

## CHƯƠNG

## I

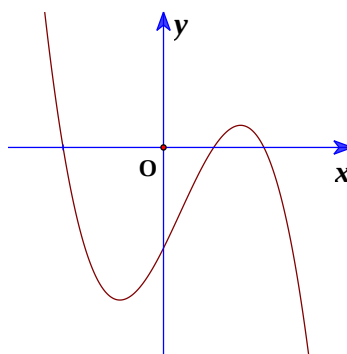
# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

## BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ.



Trong các số  $a, b, c$  và  $d$  có bao nhiêu số dương?

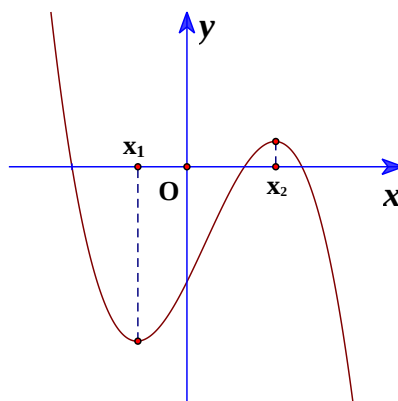
**Lời giải**

**ĐS: 2**

Đồ thị có dạng như hình, dễ thấy  $a < 0$ .

Ta có với  $x = 0$  thì  $y = d \Rightarrow d < 0$ .

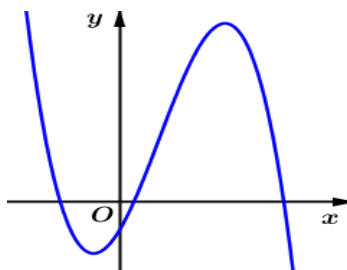
Gọi  $x_1, x_2$  là cực trị của hàm số. Giả sử  $x_1 < x_2$



$$\text{Để thấy } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

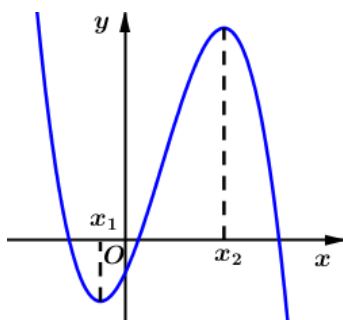
Vậy trong các số  $a, b, c$  và  $d$  có 2 số dương.

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị  $a, b, c, d$  có bao nhiêu giá trị âm?



**Lời giải**

**ĐS: 2**



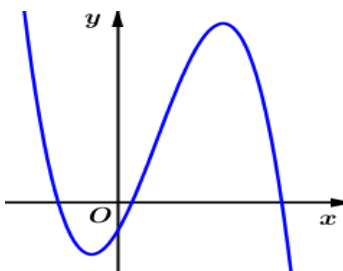
Qua đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  giao với trục  $Oy$  tại điểm  $D(0; d)$  nằm phía dưới trục  $Ox$  nên  $d < 0$ , và hình dạng của đồ thị hàm số ứng với trường hợp  $a < 0$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x_1 < 0$ , đạt cực đại tại  $x_2 > 0$  và  $x_1 + x_2 > 0$ .  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của

$$\text{phương trình } 3ax^2 + 2bx + c = 0. \text{ Khi đó: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \text{ mà } a < 0 \text{ nên: } \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

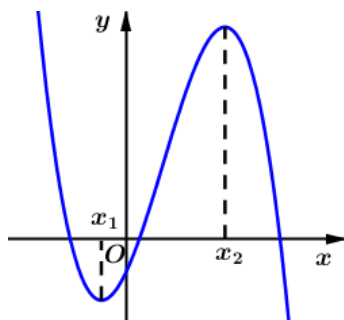
Vậy có 2 giá trị âm trong các giá trị  $a, b, c, d$  là  $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị  $a, b, c, d$  có bao nhiêu giá trị âm?



Lời giải

ĐS: 2



Qua đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  giao với trục  $Oy$  tại điểm  $D(0; d)$  nằm phía dưới trục  $Ox$  nên  $d < 0$ , và hình dạng của đồ thị hàm số ứng với trường hợp  $a < 0$ .

