

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 8. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài toán: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa). $y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0(1) \\ f'(x) = 0(2) \end{cases}$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y = f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

Lời giải

ĐS: 3

$y = f(|x-3|)$ (1), Đặt $t = |x-3|, t \geq 0$ Thì (1) trở thành: $y = f(t) (t \geq 0)$

Có $t = \sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t' = \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x = t'_x f'(t)$

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t'_x = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ t = -2(L) \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

Lấy $x=8$ có $t'(8) f'(5) > 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y = f(|x-3|)$ có 3 cực trị.

Câu 72: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị

Lời giải

ĐS: 0

Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - (2m^2 + m - 12) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \frac{-1 - \sqrt{97}}{4} \vee m > \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{97}}{4} < m < 3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 73: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 7

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

$\Rightarrow$ Hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt không tính điểm tiếp xúc

$\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt bội lẻ (không tính nghiệm bội chẵn).

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$			5		32			
	$-\infty$			0				$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt bội lẻ (không tính nghiệm bội chẵn)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \leq 0 \\ 5 \leq m^2 < 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \sqrt{5} \leq |m| < \sqrt{32} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Q}} m \in \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\}.$$

Vậy $m \in \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\}$.

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

ĐS: 27

Đặt: $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = m - 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$					m			$+\infty$
				$m-5$			$m-32$		

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $\begin{cases} m \leq 0 \\ m-5 \geq 0 \\ m-32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 \leq m < 32 \end{cases}$

. Vì m là số nguyên dương cho nên có 27 số m thỏa đề bài

Câu 75: Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là

Lời giải

ĐS: 4

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

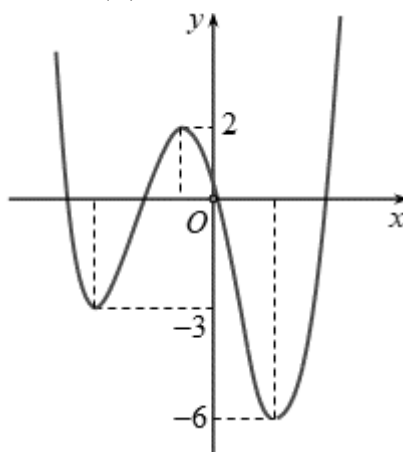
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$m-1$			$+\infty$
</									

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6 < 0 < m-1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$.

Vậy có 4 giá trị nguyên.

Câu 76: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



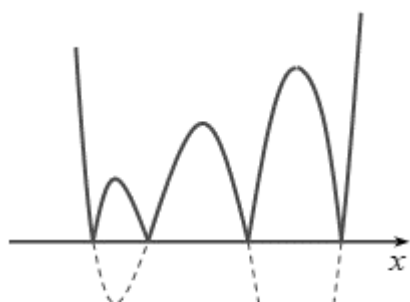
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Lời giải

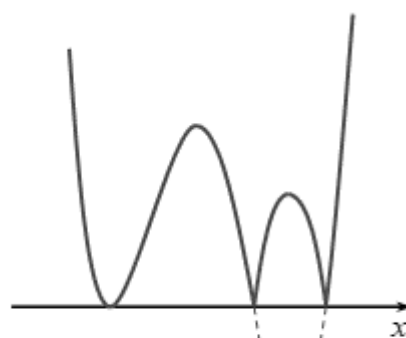
ĐS: 12

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'): y = f(x-1)$ với Ox .

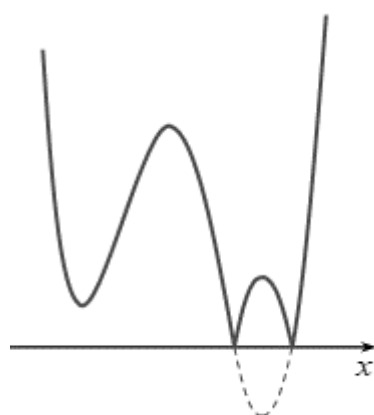
Vì $m > 0$ nên $(C''): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



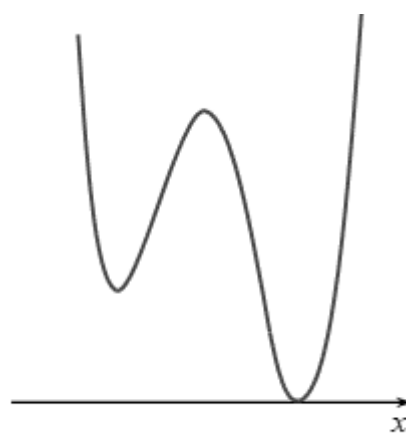
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 77: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 9

$$\text{Ta có } y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right| = \sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(12x^3 + 12x^2 - 24x) \left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)}{\sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 & (1) \\ 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy để hàm số có 7 điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0; 1; -2\}$.

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{m}{2}$				$+\infty$
		$\swarrow$		$\searrow$		$\swarrow$		
			$-32 + \frac{m}{2}$			$-5 + \frac{m}{2}$		

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 + \frac{m}{2} < 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 10.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 78: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

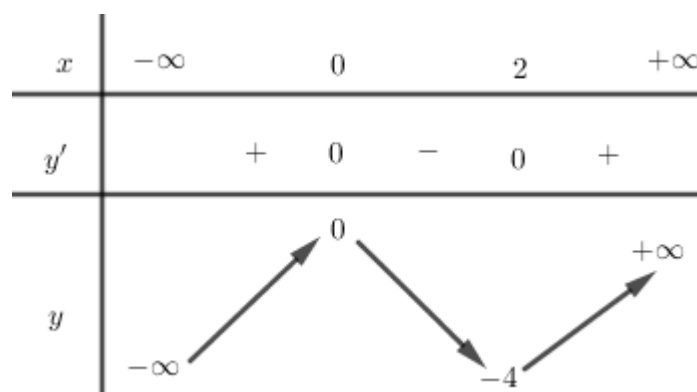
Lời giải

ĐS: 3

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y = x^3 - 3x^2$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 42

$$y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m$$

$$\Rightarrow y' = 15x^4 - 75x^2 + 60$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = m - 16 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 38 \\ x = 1 \Rightarrow y = m + 38 \\ x = 2 \Rightarrow y = m + 16 \end{cases}$$

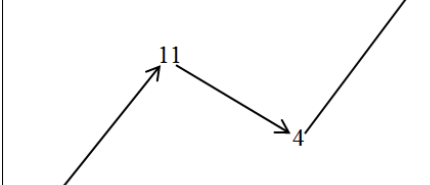
x	$-\infty$	-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	The graph shows a function $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m$ plotted against x. The function is symmetric about the y-axis. The x-axis is marked with $-\infty, -2, -1, 1, 2, +\infty$. The y-axis is marked with $-\infty$ and $y=0$ (indicated by a dashed line). The function has local minima at $x = -2$ and $x = 2$, and local maxima at $x = -1$ and $x = 1$. The y-values at these points are labeled as $m-38$, $m-16$, $m+38$, and $m+16$ respectively. Arrows indicate the mapping from the x-values to the corresponding y-values on the curve.									

