

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

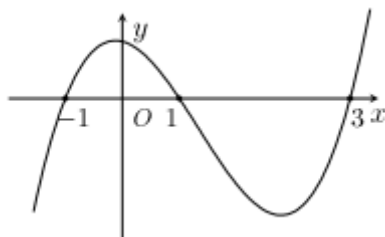
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 2. BÀI TOÁN HÀM ẨN, HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbf{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

ĐS : 5

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$. Vì $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbf{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{cases}$$

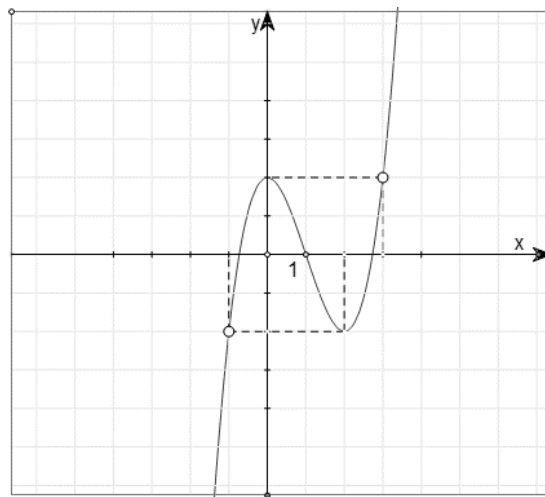
Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq -1-m \\ 3-m \geq 2 \\ 1-m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5; 5]$ nên ta có $S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



Lời giải

ĐS : 14

Xét hàm số $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$

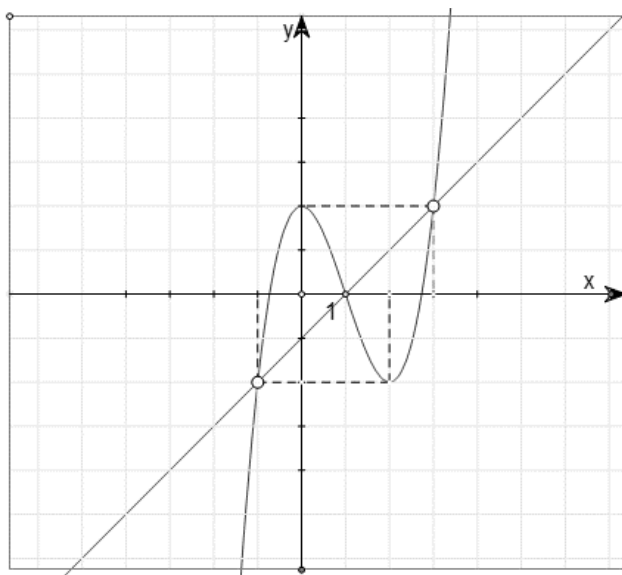
$$g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$$

Xét phương trình $g'(x) = 0$ (1)

Đặt $x-m=t$, phương trình (1) trở thành $f'(t) - (t-1) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t-1$ (2)

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1$

Ta có đồ thị các hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1$ như sau:



Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình (2) có nghiệm là:
$$\begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \\ x = m + 3 \end{cases}$$

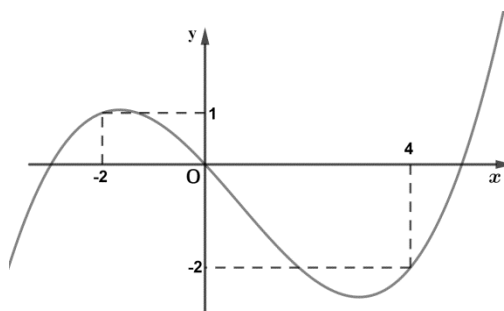
Ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	$-\infty$	$m-1$		$m+1$		$m+3$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$							$+\infty$

Để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ cần
$$\begin{cases} m - 1 \leq 5 \\ m + 1 \geq 6 \\ m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m$ nhận các giá trị 1; 2; 5; 6 $\Rightarrow S = 14$.