Hàm số đạt cực tiểu tại  $x_1 < 0$ , đạt cực đại tại  $x_2 > 0$  và  $x_1 + x_2 > 0$ .  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của

phương trình  $3ax^2 + 2bx + c = 0$ . Khi đó: 
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \text{ mà } a < 0 \text{ nên: } \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị âm trong các giá trị  $a, b, c, d$  là  $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $1$ | $+\infty$ |     |

Có bao nhiêu số dương trong các số  $a, b, c, d$ ?

Lời giải

ĐS: 3

Vì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

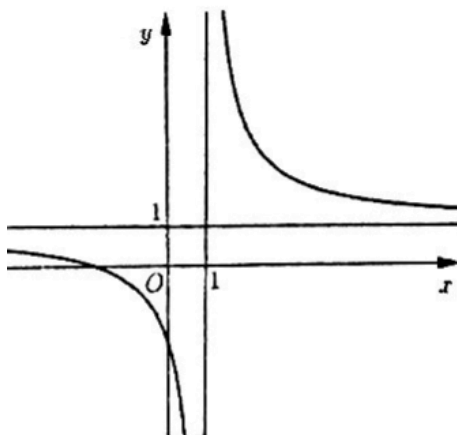
$f(0) = d = 1 > 0 \Rightarrow d > 0$ .

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$  vì  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 0 \Rightarrow c = 0$ .

$x_{cd} + x_{ct} = -2 + 0 = -2 < 0 \Rightarrow \frac{-2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0$ .

Vậy có ba số dương.

**Câu 5:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ.



Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số dương?

**Lời giải**

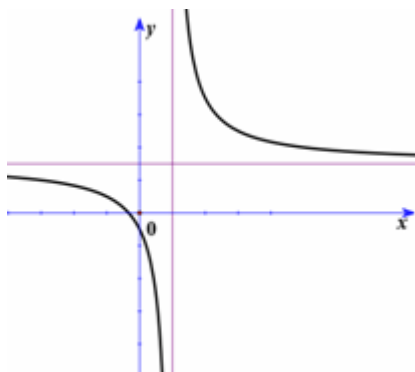
**ĐS: 3**

Từ hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) và đồ thị của hàm số, ta có tiệm cận đứng  $x=1 \Rightarrow c=1$ ,

tiệm cận ngang  $y=1 \Rightarrow a=1$  và  $f(0) = -\frac{b}{c} < 0 \Rightarrow \frac{b}{c} > 0 \Rightarrow b > 0$ .

Vậy  $a, b, c > 0$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó  $d < 0$ . Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số dương?



**Lời giải**

**ĐS: 3**

Ta có đường tiệm cận ngang của hàm số là  $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow a, c$  cùng dấu.

Đường tiệm cận đứng  $x = -\frac{d}{c} > 0$ . Do  $d < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow a > 0$ .

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm suy ra  $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$

Vậy có 3 số dương.

**Câu 7:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax-2}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau.

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $3$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         |           | +         |
| $f(x)$  | $2$       | $+\infty$ | $2$       |

Trong các số  $a, b, c$  có bao nhiêu số dương?

**Lời giải**

**ĐS: 2**

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định nên  $f'(x) > 0 \Rightarrow a.c + 2.b > 0$ .

Ta có  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax-2}{bx+c} = \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$ .

Tiệm cận đứng của hàm số là  $x = 3$  nên  $\frac{-c}{b} = 3$  hay  $c = -3b$ .

Từ đây ta có  $2b(-3b) + 2b > 0 \Leftrightarrow 2b(-3b+1) > 0 \Leftrightarrow 0 < b < \frac{1}{3}$ .

Vì  $b, c$  trái dấu nên  $c < 0$ ,  $a, b$  cùng dấu nên  $a > 0$ .

Vậy  $a, b$  là hai số dương.

**Câu 8:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax-4}{bx+c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau:

|         |           |           |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$      | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         |           | -         |
| $f(x)$  | $1$       | $+\infty$ | $1$       |

Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số dương?

**Lời giải**

**ĐS: 0**

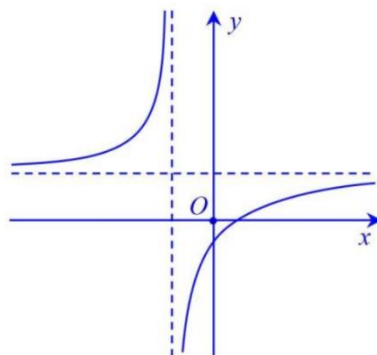
Tiệm cận đứng:  $x = -2 < 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} = -2 \Rightarrow c = 2b$ .

