

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

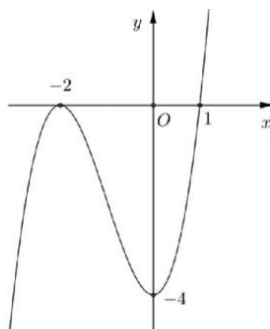
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 3. BIỆN LUẬN TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN CHỨA THAM SỐ

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m+4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

Lời giải

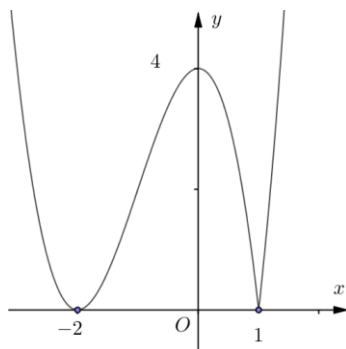
ĐS: 3

Ta có: $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m+4 = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 - m|f(x)| - 4|f(x)| + 2m+4 = 0$

$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 2)^2 - m(|f(x)| - 2) = 0 \Leftrightarrow (|f(x)| - 2)(|f(x)| - 2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| - 2 = 0 \\ |f(x)| - 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 2 & (1) \\ |f(x)| = m+2 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

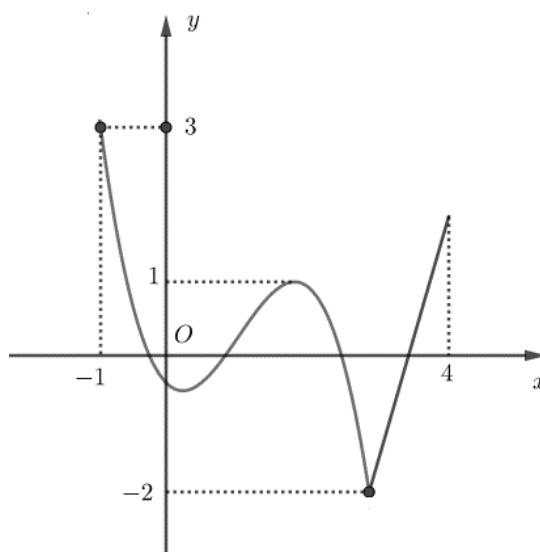
Ta có phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = |f(x)|$ và $y = m + 2$. Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và $y = m + 2$. Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta được phương trình $|f(x)| = m + 2$ có

$$2 \text{ nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình } |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ m + 2 > 4 \\ m + 2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m > 2 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-5; 5) \Rightarrow m \in \{-2; 3; 4\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

Lời giải

ĐS: 7

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}$ đúng

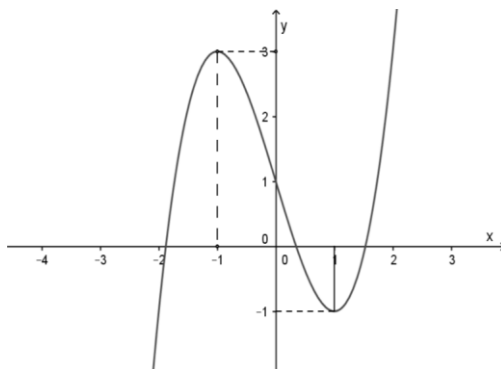
$$\text{với mọi } x \text{ thuộc đoạn } [-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min_{[-1; 4]} f(x) = -2$; $\max_{[-1; 4]} f(x) = 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max_{[-1;4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m > 0 \text{)}$$