Suy ra $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-38 < 0 < m-16 \\ m+16 < 0 < m+38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 < m < 38 \\ -38 < m < -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \overline{17, 37} \\ m = \overline{-37, -17} \end{cases}$$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của m .

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực là

Lời giải

ĐS: 3

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - 2m$ như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$[f(x)-2m]'$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-2m$					

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía trên trục hoành.

+ Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox .

Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

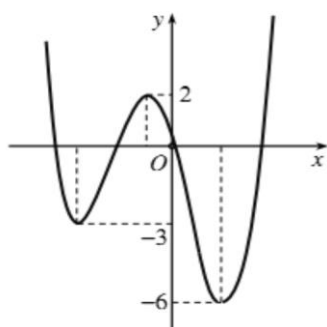
$$(4 - 2m)(11 - 2m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2; \frac{11}{2}\right).$$

Vậy có 3 giá trị nguyên m .

Câu 81: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x - 2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Lời giải

ĐS: 12



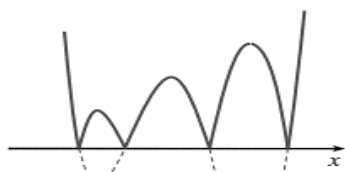
Cách 1: dùng đồ thị.

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x - 2)$ với Ox .

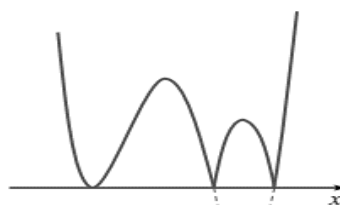
Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x - 2) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x - 2)$ lên trên m đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2) + m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox .

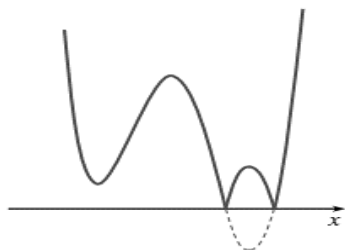
- Ta xét các trường hợp sau:



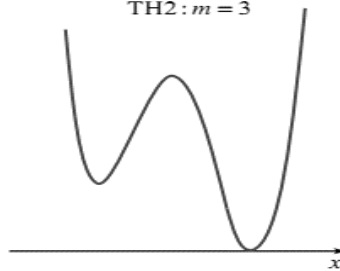
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

+ Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).

+ Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Q}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

*** Cách 2:** đạo hàm hàm số hợp.

$$\text{- Ta có: } y = |f(x-2) + m| = \sqrt{[f(x-2) + m]^2} \Rightarrow y' = \frac{(f(x-2) + m) \cdot f'(x-2)}{\sqrt{[f(x-2) + m]^2}}$$

$$\text{- Xét } f'(x-2) = 0 \quad (1)$$

+ Do phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2) = 0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{- Xét } f(x-2) + m = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -m \quad (2)$$

+ Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1).

+ Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại: với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị.

- Lại do $m \in \mathbb{Q}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 82: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

Lời giải

ĐS: 8

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	m	$-4+m$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có đúng một giao điểm hoặc tiếp xúc với Ox .

Điều kiện này tương đương với $\begin{cases} m \leq 0 \\ -4+m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện $m \in [-5; 5]$ ta có $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 4; 5\}$. Vậy có 8 giá trị thỏa mãn.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$-\infty$

2018

-2018

$+\infty$

2018

2018

-2018

-2018

$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 3

Có $y = f(x - 2017)$ bằng cách tịnh tiến sang bên phải 2017 đơn vị ta có

bảng biến thiên của hàm số $y = f(x - 2017)$

x	$-\infty$	2016	2020	$+\infty$
$f(x-2017)$				

$-\infty \nearrow 2018 \searrow -2018 \nearrow +\infty$

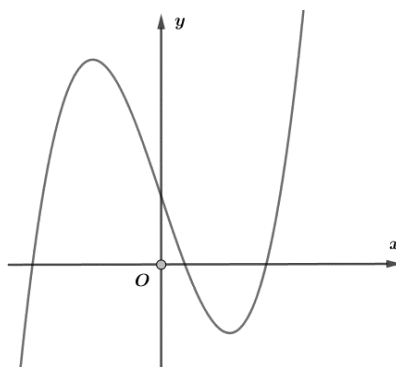
Tính tiến đồ thị hàm số $f(x-2017)$ lên trên 2018 đơn vị và lấy trị tuyệt đối ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x-2017) + 2018|$

x	$-\infty$	2016	2020	$+\infty$
y		4036		

$\searrow 0 \nearrow \searrow 0 \nearrow$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 cực trị.

Câu 84: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 5

Cách 1: Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|) + 2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

Cách 2: Ta có: $y = f(|x|) + 2018 = f(\sqrt{x^2}) + 2018$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = f'(\sqrt{x^2}) \cdot (\sqrt{x^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \cdot f'(|x|).$$

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ cùng dấu với $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ với $x_1 < 0$, $0 < x_2 < x_3$.

Suy ra: $f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x| - x_1)(|x| - x_2)(|x| - x_3)$.

Do $|x| - x_1 > 0$ nên $y' = f'(\sqrt{x^2})(\sqrt{x^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x| - x_2)(|x| - x_3) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Vậy hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có 5 cực trị.

