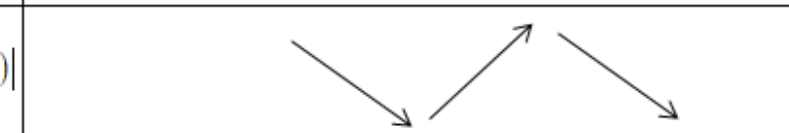
x	$-\infty$	0	m	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m) \Leftrightarrow m \geq 2$.

Kết hợp với $m > 0$, ta có $m \geq 2$.

* Trường hợp 2: Nếu $m \leq 0 < m+4 \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$

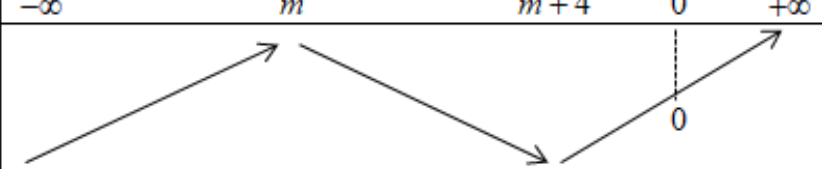
x	$-\infty$	m	0	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m+4) \Leftrightarrow m+4 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, ta có $-2 \leq m \leq 0$.

* Trường hợp 3: Nếu $m+4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$

x	$-\infty$	m	$m+4$	0	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ với mọi $m \leq -4$.

Vậy $\begin{cases} m \geq 2 \\ -2 \leq m \leq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$. Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2023; 2023]$ nên có 4045 giá trị m thỏa mãn

yêu cầu bài toán.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-8x+m^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[0; 2023]$ để hàm số $g(x) = f(|1-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

Lời giải

ĐS: 2020

Ta có $g(x) = f(|1-x|) = f(1-x), \forall x \in (-\infty; -1)$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } g'(x) &= [f(1-x)]' = -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)[(1-x)^2-8(1-x)+m^2] \\ &= (x-1)^2(x+1)(x^2+6x+m^2-7). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1$.

Ta có $(x-1)^2(x+1) < 0, \forall x \in (-\infty; -1)$ nên $g'(x) \leq 0, \forall x < -1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + m^2 - 7 \geq 0, \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 \geq 16 - m^2, \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$\Leftrightarrow 16 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}.$$

Do m nguyên, $m \in [0; 2023]$ và $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$ nên suy ra $m \in \{4; 5; 6; \dots; 2023\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 16: Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tìm tổng các phần tử của S .

Lời giải

ĐS: 3

Cách 1 :

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - mx + 1$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm số

$y = f(x) = x^3 - mx + 1$ đồng biến và không âm trên $[1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \forall x \in [1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - m \geq 0 \forall x \in [1; +\infty) \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2 \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Cách 2: Nhận xét: Do đồ thị hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ được vẽ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm (C): $y = f(x) = x^3 - mx + 1$ ở phía trên Ox , rồi lấy đối xứng phần đồ thị (C) ở phía

dưới Ox qua Ox nên để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $x^3 - mx + 1 = 0$ (*) không có nghiệm nào lớn hơn 1.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow x^3 + 1 = mx \Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x} = g(x)$.

Xét hàm $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ta có: $g'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$			$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên phương trình (*) không có nghiệm nào lớn hơn 1 khi và chỉ khi $m \leq 2$.

Mặt khác $m \in \mathbb{Q}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 3.

Cách 3: Ta có $y = |x^3 - mx + 1| = \sqrt{(x^3 - mx + 1)^2}$, suy ra $y' = \frac{x^3 - mx + 1}{|x^3 - mx + 1|} \cdot (3x^2 - m)$

Để hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì $g(x) = (x^3 - mx + 1) \cdot (3x^2 - m) \geq 0, \forall x \geq 1$ (*).

Với $m = 0$ ta có $g(0) = (x^3 + 1) \cdot 3x^2 > 0, \forall x \geq 1$.

Với $m > 0$. Do $m \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ (*) luôn có 1 nghiệm là $\sqrt{\frac{m}{3}}$. Ta chú ý $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ là $\sqrt{\frac{m}{3}} \leq 1 \Rightarrow m \leq 3$.

Với $m = 1, m = 2$ thay vào (*) kiểm tra BXD thấy đúng $\Rightarrow$ nhận $m = 1; m = 2$.