Tiệm cận ngang:  $y = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$ .

$f'(x) = \frac{ac+4b}{(bx+c)^2} < 0 \Rightarrow ac+4b < 0 \Rightarrow 2b^2+4b < 0 \Rightarrow b \in (-2; 0)$ .

Vậy  $b < 0$ . Do đó  $a < 0, c < 0$ .

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{cx-2}$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Trong các số  $a, b$  và  $c$  có bao nhiêu số dương?

**Lời giải**

**ĐS: 1**

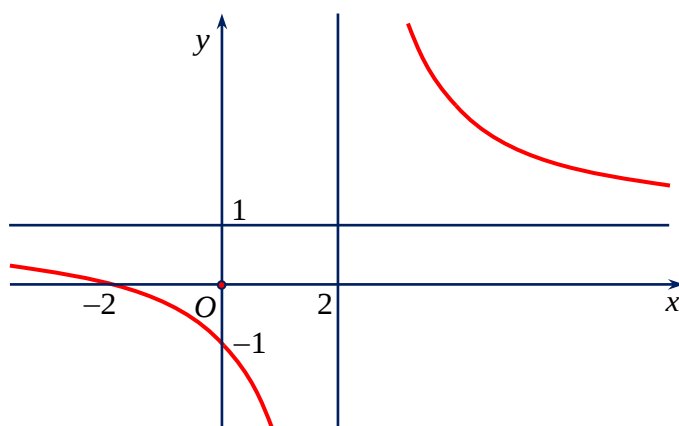
Dựa vào đồ thị ta có TCD  $x = \frac{2}{c} < 0 \Rightarrow c < 0$

TCN  $y = \frac{a}{c} > 0$  mà  $c < 0 \Rightarrow a < 0$

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ  $-\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0$  mà  $a < 0 \Rightarrow b > 0$ .

Vậy trong các số  $a, b$  và  $c$  có 1 số dương.

**Câu 10:** Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+2}{cx+b}$  với  $a, b, c$  là các số thực.



Giá trị của biểu thức  $P = a + b + c$  là

**Lời giải**

**ĐS: 0**

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có tọa độ  $(-2; 0)$  nên ta có:

$$\frac{-2a+2}{-2c+b} = 0 \Rightarrow a = 1. \text{ Vậy loại A}$$

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow c = a = 1$ . Vậy loại D

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = 2 \Rightarrow -\frac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = -2c = -2$ .

$$P = a + b + c = 1 + (-2) + 1 = 0$$

**Câu 11:** Biết rằng hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.

Tính giá trị  $f(a + b + c)$ .

**Lời giải**

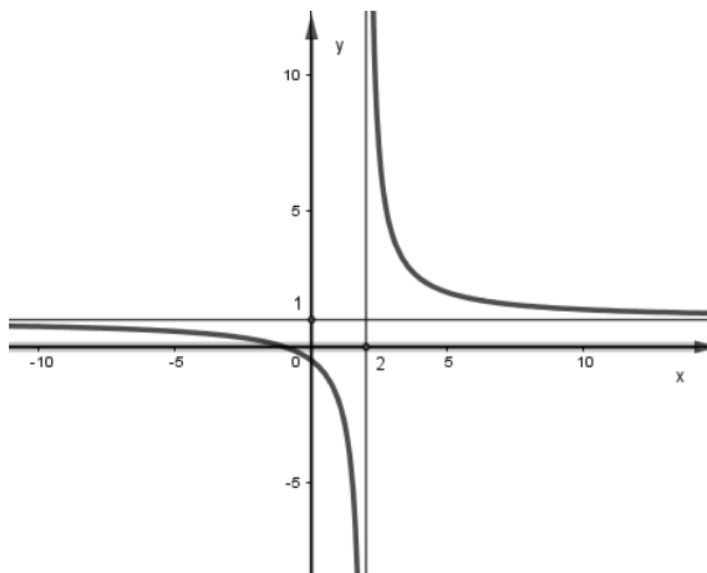
**ĐS:**  $f(a + b + c) = -1$

Ta có  $y' = 4ax^3 + 2bx$ .