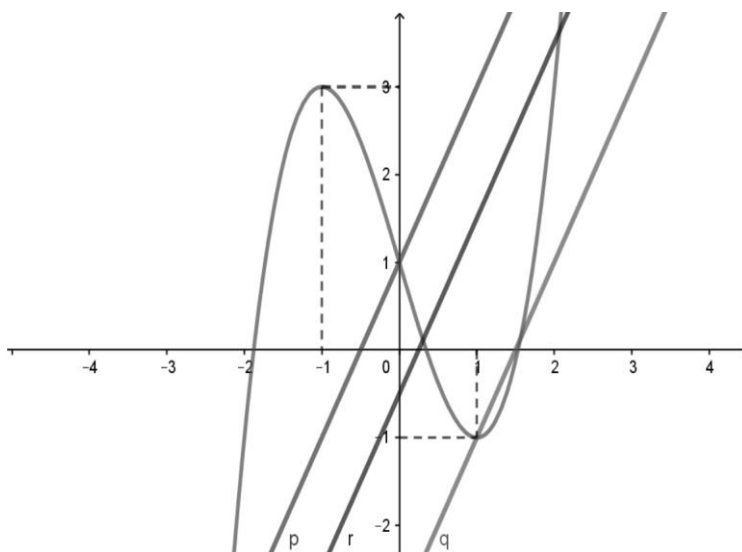
Vậy trên đoạn $[-10;10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



Lời giải

ĐS: 2



Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Ta được phương trình: $f(t) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f(t) = 2t + m - 2$ (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2$ (r).

Gọi (p): $y = 2x + 1$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi q : $y = 2x - 3$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

Để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t \in (0; 1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p)

$$\Rightarrow -3 \leq m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$?

A. 1750.

B. 1748.

C. 1747.

D. 1746.

Lời giải

ĐS: 1750

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x)$$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0 \quad (1)$$

Xét $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$.

$$\text{Ta có } h'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) + 3x^2 = f'(x)[3f^2(x) + 1] + 3x^2.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in [-1; 2].$$

$$\text{Hàm số } h(x) \text{ đồng biến trên } [-1; 2] \text{ nên } \min_{[-1; 2]} h(x) = h(-1) = m - 1, \quad \max_{[-1; 2]} h(x) = h(2) = m + 1748.$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1; 2]} h(x) \cdot \max_{[-1; 2]} h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(-1) \cdot h(2)$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(1748 + m) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{-1748; -1747; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m, f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4	3	$\sqrt{11}$	2

Lời giải

ĐS: 4

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[2; 4]} f(x) = f(4) = 2$ và $\max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2; 4]$

Suy ra $\min_{[2; 4]} g(x) = g(2) = 2$ và $\max_{[2; 4]} g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = m$$

Xét hàm số $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2; 4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x = 2$ nên

$$\min_{[2;4]} h(x) = \frac{\min_{[2;4]} g(x)}{\max_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

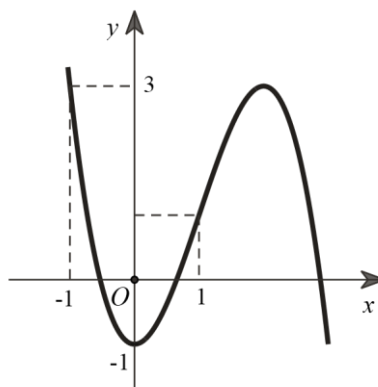
Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x = 4$ nên

$$\max_{[2;4]} h(x) = \frac{\max_{[2;4]} g(x)}{\min_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



Lời giải

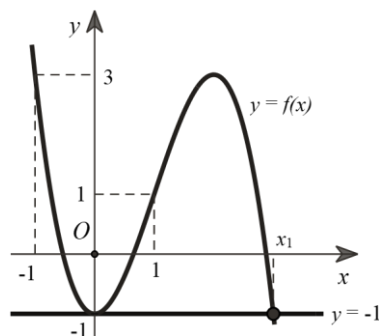
ĐS: 2

$$\text{Ta có } f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2020 - m \end{cases} \quad (1)$$

* Với $f(\cos x) = -1$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = x_1 \ (x_1 > 1) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Vì } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$$



* Với $f(\cos x) = 2020 - m$

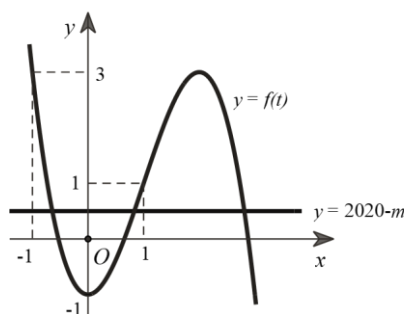
Đặt $t = \cos x (t \in [-1; 1])$

Với $t \in (-1; 1]$ thì phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$.