Với $m = 3$ thì $g(x) = (x^3 - 3x + 1)(3x^2 - 3)$ có một nghiệm $x_0 > 1$. Suy ra trên đoạn $[1; x_0]$ thì $g(x) < 0$ nên trái yêu cầu bài toán.

Do đó $S = \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 3.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022; 2022)$ để hàm số $y = |x^3 + (2m+1)x - 2|$ đồng biến trên $(1; 3)$?

Lời giải

ĐS: 4030

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (2m+1)x - 2$

$$f'(x) = 3x^2 + 2m + 1$$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1;3)$ khi và chỉ khi xảy ra 2 trường hợp sau:

TH1: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1;3)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \geq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ 2m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3x^2 \quad \forall x \in (1;3) \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

TH2: Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(1;3)$ và $f(1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \leq 0 \quad \forall x \in (1;3) \\ 2m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -3x^2 \quad \forall x \in (1;3) \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -27 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -14.$$

Kết hợp 2 trường hợp ta có $m \leq -14$ hoặc $m \geq 0$.

Mà $m \in (-2022; 2022)$ nên có 4030 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = |x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$?

Lời giải

ĐS: 4

Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20$

$$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2mx + 3$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và hàm số không dương trên miền $(-\infty; -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -2) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^4 + 8x^3 - 2mx + 3 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -2) \\ -4m - 26 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 + 8x^2 + \frac{3}{x} \leq 2m \quad \forall x \in (-\infty; -2) \\ m \geq -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 5x^3 + 8x^2 + \frac{3}{x}$ trên $(-\infty; -2)$

$$g'(x) = 15x^2 + 16x - \frac{3}{x^2} = (2x + 4)^2 + 11x^2 - 16 - \frac{3}{x^2}$$

Ta có $(2x + 4)^2 > 0$, $11x^2 > 44$, $16 + \frac{3}{x^2} < 16\frac{3}{4} \quad \forall x \in (-\infty; -2)$

Suy ra $g'(x) > 0 + 44 - 16\frac{3}{4} > 0 \forall x \in (-\infty; -2)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(-\infty; -2)$

x	$-\infty$	-2
$g'(x)$	+	
$g(x)$		
		$-\frac{19}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $5x^3 + 8x^2 + \frac{3}{x} \leq 2m \quad \forall x \in (-\infty; -2) \Leftrightarrow -\frac{19}{2} \leq 2m \Leftrightarrow m \geq -\frac{19}{4}$.

Kết hợp với $m \geq -\frac{13}{2}$ ta có $m \geq -\frac{19}{4}$. Do đó có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn đề bài.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ nghịch biến trên $(0; 1)$?

Lời giải

ĐS: 10

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Xét hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có

$$g'(x) = f'(|x+m|) \cdot \frac{x+m}{|x+m|} = \frac{x+m}{|x+m|} \cdot 3|x+m| \cdot (|x+m| - 2) = 3(x+m) \cdot (|x+m| - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 2 \\ x = -m + 2 \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định khi $x = -m$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	$-m-2$		$-m$		$-m+2$	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+		-	0	+
$g(x)$								

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$

$$\begin{cases} (0; 1) \subset (-\infty; -m-2) \\ (0; 1) \subset (-m; -m+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq -m-2 \\ -m \leq 0 < 1 \leq -m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Mà $m \in [-10; 10]$ nên có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

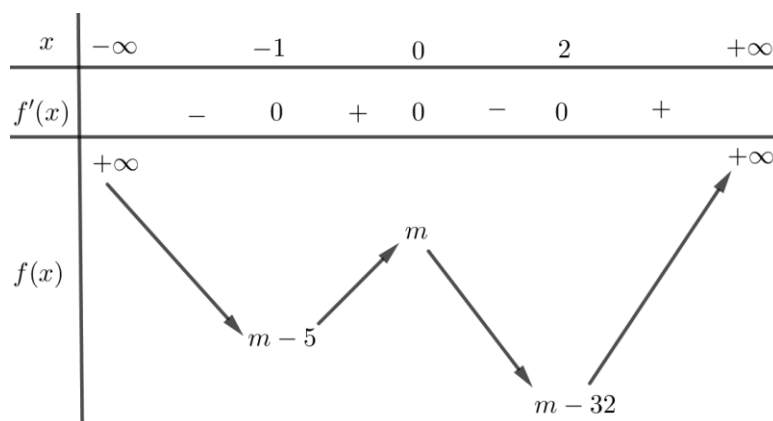
Lời giải

ĐS: 5

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

BBT:



Hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$

Do yêu cầu m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên ta có $m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$

Vậy có 5 giá trị m thỏa yêu cầu.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(3|x - m| + m^2)$ đồng biến trên $(5; +\infty)$?