Câu 28: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6; 6)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(3 - 2x + m) + x^2 - (m + 3)x + 2m^2$ nghịch biến trên $(0; 1)$. Khi đó, tổng giá trị

các phân tử của S là

Lời giải

ĐS : 9

Xét $g'(x) = -2f'(3 - 2x + m) + 2x - (m + 3)$. Xét phương trình $g'(x) = 0$, đặt

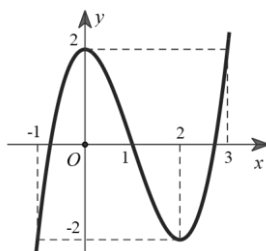
$$t = 3 - 2x + m \text{ thì phương trình trở thành } -2 \cdot \left[f'(t) - \frac{-t}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+m}{2}, x_2 = \frac{m+3}{2}, x_3 = \frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1)$ từ đó suy ra

$$\begin{cases} \frac{3+m}{2} \leq 0 < 1 \leq \frac{5+m}{2} \\ 1 \leq \frac{-1+m}{2} \end{cases} \text{ và giải ra các giá trị nguyên thuộc } (-6;6) \text{ của } m \text{ là } -3; 3; 4; 5.$$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phân tử trong S bằng:



Lời giải

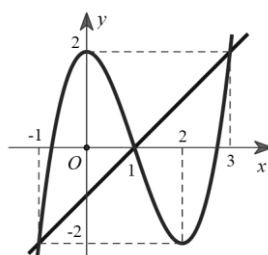
ĐS : 14

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$$

$$\text{Đặt } x-m=t \Rightarrow f'(t) = t-1$$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = t - 1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$

$$\text{Hay } \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - m < 1 \\ x - m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < x < m + 1 \\ x > m + 3 \end{cases}$$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ thì $\begin{cases} m - 1 \leq 5 < 6 \leq m + 1 \\ m + 3 \leq 5 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Vì m là các số nguyên dương nên $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $1 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = f(1 - x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

Lời giải

ĐS : 2012

$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(1 - x) = -(1 - x)^2(-x - 1)[(1 - x)^2 - 6(1 - x) + m]$$

$$= (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 4x + m - 5)$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1 (*), .$$

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Rightarrow x^2 + 4x + m - 5 \leq 0, \forall x < -1$

$$\Rightarrow m \leq -x^2 - 4x + 5, \forall x < -1.$$

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

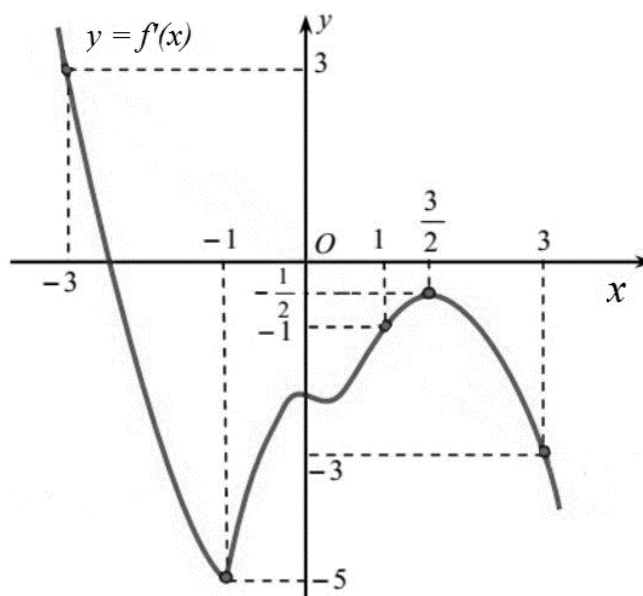
x	$-\infty$	-2	-1
y	$-\infty$	9	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x-2m) + \frac{1}{2}(2m-x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

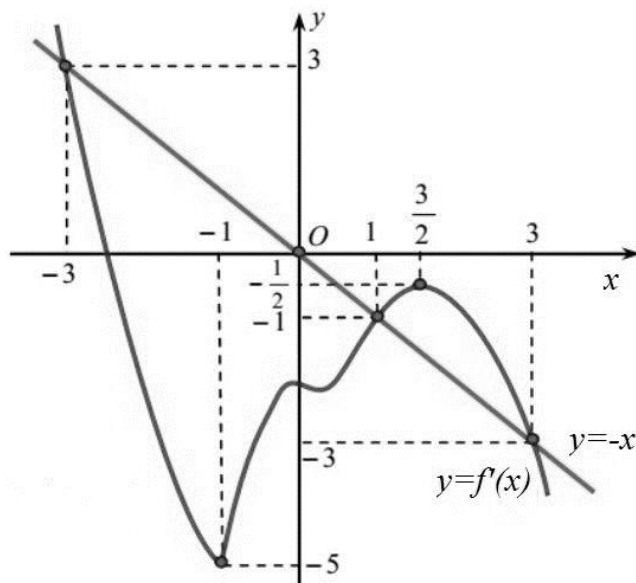
Lời giải

ĐS : 2

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x-2m) - (2m-x).$$

Đặt $h(x) = f'(x) - (-x)$. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ trên hình vẽ suy

ra: $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$.