Từ đồ thị, ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} f(0) = c = 1 \\ f'(\pm 1) = 2a + b = 0 \\ f(\pm 1) = a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Suy ra  $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 \Rightarrow f(a + b + c) = f(-1) = -1$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+1}{bx-2}$  có đồ thị như hình vẽ. Tính  $T = a + b$ .



**Lời giải**

**ĐS:**  $T = 2$

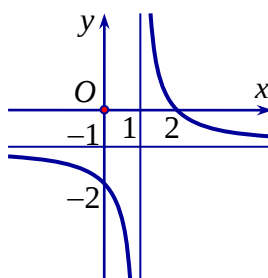
$$y' = \frac{-2a - b}{(bx - 2)^2}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số  $\Rightarrow$  hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định  $\Rightarrow -2a - b < 0$  (\*).

Đồ thị có hai đường tiệm cận:  $x = 2$  và  $y = 1$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{2}{b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ Thỏa mãn (*). Vậy } T = 2.$$

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = \frac{ax + b}{x + c}$  có đồ thị như hình vẽ, với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $T = a - 3b + 2c$ .



**Lời giải**

**ĐS:**  $T = -9$

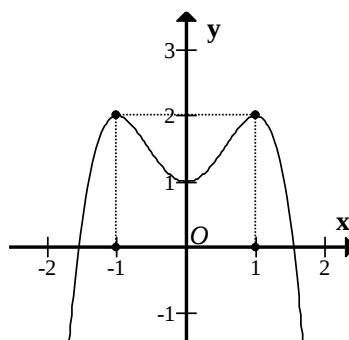
Tiệm cận ngang  $y = -1 \Rightarrow a = -1$ .

Tiệm cận đứng  $x = 1 \Rightarrow c = -1$ .

Đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(0; -2) \Rightarrow -2 = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 2$ .

Vậy  $T = a - 3b + 2c = -1 - 3.2 + 2.(-1) = -9$ .

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình dưới. Tính  $f(4a + 2b + c)$ .



**Lời giải**

**ĐS:**  $f(4a + 2b + c) = 2$

Do đồ thị nhận các điểm  $(0;1), (-1;2), (1;2)$  làm cực trị nên ta có

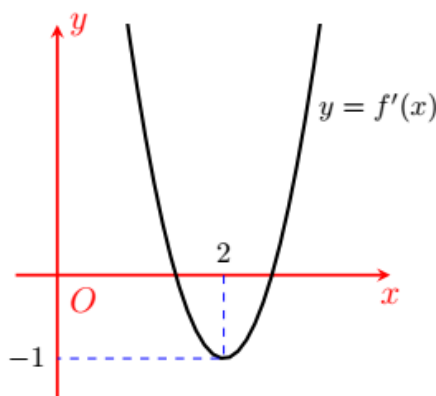
$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow 4a + 2b + c = 1$$

Vậy  $f(4a + 2b + c) = f(1) = 2$ .

**Cách 2:** Do hàm số đạt cực đại tại  $x = 1 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0$  và đồ thị đi qua điểm  $(0;1) \Rightarrow c = 1$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 1 \Rightarrow f(4a + 2b + c) = 2.$$

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Tìm  $T = a + b$ .



**Lời giải**

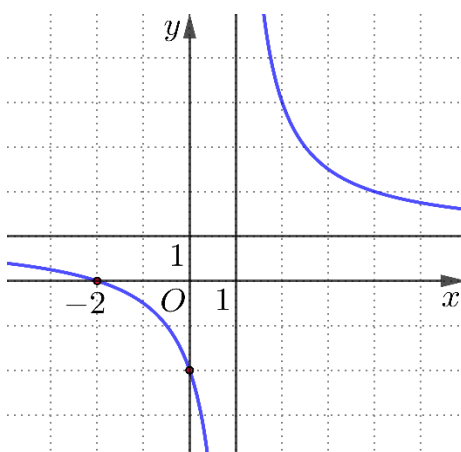
**ĐS:**  $T = a + b = -6 + 11 = 5$

Xét hàm số  $y' = 3x^2 + 2ax + b$  có đồ thị là Parabol đi qua điểm  $(2; -1)$  và có trục đối xứng là

$$x = 2 \text{ nên ta có } \begin{cases} -\frac{2a}{6} = 2 \\ 12 + 4a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 11 \end{cases}.$$

Vậy  $T = 5$ .