Lời giải

ĐS: 5

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$g(x) = f(3|x - m| + m^2) \Rightarrow g'(x) = \frac{3(x - m)}{|x - m|} \cdot f'(3|x - m| + m^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \text{ (loại)} \\ 3|x - m| + m^2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = m$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(m)$	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$ thì $m \leq 5$. Có 5 giá trị nguyên dương của m .

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m \in [0; 2023]$ để hàm số $g(x) = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+3)x - m + 5|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2019

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 - 3(m+3)x - m + 5$ có

$$f'(x) = 3x^2 - 6mx - 3(m+3) = 3(x^2 - 2mx - m - 3)$$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 2)$ thì

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f'(x) = 3(x^2 - 2mx - m - 3) \geq 0, \forall x \in (0; 2) \\ f(0) \leq 0 \\ f'(x) = 3(x^2 - 2mx - m - 3) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 5 \geq 0 \\ m \leq \frac{x^2 - 3}{2x + 1}, \forall x \in (0; 2) \\ -m + 5 \leq 0 \\ m \geq \frac{x^2 - 3}{2x + 1}, \forall x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \leq -3 \\ m \geq 5 \\ m \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 5 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [0; 2023]} m \in \{5, 6, \dots, 2023\}$$

Vậy có tất cả 2019 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+5)x^2 - (m^2+5m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2

$$\text{Xét } g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+5)x^2 - (m^2+5m)x + \frac{2}{3}.$$

$$g'(x) = -x^2 + (2m+5)x - (m^2+5m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+5 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m		$m+5$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					$-\infty$

$$\text{Hàm số } |g(x)| \text{ nghịch biến trên khoảng } (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in (1;2) \\ g(x) \leq 0, \forall x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in (1;2) \\ g(x) \geq 0, \forall x \in (1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 < 2 \leq m+5 \\ g(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+5 \leq 1 \\ g(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 1 \\ -2m^2 - 6m + 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ -2m^2 - 6m + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 1 \\ m \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m .

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (5-m)x + m^2 - 7|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS: 20

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (5-m)x + m^2 - 7$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 5 - m$.

Ta thấy $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 2) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5 - m \geq 0, \forall x \in (0; 2) \\ m^2 - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2 + 5, \forall x \in (0; 2) \\ m \geq \sqrt{7} \\ m \leq -\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \geq \sqrt{7} \\ m \leq -\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7} \leq m \leq 5 \\ m \leq -\sqrt{7} \end{cases}$$

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20; +\infty)$, suy ra $m \in \{-19; -18; \dots; -3; 3; 4; 5\}$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5 - m \leq 0, \forall x \in (0; 2) \\ m^2 - 7 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3x^2 + 5, \forall x \in (0; 2) \\ -\sqrt{7} \leq m \leq \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 17 \\ -\sqrt{7} \leq m \leq \sqrt{7} \end{cases}$$

Trường hợp này không tồn tại m thỏa mãn.

Vậy có tất cả 20 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; +\infty)$ để hàm số $y = |(m-1)x^3 - x^2 + 27 - m^2|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

Lời giải

ĐS: 19

Xét hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - x^2 + 27 - m^2$.

Ta có $f'(x) = 3(m-1)x^2 - 2x$.

Ta thấy $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1)x^2 - 2x \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ -m^2 + m + 25 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \geq \frac{2}{x}, \forall x \in (1; 2) \\ \frac{1-\sqrt{101}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \geq 2 \\ \frac{1-\sqrt{101}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{5}{3} \\ \frac{1-\sqrt{101}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2}.$$

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20; +\infty)$, suy ra $m \in \{2; 3; 4; 5\}$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1)x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ -m^2 + m + 25 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \leq \frac{2}{x}, \forall x \in (1; 2) \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \geq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \geq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \geq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2}.$$

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20; +\infty)$, suy ra $m \in \{-19; -18; \dots; -5\}$.

Vậy có tất cả 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.