Ta có $g'(x) = h(x - 2m) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x - 2m \leq 1 \\ x - 2m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 \leq x \leq 2m + 1 \\ x \geq 2m + 3 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m - 3; 2m + 1)$ và $(2m + 3; +\infty)$.

Do đó hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 \leq 3 \\ 2m + 1 \geq 4 \\ 2m + 3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$.

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m \in \{2; 3\} \Rightarrow S = \{2; 3\}$. Vậy số phần tử của S bằng 2.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS : 18

Ta có $y' = f'(x^2 + 3x - m) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$

suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2).$$

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, ta có:

$$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[0;2]}(x^2+3x+3) \\ m \leq \min_{[0;2]}(x^2+3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Do $m \in [-10;20]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2(x^2+2mx+1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

Lời giải

ĐS : 3

Ta có: $g'(x) = 2f'(2x+1) = 2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2 + 2m(2x+1) + 1]$

Đặt $t = 2x+1$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3;5)$

$$\Leftrightarrow t(t^2+2mt+1) \geq 0, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow t^2+2mt+1 \geq 0, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \frac{-t^2-1}{t}, \forall t \in (7;11)$$

Xét hàm số $h(t) = \frac{-t^2-1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t) = \frac{-t^2+1}{t^2}$

BBT:

t	$-\infty$	7	11	$+\infty$
$h'(t)$				

Dựa vào BBT ta có $2m \geq \frac{-t^2-1}{t}, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \max_{[7;11]} h(t) \Leftrightarrow m \geq -\frac{50}{14}$

Vì $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Lời giải

ĐS : 2016

Ta có $g'(x) = (x^2 - 2x + m)' f'(x^2 - 2x + m) = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x + m)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ và

$g'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow 2(x - 1)f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \\ x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$

Xét hàm số $y = x^2 - 2x + m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

TH1: $x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m - 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3$.

TH2: $x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty)$: Không có giá trị m thỏa mãn.

Vậy có 2016 số nguyên $m < 2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$ đồng biến trên $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS : 18

Ta có $f'(t) = t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 1 \end{cases} (*)$.

Có $g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x-m)$

Vì $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

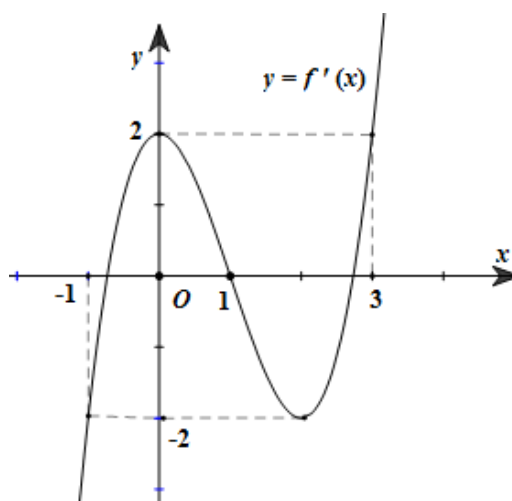
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-m \leq -3, \forall x \in (0;2) \\ x^2+3x-m \geq 1, \forall x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \leq m-3, \forall x \in (0;2) \\ x^2+3x \geq m+1, \forall x \in (0;2) \end{cases}$

Có $h(x) = x^2 + 3x$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ nên từ $\Rightarrow \begin{cases} m-3 \geq 10 \\ m+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}$

Vì $\begin{cases} m \in [-10;20] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số m .

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

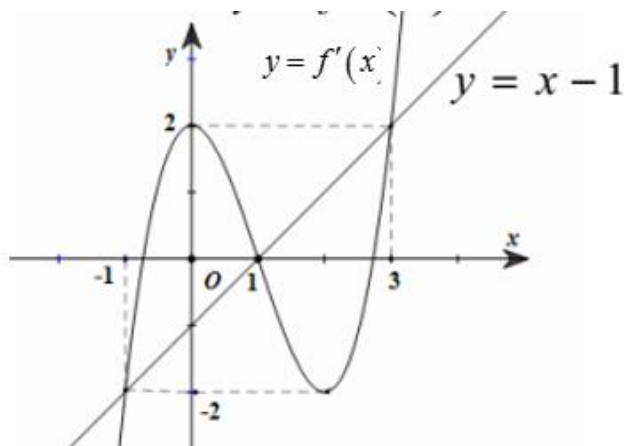
Lời giải

ĐS : 14

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x-1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x-1$ trên hình vẽ ta suy ra