DẠNG 2. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ (Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x)$, $f'(x)$). Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

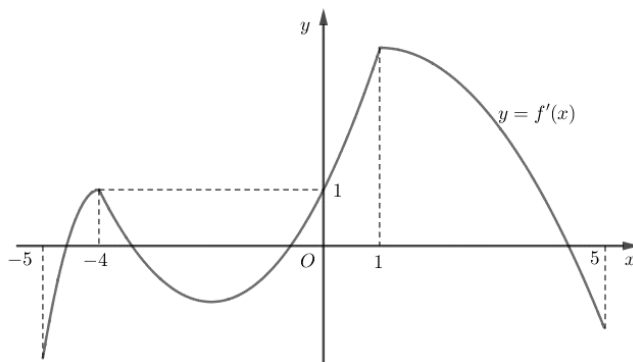
Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u' \cdot f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$

Bước 3. Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



Lời giải

ĐS: 5

Đặt $g(x) = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x) - (2x + 4) = (2x + 4)[f'(x^2 + 4x) - 1].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x = -4 & (1) \\ x^2 + 4x = 0 & (2) \\ x^2 + 4x = a \in (1; 5) & (3) \end{cases}.$$

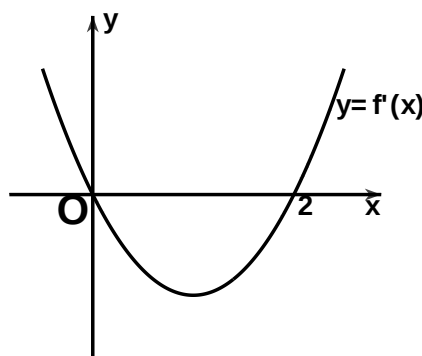
Xét phương trình $x^2 + 4x = a \in (1; 5)$, ta có BBT của hàm số $y = x^2 + 4x$ trên $(-5; 1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		-	0	+	
y	5		0		5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x = -2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = -4; x = 0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$ khác $-2; 0; -4$. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm trong đó có $x = -2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x = -4; x = 0; x = x_1; x = x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là

Lời giải

ĐS: 1

Ta có $g(x) = f(-x^2 + x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 1)f'(-x^2 + x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 1)f'(-x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ f'(-x^2 + x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ -x^2 + x = 0 \\ -x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (-2x + 1)f'(-x^2 + x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 > 0 \\ f'(-x^2 + x) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -2x + 1 < 0 \\ f'(-x^2 + x) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -x^2 + x > 2 \\ -x^2 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < -x^2 + x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$				

$-\infty$ $\nearrow$ 4 $\searrow$ -2 $\nearrow$ $+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

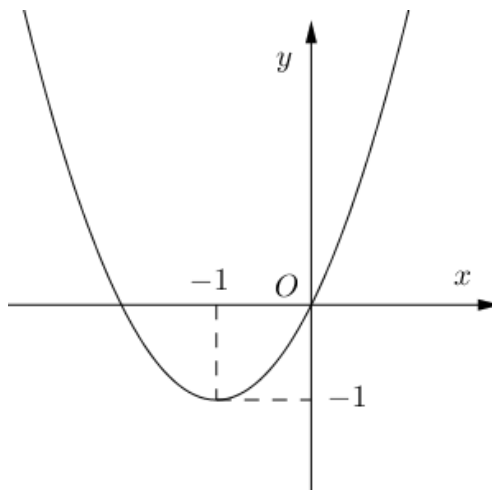
Lời giải

ĐS: 5

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \quad (1)$

Từ BBT ta thấy phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = a < -1 & (2) \\ x^2 + 2x = b \in (-1; 1) & (3) \\ x^2 + 2x = c > 1 & (4) \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3); phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 3

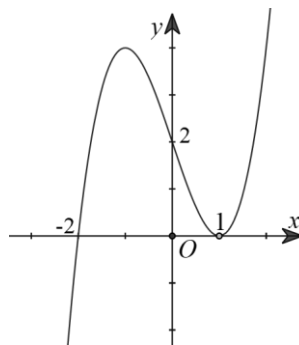
Vì hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $-2; -1; 0$ (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có $y' = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do $y' = 0$ có một nghiệm bội lẻ ($x = 1$) và hai nghiệm đơn ($x = 0$; $x = 2$) nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



Lời giải

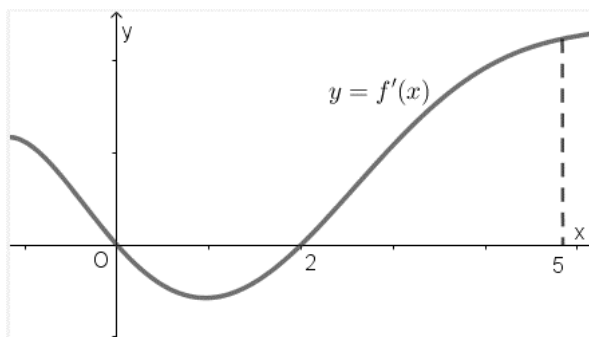
ĐS: 3

Quan sát đồ thị ta có $y = f(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{d}{dx} f(x^2 - 3) = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



Lời giải

ĐS: 3

Xét hàm số $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2)$.

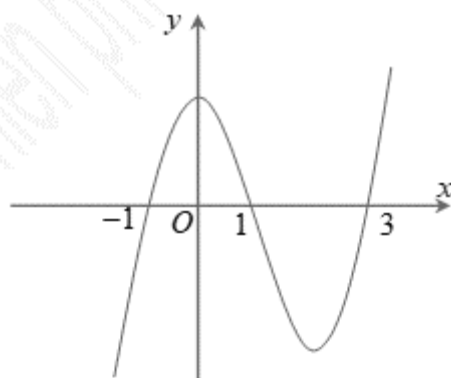
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $y = f(x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 91: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là



Lời giải

ĐS: 1

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y = [f(u)]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Ta có

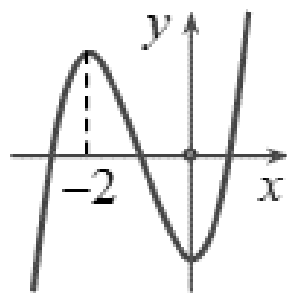
$$y' = \left[f(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) \right]' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3)$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(x+1)^2(x^2 + 2x - 7)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 3)} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-1 - 2\sqrt{2}$		-1		$-1 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y							

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



Lời giải

ĐS: 3

Ta có: $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x-4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)f'(x^2-2x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(x^2-2x-4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x-4=-2 \\ x^2-2x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{5} \\ x=1-\sqrt{5} \end{cases} \text{ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).}$$

Ta chọn $x = -2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2) = 2 \cdot (-3) \cdot f'(4)$.

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó: $f'(4) > 0$.