Với $t = -1$ thì phương trình $t = \cos x$ có một nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t) = 2020 - m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x) = 2020 - m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$



Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$ thì $-1 < 2020 - m \leq 1 \Leftrightarrow 2019 \leq m < 2021$

Vì m nguyên nên $m \in \{2019; 2020\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

Lời giải

ĐS: 15

Đặt $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x$ với $x \in (3; 5)$.

Ta có: $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

Với $x \in (3;5)$:

Ta có: $2-x \in (-3;-1)$ nên $f'(2-x) > 0$ suy ra $-3f'(2-x) < 0$.

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} < \frac{x}{x} = 1$

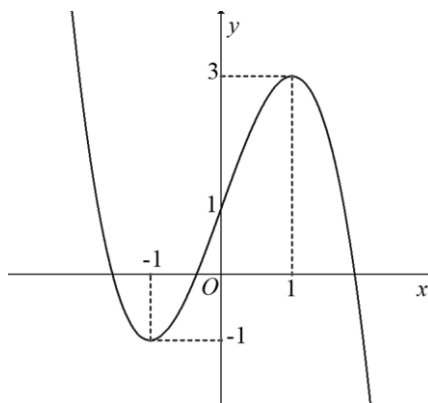
Suy ra $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 < 0, \forall x \in (3;5)$ nên hàm số nghịch biến trên $(3;5)$.

Suy ra $\min_{(3;5)} g(x) = g(5) = 3f(-3) + \sqrt{5^2+4} - 5 = \sqrt{29} - 5$;

$\max_{(3;5)} g(x) = g(3) = 3f(-1) + \sqrt{3^2+4} - 3 = 12 + \sqrt{13}$.

Để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm thì $\sqrt{29} - 5 \leq m \leq 12 + \sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, \dots, 15\}$ tức là có 15 giá trị

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

Lời giải.

ĐS: 4

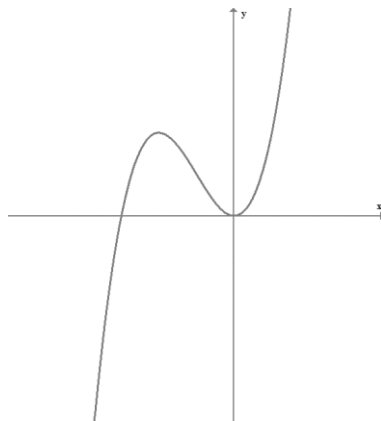
Khi $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x \in [-1; 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy khi $\cos x \in [-1; 0)$ thì $f(\cos x) \in [-1; 1)$; khi đó $f(f(\cos x)) \in [-1; 3)$.

Do đó phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1 \leq m < 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

Lời giải.

ĐS: 3

Từ đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

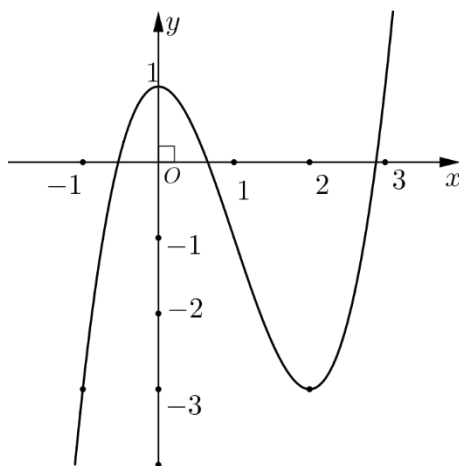
Do $2|\sin x| \geq 0; m^2 + 6m + 10 > 0$ nên $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10) \Leftrightarrow 2|\sin x| = m^2 + 6m + 10$.