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  là có đồ thị như hình vẽ sau. Giá trị  $T = a+2b+3c$  bằng



**Lời giải**

**ĐS:**  $T = a+2b+3c = 1+4-3 = 2$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng  $x=1 \Rightarrow c=-1$ .

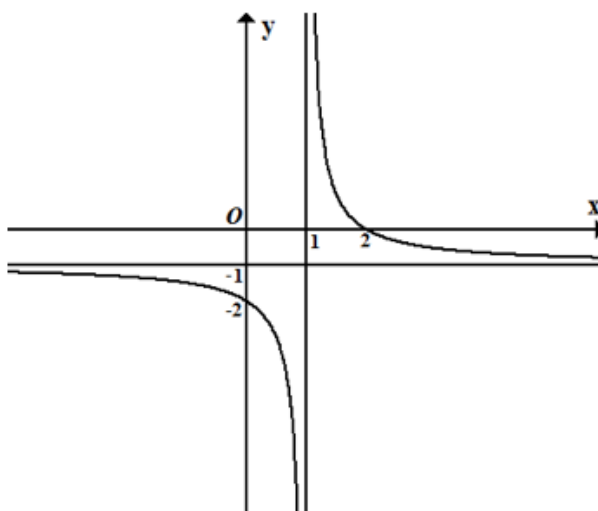
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang  $y=1 \Rightarrow a=1$ .

Khi đó hàm số trở thành  $y = \frac{x+b}{x-1}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(-2;0) \Rightarrow \frac{-2+b}{-2-1} = 0 \Leftrightarrow b=2$ .

Vậy  $a+2b+3c = 1+4-3 = 2$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$  có đồ thị như hình bên dưới, với  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = a+2b+3c$ ?



**Lời giải**

**ĐS:**  $T = 0$

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

⊙ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x=1$ , tiệm cận ngang là đường thẳng  $y=-1$ .

⊙ Đồ thị hàm số đi qua các điểm  $A(2;0)$ ,  $B(0;-2)$ .

Từ biểu thức hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$ , ta suy ra

⊙ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng  $x = -c$ , tiệm cận ngang là đường thẳng  $y = a$ .

⊙ Đồ thị hàm số đi qua  $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$ ,  $B\left(0;\frac{b}{c}\right)$ .

Đổi chiếu lại, ta suy ra  $c = -1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 2$ .

Vậy  $T = a + 2b + 3c = (-1) + 2 \cdot 2 + 3(-1) = 0$ .

**Câu 18:** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) có bảng biến thiên dưới đây. Tính  $S = a^2 + b^2 + c^2$ .

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$      | $+\infty$ |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|----------|-----------|-----|-----|-----------|
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$      | $0$       | $-$ | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      |     | $3a - b$ |           |     | $4$ | $+\infty$ |

**Lời giải**

**ĐS:**  $S = a^2 + b^2 + c^2 = 30$

+) Hàm số đã cho là hàm trùng phương có hình dạng bảng biến thiên như trên.

Suy ra:  $\begin{cases} a > 0 \\ a \cdot b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 0, b < 0$ .

+)  $y' = 4ax^3 + 2bx$

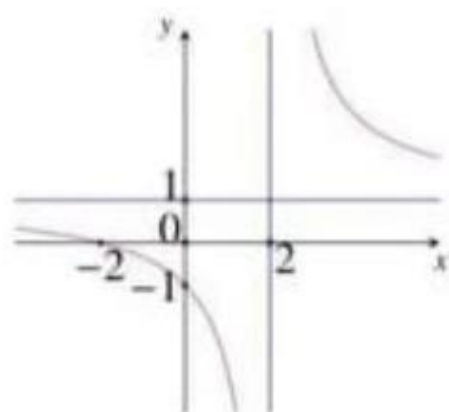
+) Ta có:  $y' = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}} \end{cases}$

+) Dựa vào bảng biến thiên, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(0) = 3a - b \\ \sqrt{\frac{-b}{2a}} = 1 \\ f(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3a - b \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy  $S = a^2 + b^2 + c^2 = 30$ .