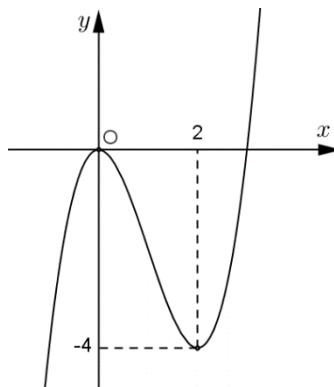
Suy ra: $g'(-2) < 0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$1+\sqrt{5}$	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 93: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



Lời giải

ĐS: 4

Xét hàm số $y = f[f(x)]$, $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in (2; +\infty) \\ x = b \in (a; +\infty) \end{cases}.$$

Với $x > b$, ta có $f(x) > 2 \Rightarrow f'[f(x)] > 0$

Với $a < x < b$, ta có $0 < f(x) < 2 \Rightarrow f'[f(x)] < 0$

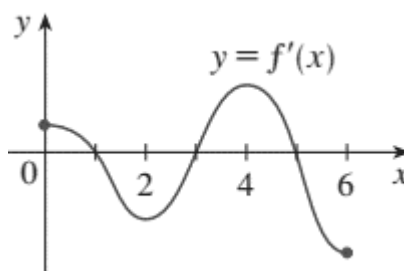
Với $0 < x < a$ hoặc $x < 0$, ta có $f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0$

BBT:

x	$-\infty$	0	2	a	b	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-	+
y						

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f[f(x)]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



Lời giải

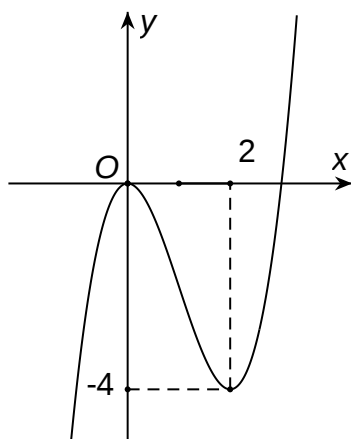
ĐS: 7

Ta có $y' = 2f(x)f'(x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$.

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 95: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?



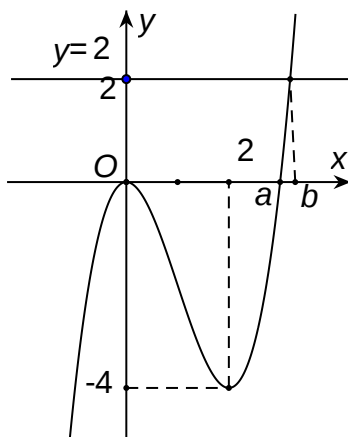
Lời giải

ĐS: 4

Ta có: $y' = [f(f(x))]' = f'(x) \cdot f'(f(x))$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$

+ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ vì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = 0; x = 2$

+ $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bội chẵn $x = 0$

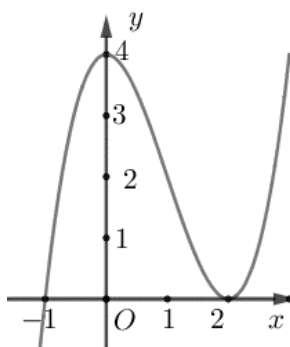
và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = a > 2$.

Kẻ đường thẳng $y = 2$ nhận thấy phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = b > a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x = 0; x = 2, x = a, x = b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là.



Lời giải

ĐS: 6

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0(*) \\ f(x) = 2(**) \end{cases}$$

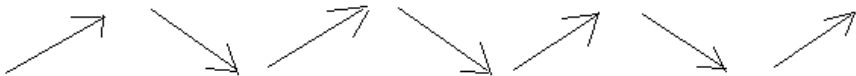
Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (*) có hai nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Phương trình (**) có ba nghiệm $\begin{cases} x = m (-1 < m < 0) \\ x = n (0 < n < 1) \\ x = p (p > 2) \end{cases}$

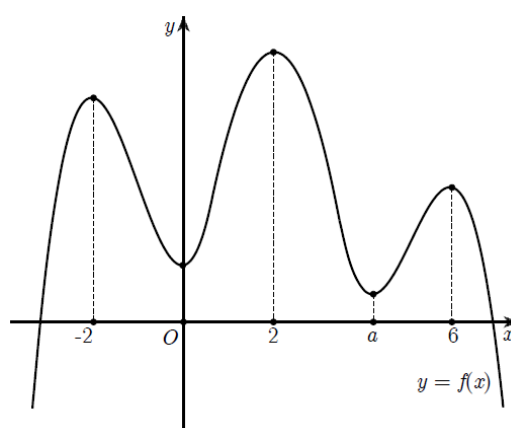
$g'(x) = 0$ có nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \\ x = 0 \\ x = n \\ x = 2 \\ x = p \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	m	0	n	2	p	$+\infty$					
$f'(x)$	+		+		+	0	-		-	0	+		+
$f'(f(x))$	+	0	-	0	+		+	0	-	0	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$													

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 6 cực trị.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

Lời giải

ĐS: 11

Từ đồ thị ta có $-2; 0; 2; a; 6$ là tất cả các nghiệm của $f'(x)$.

Ta có: $y' = \left(f(x^6 - 3x^2) \right)' = (6x^5 - 6x) f'(x^6 - 3x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'(x^6 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2 \\ x^6 - 3x^2 = 0 \\ x^6 - 3x^2 = 2 \\ x^6 - 3x^2 = a \\ x^6 - 3x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 1 \\ x = \pm 1 \\ x = 0, x = \pm \sqrt[4]{3} \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm m, m > \sqrt{2} \\ x = \pm n, n > m \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$				0				$+\infty$

$\swarrow$ -2 $\nearrow$ $\searrow$ -2 $\nearrow$

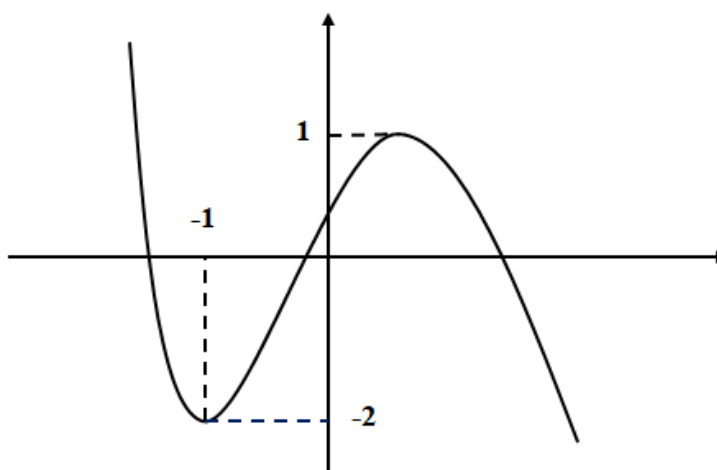
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$, ta suy ra ± 1 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = -2$ và 0 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = 0$. Do đó ± 1 và 0 là nghiệm kép của $f'(x^6 - 3x^2)$. Do vậy ± 1 và 0 là nghiệm bội ba của y' .