Mà $0 \leq 2|\sin x| \leq 2$ nên yêu cầu bài toán tương đương

$$0 \leq m^2 + 6m + 10 \leq 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2.$$

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 51: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.



Lời giải

ĐS: 8

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = -m \\ x^3 - 3x^2 + 1 = -m + 3 \end{cases}$$

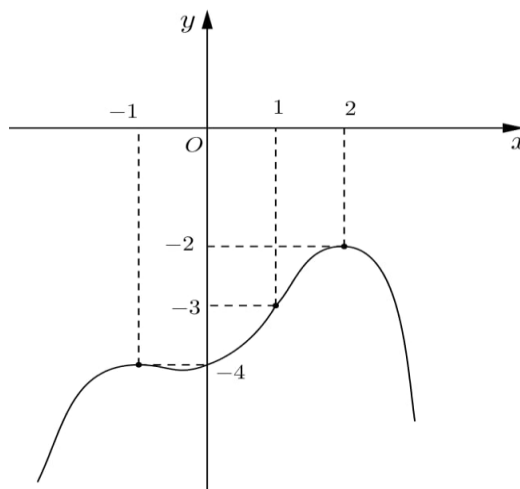
Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$ thì $\begin{cases} -3 \leq -m \leq 1 \\ -3 \leq -m + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases}$.

$$\Rightarrow m \in [-1; 6].$$

Do $m \in \mathbb{R}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)})$$
 nghiệm đúng với mọi số thực x là



Lời giải

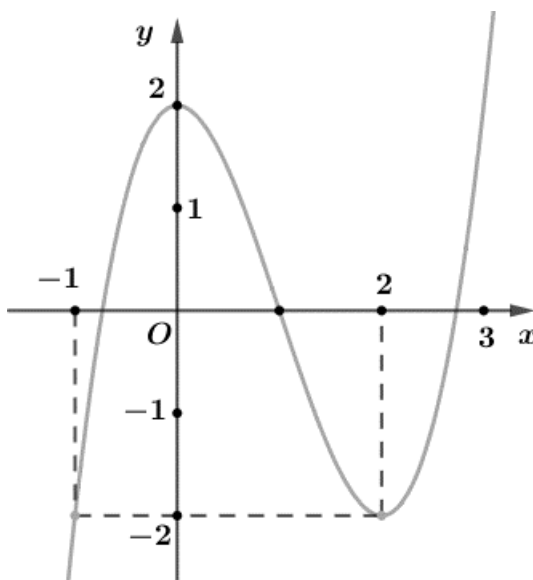
ĐS: 4

$$16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)}) \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)}$$

$$\text{Vì, nên ta có } 16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)} \leq 16.2^{-2} + 0 = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$$

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x - 1| - 1) = m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0; 3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

Lời giải

ĐS: 16

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $x = 0$ và $x = 2$ nên có dạng $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Lần lượt thay thế các dữ kiện từ hình vẽ, ta được
$$\begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 = 0 \\ -a^3 + b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x + C.$

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x.$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}.$

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	-1	$\frac{5}{4}$	-1	$+\infty$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x-1)$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$	2	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x - 1)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x - 1)$	$+\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$	
		-1		-1		

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in [0; 3\pi]$ nên $0 \leq |2\sin x - 1| \leq 3.$

Đặt $t = |2\sin x - 1|, t \in [0; 3]$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(t-1) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t = h, t = k.$

Do đó $\begin{cases} 2\sin x - 1 = \pm h \\ 2\sin x - 1 = \pm k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\pm h + 1}{2} \\ \sin x = \frac{\pm k + 1}{2} \end{cases}.$

Trên $[0; 3\pi]$, mỗi phương trình có nhiều nhất 4 nghiệm, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất 16 nghiệm.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

Lời giải

ĐS: 16

Xét phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ (1)

Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}$. Ta có $\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ f(x)=t^3-m \end{cases} \Rightarrow f(t)+t^3=f(x)+x^3$ (2)

Xét hàm số $g(u)=f(u)+u^3 \Rightarrow g'(u)=f'(u)+3u^2=5u^4+12u^2 \geq 0, \forall u$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow g(t)=g(x) \Leftrightarrow t=x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m}=x \Leftrightarrow x^3-f(x)=m \Leftrightarrow x^5+2x^3=3m$

Xét hàm số $h(x)=x^5+2x^3 \Rightarrow h'(x)=5x^4+6x^2 \geq 0, \forall x$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2
$h'(x)$	+	0	+	+
$h(x)$	$-\infty$		3	48

Từ bảng biến thiên suy ra để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1;2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;\dots;16\}$ suy ra có 16 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right]$ là

Lời giải

ĐS: 6

Xét $f^2(\cos x)+(3-m)f(\cos x)+2m-10=0$. Ta có $\Delta=(m-7)^2$.

Do đó $\begin{cases} f(\cos x)=m-5 & (1) \\ f(\cos x)=2 & (2) \end{cases}$.

Với $f(\cos x)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=a < -1 \\ \cos x=\frac{1}{2} \\ \cos x=1 \end{cases}$.

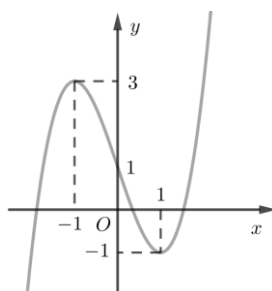
Trường hợp này được 3 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ thì (1) có đúng 1 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ và không trùng với nghiệm của các phương trình $\cos x = \frac{1}{2}; \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow f(t) = m - 5 \text{ với } t = \cos x \text{ có đúng 1 nghiệm trong } \left[-1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7.$$

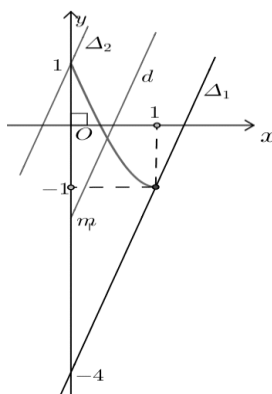
Do m nguyên nên có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y = f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



Lời giải

ĐS: -10



Đặt $t = \sin x$, $x \in (0; \pi) \Leftrightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc $(0; 1]$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = 3x + m$ có điểm chung với hoành độ $x \in (0; 1]$.

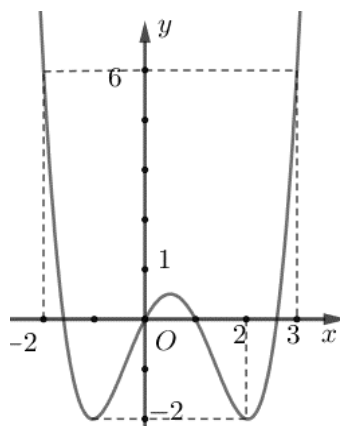
$\Delta_1: y = 3x - 4$ là đường thẳng qua điểm $(1; -1)$ và $\Delta_2: y = 3x + 1$ là đường thẳng qua điểm $(0; 1)$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(0; 1]$ là phần đường cong nằm giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Vậy phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1]$ khi và chỉ khi d dao động trong miền giới hạn bởi Δ_1 và Δ_2 (không trùng với Δ_2) khi và chỉ khi $-4 \leq m < 1 \Leftrightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Vậy tổng các giá trị của S bằng -10 .