**Câu 19:** Cho hàm số  $y = \frac{x-a}{bx+c}$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b + c$



**Lời giải**

**ĐS:**  $P = -3$

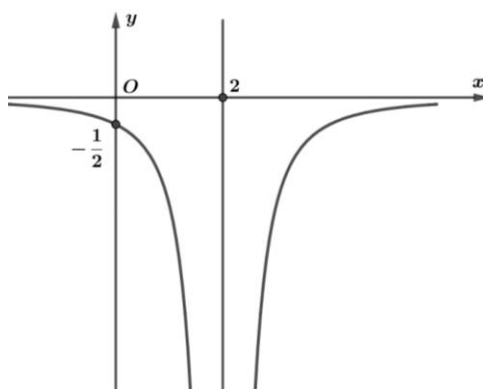
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là  $y=1 \Rightarrow \frac{1}{b}=1 \Rightarrow b=1$ .

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là  $x=2 \Rightarrow -\frac{c}{b}=2 \Rightarrow c=-2b=-2$ .

Đồ thị hàm số đi qua điểm  $(-2;0) \Rightarrow a=-2$ .

Vậy  $P = a + b + c = -3$ .

**Câu 20:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  có đồ thị hàm số  $f'(x)$  như trong hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số  $f(x)$  đi qua điểm  $A(0;2)$ . Giá trị  $f(3)$  bằng

**Lời giải**

**ĐS:**  $f(3) = 5$

Ta có đồ thị hàm số  $f(x)$  đi qua điểm  $A(0;2)$  nên  $b = 2d$  (1)

Ta có  $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Dựa vào đồ thị của đồ thị hàm số  $f'(x)$  ta có  $-\frac{d}{c} = 2 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}d$  (2)

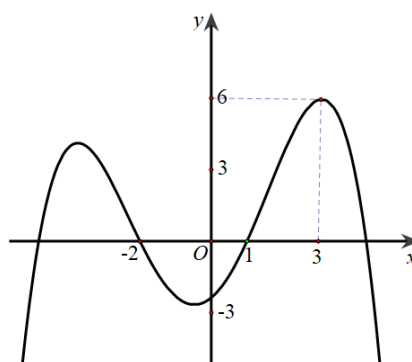
Mặt khác  $f'(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{d^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(ad-bc) = -d^2$  (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta có  $2ad + 3d^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = -\frac{3}{2}d \end{cases}$

Nếu  $d = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$

Nếu  $a = -\frac{3}{2}d$  thì  $f(x) = \frac{\frac{-3}{2}dx + 2d}{\frac{-1}{2}dx + d} = \frac{-3x+4}{-x+2} \Rightarrow f(3) = 5.$

**Câu 21:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Đặt  $T = 103.f(a^2 + a + 1) + 234.f(af(b) + bf(a))$  với  $a, b \in \mathbb{R}$ . Gọi  $m$  là số cặp số  $(a; b)$  mà tại đó biểu thức  $T$  đạt giá trị lớn nhất, gọi giá trị lớn nhất của  $T$  là  $M$ . Giá trị biểu thức  $\frac{M}{m}$  bằng



**Lời giải**

**ĐS:**  $\frac{1011}{4}.$

Từ đồ thị ta có:  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = f(3) = 6.$

Suy ra:  $f(a^2 + a + 1) \leq 6 \forall a \in \mathbb{R}$ ; dấu “=” xảy ra khi  $a^2 + a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 1; a = -2.$

$f(af(b) + bf(a)) \leq 6, \forall a, b \in \mathbb{R}$ , dấu “=” xảy ra khi  $af(b) + bf(a) = 3.$

Do đó,  $T \leq 103.6 + 234.6 = 2022$ , dấu “=” xảy ra khi  $\begin{cases} af(b) + bf(a) = 3 \\ a = 1 \\ a = -2 \end{cases}.$

Với  $a = 1$  thì  $1.f(b) + bf(1) = 3 \Leftrightarrow f(b) = 3$ . Dựa vào đồ thị suy ra  $f(b) = 3$  có 4 nghiệm  $b$

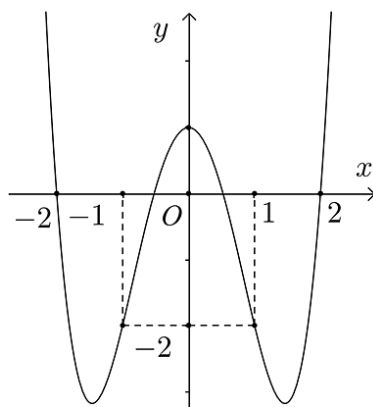
phân biệt.