Các nghiệm khác ± 1 và 0 của y' đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là:



Lời giải

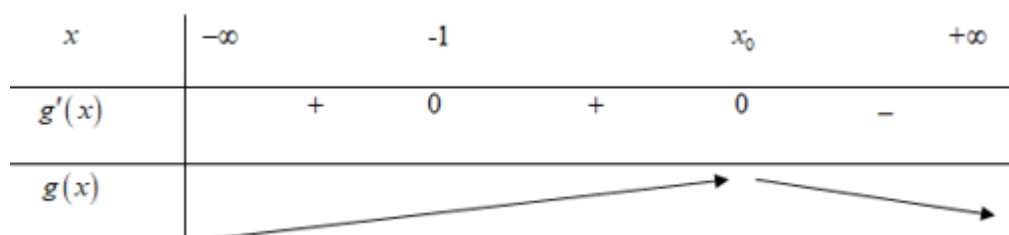
ĐS: 1

Đặt $g(x) = f(x) + 2x$ suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_0 > -1 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị ta có: Trên $(-\infty; -1)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

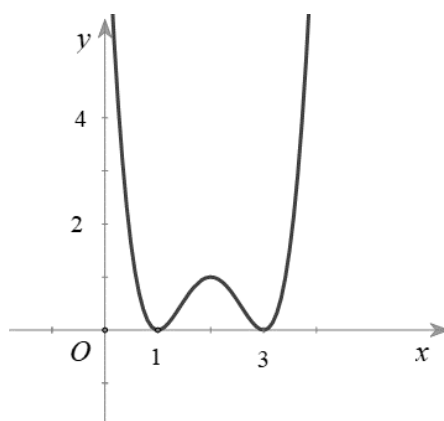
Trên $(-1; x_0)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

Trên $(x_0; +\infty)$ thì $f'(x) < -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 < 0$.



Vậy hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có 1 cực trị.

Câu 99: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?

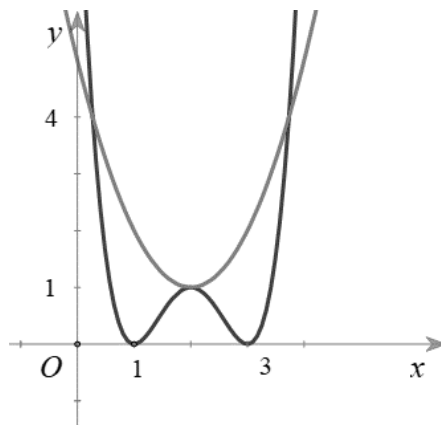


Lời giải

ĐS: 2

Có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 4x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 5$

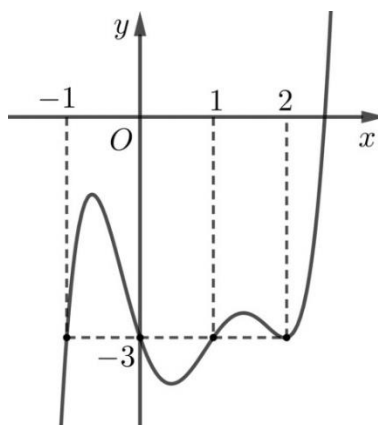
Ta có đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới



Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 100: Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu cực trị?



Lời giải

ĐS: 5

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) + 3x$$

$$h'(x) = f'(x) + 3$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$$

Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x) = -3$ có 4 nghiệm $\{-1; 0; 1; 2\}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$			$f(0)$		$+\infty$

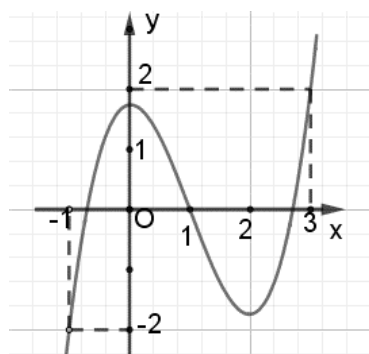
Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm $x_1 < -1$; và $x_2 > 1$ (do có $f(0) < 0$)

Khi đó ta có

x	$-\infty$	x_1	-1	0	1	x_2	$+\infty$
$g(x)= h(x) $	$+\infty$	0		$ f(0) $		0	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có 5 cực trị.

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$.
Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



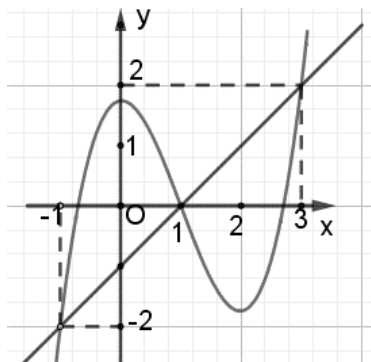
Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

Lời giải

ĐS: 5

* $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$

Đường thẳng $y = x - 1$ đi qua các điểm $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y = g(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$		$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(3)$		

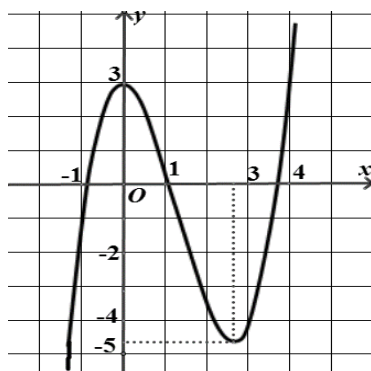
* Đồ thị hàm số $y = g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y = g(|x|)$ như sau

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$		$g(3)$	$g(1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(3)$	

Vậy hàm số $y = g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$



Lời giải

ĐS: 8

$$\text{Ta có: } g'(x) = 3f'(x) \cdot f'(f(x)), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x) \cdot f'(f(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số trên ta thấy:

+ Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x = 0; x = \alpha$ với $\alpha \in (1; 3)$.

+ Phương trình $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = \alpha \end{cases}$.

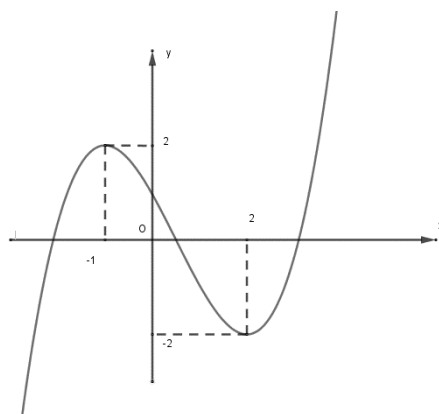
+ Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2 nghiệm trên.

+ Phương trình $f(x) = \alpha$ với $\alpha \in (1; 3)$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm.