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



Ta có $g'(x) = h(x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-m \leq 1 \\ x-m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq x \leq m+1 \\ x \geq m+3 \end{cases}$

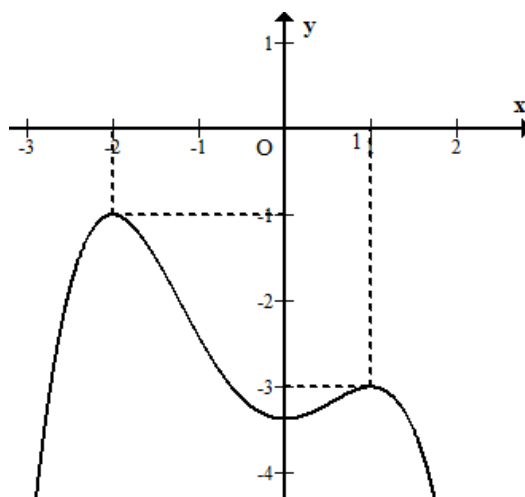
Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1; m+1)$ và $(m+3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 5 \\ m+1 \geq 6 \\ m+3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 5; 6\}$, tức $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , $m \in \mathbb{Z}, -2020 < m < 2020$ để hàm số

$$g(x) = f(x^2) + mx^2 \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6 \right) \text{ đồng biến trên khoảng } (-3; 0)$$

Lời giải

ĐS : 2020

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ suy ra $g'(x) \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$.

$$\square \quad 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3) \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow f'(x^2) - 2m(-x^2 - 2x + 3) \leq 0, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) \leq 2m(-x^2 - 2x + 3), \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}.$$

$$\square \quad \text{Ta có } -3 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \Rightarrow f'(x^2) \leq -3 \text{ dấu "=" khi } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\square \quad -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow 0 < -x^2 - 2x + 3 \leq 4, \forall x \in (-3; 0)$$

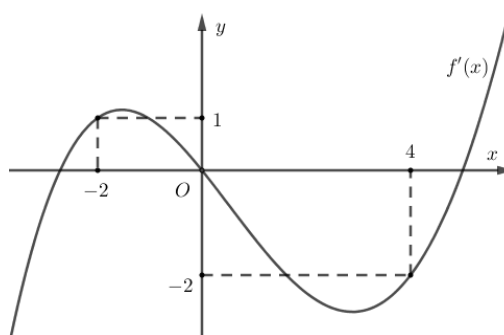
$$\Leftrightarrow \frac{1}{-x^2 - 2x + 3} \geq \frac{1}{4}, \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \leq \frac{-3}{2 \cdot 4} = \frac{-3}{8}, \forall x \in (-3; 0), \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

$$\Rightarrow \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} = -\frac{3}{8}.$$

Vậy $m \geq -\frac{3}{8}$, mà $m \in \square$, $-2020 < m < 2020$ nên có 2020 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

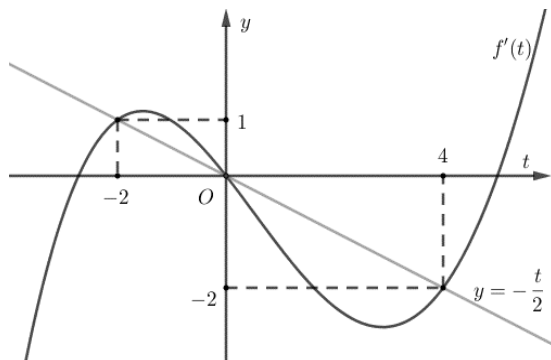
ĐS : 2

Ta có $g'(x) = 4f'(x-m) + 2x - 2m$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-m) \geq -\frac{x-m}{2} \quad (*)$$

Đặt $t = x - m$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



Từ đồ thị ta có $f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq x \leq m \\ x \geq m+4 \end{cases}$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{2;3\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

ĐS : 2019

Ta có: $g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x}\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

Ta có: $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Do đó: $f'\left(\frac{2-x}{1+x}\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2; +\infty) & (1) \\ 1 \leq \frac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$

Hàm số $h(x) = \frac{2-x}{1+x} - m; x \in (2; +\infty)$ có bảng biến thiên:

x		2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$		$-m$	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$, kết hợp điều kiện $m < 2020$ suy ra có 2019 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.