Với  $a = -2$  thì  $-2.f(b) + bf(-2) = 3 \Leftrightarrow f(b) = -\frac{3}{2}$ . Dựa vào đồ thị suy ra  $f(b) = -\frac{3}{2}$  có 4 nghiệm  $b$  phân biệt.

Do đó có 8 cặp  $(a; b)$  thỏa mãn  $T_{\max} = 2022$ .

$$\text{Vậy } \frac{M}{m} = \frac{2022}{8} = \frac{1011}{4}.$$

**Câu 22:** Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tính  $f(a+b+c)$ .



**Lời giải**

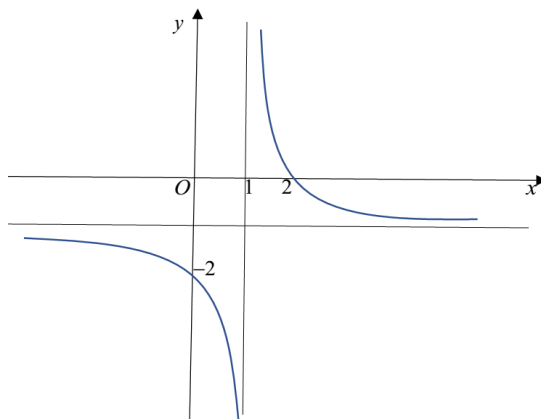
**ĐS:**  $f(a+b+c) = f(-2) = 0$

Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm  $A(0;1)$ ,  $B(1;-2)$ ,  $C(2;0)$  nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-2 \\ 16a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-3 \\ 16a+4b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{11}{12} \\ b=-\frac{47}{12} \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{11}{12}x^4 - \frac{47}{12}x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(a+b+c) = f(-2) = 0.$$

**Câu 23:** Cho hàm số  $y = \frac{ax+b}{x+c}$ , có đồ thị là hình vẽ với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức  $T = a - 3b + 2c$ .



Lời giải

**ĐS:**  $T = a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$

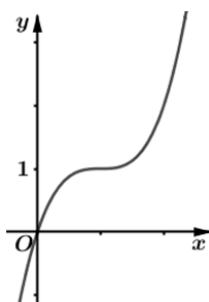
Tiệm cận đứng  $x = -c = 1 \Rightarrow c = -1$ .

Tiệm cận ngang  $y = a = -1$ .

Giao điểm trục Oy là  $y = \frac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = 2$ .

$$T = a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$$

**Câu 24:** Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = a^2 + c^2 + b + 1$  bằng?



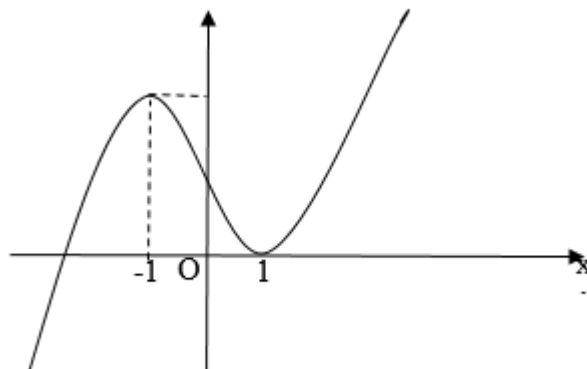
Lời giải

**ĐS:**  $\frac{5}{8}$ .

Ta có  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ . Dựa vào đồ thị ta suy ra  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ ac \geq \frac{b^2}{3} \end{cases}$ .

$$\text{Đánh giá } P = a^2 + c^2 + b + 1 \geq 2ac + b + 1 \geq \frac{2b^2}{3} + b + 1 \geq \frac{5}{8}.$$

**Câu 25:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có hình dạng như hình bên. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2a^2 + cd + a - c + 2020$



Lời giải

**ĐS:** 2021

TXĐ: □

Ta có:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực trị tại  $x = 1; x = -1$  do đó ta có:

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a \\ b = 0 \end{cases}$$

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm  $(1; 0)$  nên

$$a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + 0 + (-3a) + d = 0 \Rightarrow d = 2a$$

$$P = 2a^2 + (-3a) \cdot (2a) + a + 3a + 2020 = -4a^2 + 4a + 2020$$

$$= -4 \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 + 2021 \leq 2021$$

Vậy  $P_{\max} = 2021$  khi  $a = \frac{1}{2}; b = 0; c = -\frac{3}{2}; d = 1$ .