Do đó hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = \left| [f(x)]^2 - 4f(x) + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



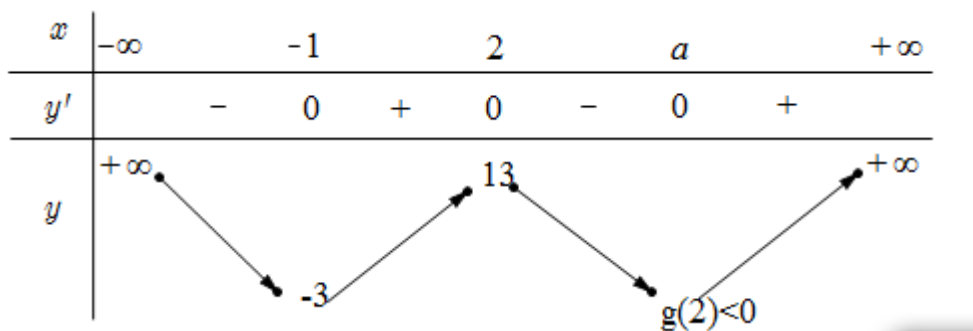
Lời giải

ĐS: 7

Đặt $g(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$.

Khi đó, $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a (a > 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Do đó, ta có bảng biến thiên:

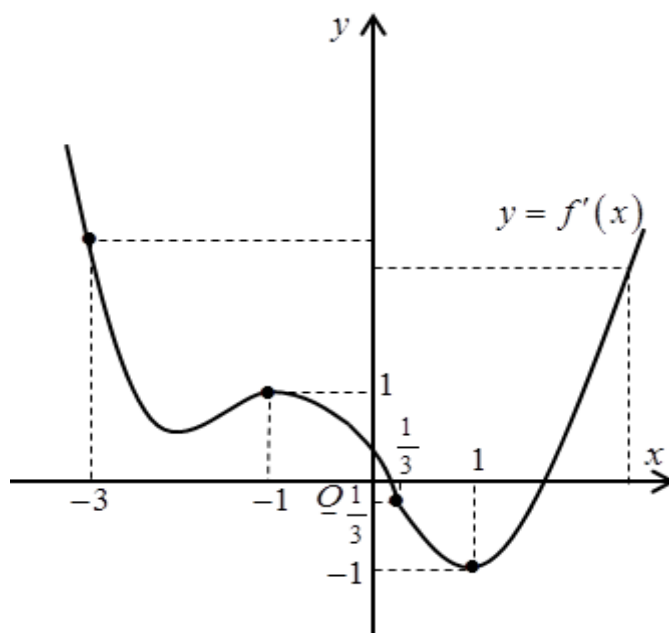


Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox .

Vậy đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$ có số cực trị là $3 + 4 = 7$.

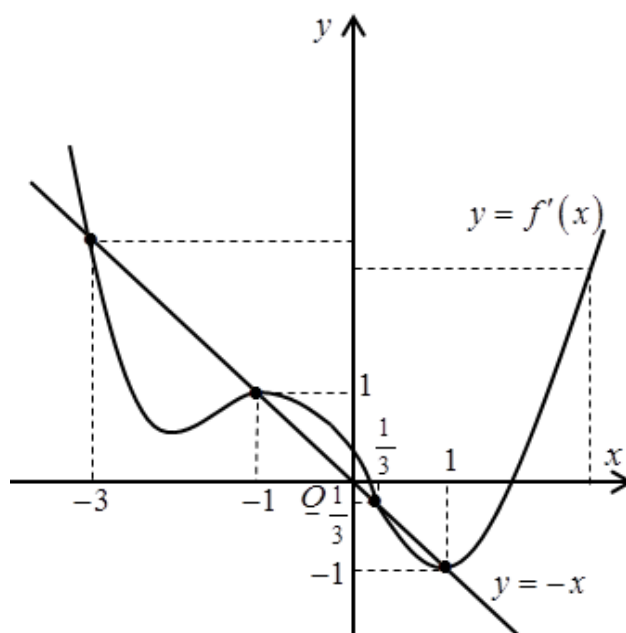
Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.



Lời giải

ĐS: 7



Ta có: $g'(x) = 5 \cos x f'\left(\frac{5 \sin x - 1}{2}\right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 \cos x f'\left(\frac{5 \sin x - 1}{2}\right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f'\left(\frac{5 \sin x - 1}{2}\right) = -\frac{5 \sin x - 1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -3 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -1 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 5 \sin x - 1 = -6 \\ 5 \sin x - 1 = -2 \\ 5 \sin x - 1 = \frac{2}{3} \\ 5 \sin x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) \vee x = 2\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right), (\text{ Vì } 0 < x < 2\pi). \\ x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \\ x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

Suy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x = \frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 9

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$* y = h(x) = f(|x|^2 - 2|x|)$$

$$y' = h'(x) = f'(|x|^2 - 2|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \cdot (2|x| - 2).$$

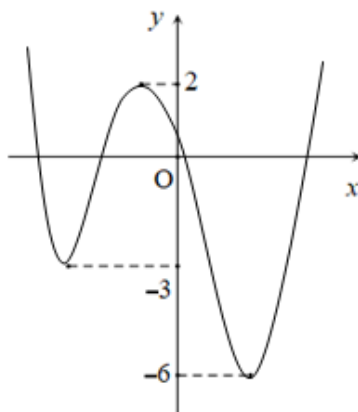
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ |x|^2 - 2|x| = 0 \\ |x|^2 - 2|x| = 1 \\ |x|^2 - 2|x| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình $h'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x = 0$ mà $x = 0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 106: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



Lời giải

ĐS: 15

Đặt $h(x) = 2f(x-1) + m \Rightarrow g(x) = |h(x)|$.

□ Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y = h(x)$ + số giao điểm của $y = h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y = h(x)$.

□ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y = h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

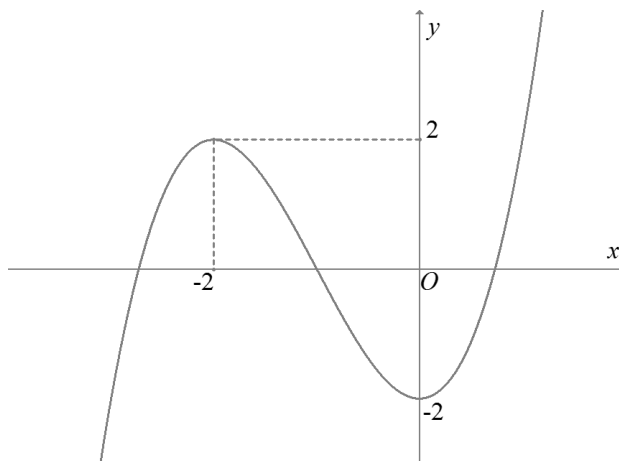
□ Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

□ Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\frac{m}{2} \geq 2$ hoặc $-6 < -\frac{m}{2} \leq -3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-12;12]} \text{có 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$

Câu 107: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$



Lời giải.

ĐS: 3

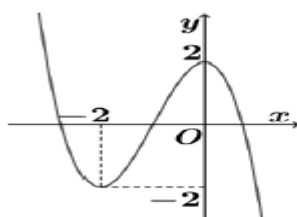
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = -2; x = 0$.

$g(x) = f(-2x^2 + 4x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $g'(x) = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 4x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ -2x^2 + 4x = 0 \\ -2x^2 + 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Như vậy $g'(x)$ có 3 nghiệm, trong đó 1 là nghiệm bội 3, 0 và 2 là nghiệm đơn nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 108: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

Lời giải

ĐS: 3

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khi đó $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có

$$\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=-2 \\ f(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-2 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b=0 \\ -8a+4b=-4 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}.$$

Vậy $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

Khi đó, ta có $g(x) = f(-x^2 + x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 2$.

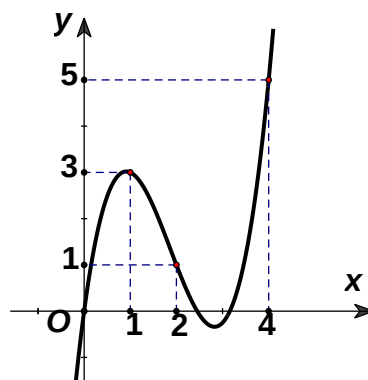
$$g'(x) = 3x(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	0.5	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Suy ra, hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ có ba điểm cực tiểu.

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$; $f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

Lời giải

ĐS: 3

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) - 2x$.

Ta có: $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x}$ (vô nghiệm $\forall x \leq 0$).

Đặt $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}, \forall t > 0$.

Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1) = -2(2f'(1) - 2) = -8 < 0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists x_0 \in (0;1): h'(x_0) = 0$.

Vậy $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) - 2x = 0$ (**).

Ta có: $h(0) = f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h(\sqrt{x_0}).h(2) = (f(x_0) - 2\sqrt{x_0})(f(4) - 4) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2): h(x_1) = 0$.

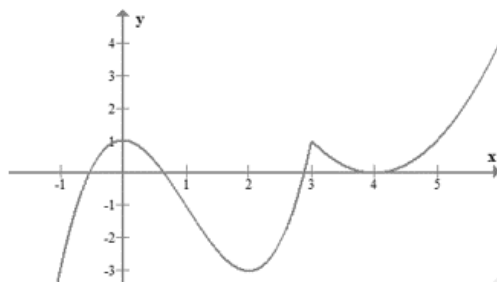
Nên (**) có nghiệm $x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x) = f(x^2) - 2x = 0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(4; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| - 2)$ bằng



Lời giải

ĐS: 9

$$g(x) = f(2|x| - 2) \Rightarrow g'(x) = (2|x| - 2)' f'(2|x| - 2) = (2\sqrt{x^2} - 2)' f'(2|x| - 2) = \frac{x}{|x|} f'(2|x| - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{|x|} f'(2|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow f'(2|x| - 2) = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow f'(2|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| - 2 = 0 \\ 2|x| - 2 = 2 \\ 2|x| - 2 = 3 \\ 2|x| - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ |x| = 2 \\ |x| = \frac{5}{2} \\ |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \frac{5}{2} \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = f(2|x| - 2)$ có 9 điểm cực trị

Câu 111: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$

Lời giải

ĐS: 5

Ta có $g(x) = f(x^2 - |x|) = f(|x|^2 - |x|)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng thêm 1.

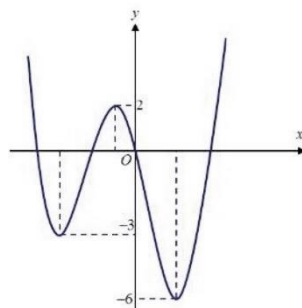
$$\text{Xét hàm số } h(x) = f(x^2 - x) \Rightarrow h'(x) = (2x - 1) f'(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = -1 \\ x^2 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu hàm số $h(x) = f(x^2 - x)$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	-

Hàm số $h(x) = f(x^2 - x)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|) = f(|x|^2 - |x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 112: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Đặt } g(x) = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right| \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x+2018) \left[f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right]}{\left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|}$$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+2018) = 0 & (1) \\ f(x+2018) = -\frac{m^2}{3} & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

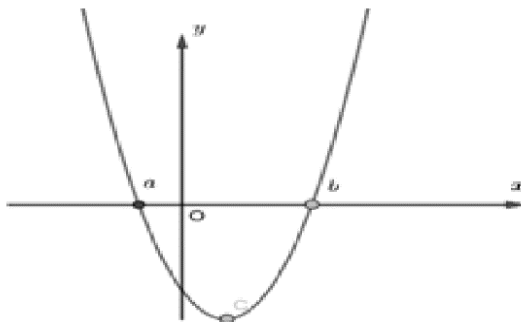
Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m^2}{3} > 2 \\ -6 < -\frac{m^2}{3} \leq -3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}^*) \Leftrightarrow m \in \{3; 4\}.$$

Vậy tổng các phần tử là 7.

DẠNG 9. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ $f(u(x))$ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 113: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) = 1$. Số giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có đúng 5 điểm cực trị là



Lời giải

ĐS: 9

Cách 1:

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)[f(x) + 2]$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c (c < a) \end{cases}$$

Pt có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ có 3 điểm cực trị

$$\text{Xét } h(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 4f(x) = -m \quad (2)$$

Để $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT (2) có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

Xét hàm số $t(x) = f^2(x) + 4f(x)$

Ta có Bảng biến thiên của $t(x)$:

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$		
$t'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$t(x)$	$+\infty$		$t(a)$		$+\infty$		

<

Từ YCBT $\Leftrightarrow t(x) = -m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ pb

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq t(a) > 5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5; m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -t(a) < -5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Cách 2:

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(a)$	$f(b) = 1$	$+\infty$	

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(x) &= 2f'(x)f(x) + 4f'(x) \\ \Rightarrow h'(x) &= 2f'(x)[f(x) + 2] \\ h'(x) &= 0 \Rightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c(c < a) \end{cases} \end{aligned}$$

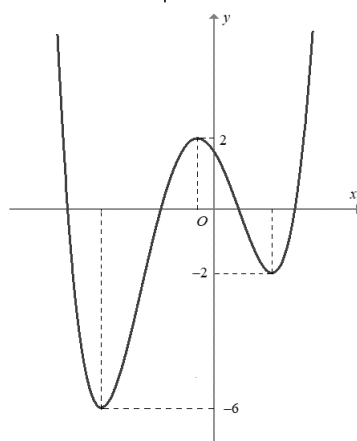
x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$
$h'(x)$		0	0	0	
$h(x)$	$+\infty$	$-4+m$	$h(a)$	$5+m$	$+\infty$

Từ YCBT $g(x) = |h(x)| = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị khi:

$$\begin{cases} h(a) \leq 0 \\ -4+m < 0 \leq 5+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq f^2(a) + 4f(a) < -5 \\ -5 \leq m < 4 \end{cases}$$

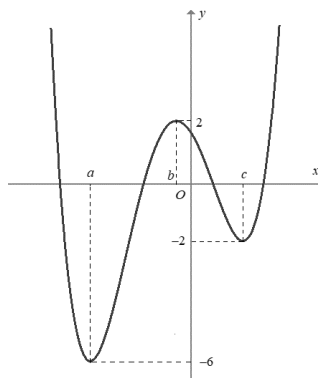
$$\Leftrightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?



Lời giải

ĐS: 2



Gọi a, b, c ($a < b < c$) là ba điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó: $f(a) = -6; f(b) = 2; f(c) = -2$.

Xét hàm $h(x) = f(x + 2020)$ với $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x) = f'(x + 2020) \cdot (x + 2020)' = f'(x + 2020)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2020 \\ x = b - 2020 \\ x = c - 2020 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$	$a-2020$	$b-2020$	$c-2020$	$+\infty$				
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$									

Hàm số $g(x) = |f(x + 2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x + 2020) + m^2 = 0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc

$$\{a - 2020; b - 2020; c - 2020\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 2 \\ m^2 = -2 \\ 2 < m^2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < m < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < m < \sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m = 2$ và $m = -2$ thì hàm số $g(x) = |f(x + 2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 115: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x + 2)^4(x + 4)^3[x^2 + 2(m + 3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 8

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4 .

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Trong đó $x_1 = -4$.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}.$$

$$\text{Theo định lí Viète ta có } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2 = 6m + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 15

$$\text{Đặt } g(x) = f(x^2 - 8x + m)$$

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 & (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

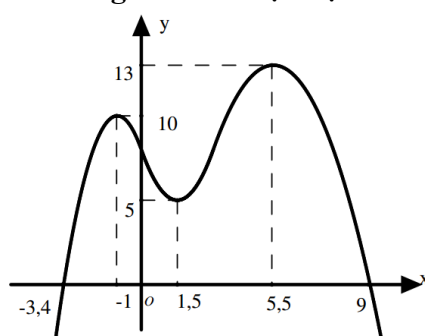
Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



Lời giải

ĐS: 8

$$g'(x) = f'(x) - m$$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x) = m$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có điều kiện } \begin{cases} 0 < m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}.$$

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 118: Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 16

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1, x = 2 \text{ là nghiệm kép nên khi qua giá trị } x = 2 \text{ thì } f'(x) \\ x = 3 \end{cases}$

không bị đổi dấu.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 10x + m + 9)$ khi đó $g'(x) = f'(u) \cdot (2x - 10)$ với $u = x^2 - 10x + m + 9$.

$$\text{Nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 1 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 8 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 10x + m + 6 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ h(5) \neq 0 \\ p(5) \neq 0 \end{cases}, \text{ (Với } h(x) = x^2 - 10x + m + 8 \text{ và } p(x) = x^2 - 10x + m + 6).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 - m > 0 \\ 19 - m > 0 \\ -17 + m \neq 0 \\ -19 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 119: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 2

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (TM)}$

Với $m = -1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Loại)

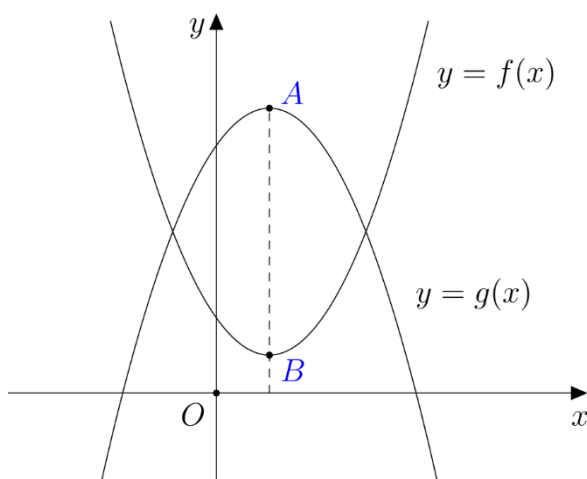
Trường hợp 2: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

$$\text{Điều kiện tương đương } \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 1^2 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = 0$

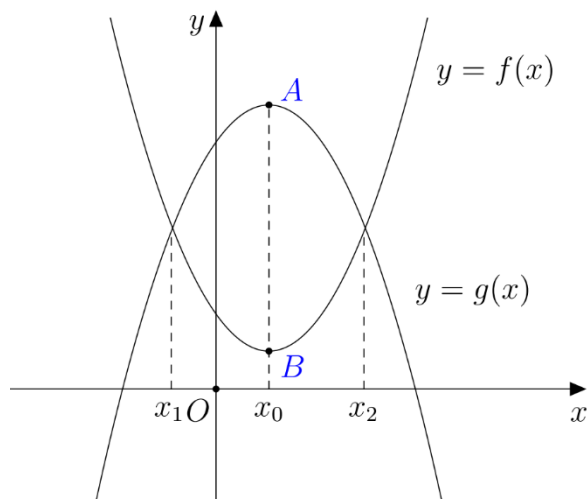
Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 120: Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng 5 điểm cực trị?



Lời giải

ĐS: 3



Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$;

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$ ($x_1 < x_0 < x_2$);

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = -\frac{7}{4}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ là:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = k(x) = |f(x) - g(x)|$ là:

x	$-\infty$	x_1	x_0	x_2	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$k(x)$	$+\infty$	0	$\frac{7}{4}$	0	$+\infty$

Do đó, hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y = |k(x) + m|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = k(x) + m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x) + m = 0$, mà hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y = ||f(x) - g(x)| + m|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = k(x)$, phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m \geq \frac{7}{4} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{4}$.

Vì $m \in \mathbb{Q}$, $m \leq -\frac{7}{4}$ và $m \in (-5; 5)$ nên $m \in \{-4; -3; -2\}$.

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b}; c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ là

Lời giải

ĐS: 45

Hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có đạo hàm là

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$$

- Để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 dương. Tương đương với phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ S = \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{5}{4} \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow M = a^2 + b^2 + c^2 = 45.$$