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

Lời giải

ĐS: 2

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$, $x \in [-1; 2]$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$

x	-1	1	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	2	-2	2

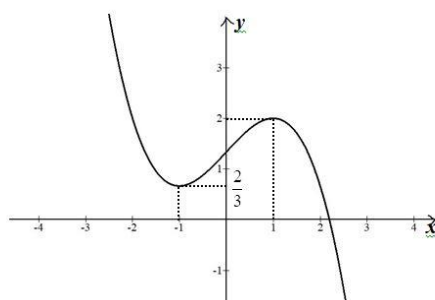
Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

$t \in (-2; 2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0$, $m = -1$.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ có nghiệm là

Lời giải

ĐS: 3

Đặt $t = x^2 - 4x + 5$. Ta có $t = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$.

Phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ (1) trở thành phương trình $f(t) = m - 1$ (2).

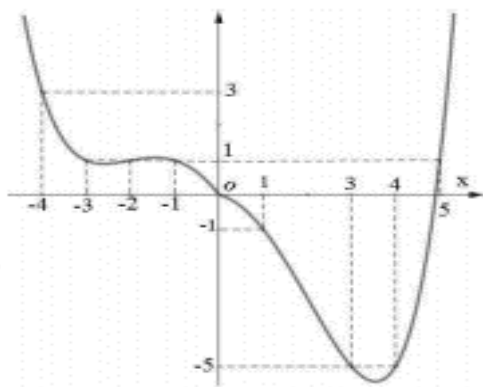
Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{1; 2; 3\}$.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) = m - 3$ có nghiệm



Lời giải

ĐS: 13

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$; $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

Ta có: $t'(x) = \frac{12(3x-1)}{\sqrt{6x-9x^2}}$; $0 < x < \frac{2}{3}$; $t'(x) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ (nhận).

$$t(0) = 3; t\left(\frac{1}{3}\right) = -1; t\left(\frac{2}{3}\right) = 3.$$

Nên $-1 \leq t \leq 3$.

Mặt khác: $f(t) = \frac{m-3}{2}$, $t \in [-1; 3]$ có nghiệm.

Từ đồ thị ta có $-5 \leq \frac{m-3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 5$.

Do m nguyên nên có 13 giá trị m là $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m-6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

ĐS: 3

Hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	3	-1	$+\infty$

Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Đặt $t = f(|x|) \geq -1$ (*)

Nhận xét:

+ với $t_0 < -1 \xrightarrow{(*)} x \in \emptyset$

+ với $t_0 = -1; t_0 > 3 \xrightarrow{(*)} 2$ nghiệm

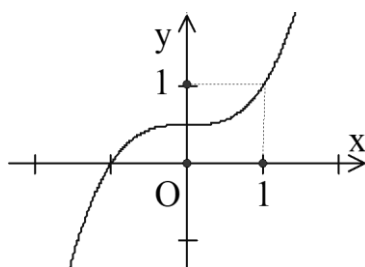
+ với $t_0 = 3 \xrightarrow{(*)} 3$ nghiệm

+ với $t_0 \in (-1; 3) \xrightarrow{(*)} 4$ nghiệm

Phương trình trở thành $t^2 - (m-6)t - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = m-5 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1 < m-5 < 3 \Leftrightarrow 4 < m < 8 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{5; 6; 7\}$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị của $m (m \in \mathbb{R})$ sao cho

$$(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 2

Từ đồ thị ta thấy $f(x)=1$. Đặt $g(x) = m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x)-1$.

$$(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x)-1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Từ giả thiết ta có điều kiện cần để (*) là

$$g(1) = 0 \Leftrightarrow m^3 f(1) - mf(1) + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

+) Với $m = 0$ ta có (*) $\Leftrightarrow g(x) = (x-1)[f(x)-1] \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+) Với $m = 1$ ta có $(x-1)[f(2x-1)-1] = \frac{1}{2}[(2x-1)-1][f(2x-1)-1] \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

+) Với $m = -1$, (*) $\Leftrightarrow (x-1)[-f(2x-1)+2f(x)-1] \geq 0$ (**).

$$\text{Xét } x > 1 \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x-1)+1}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(2x-1)^3 + b(2x-1)^2 + c(2x-1) + d + 1}{2(ax^3 + bx^2 + cx + d)} = 4 > 0$$

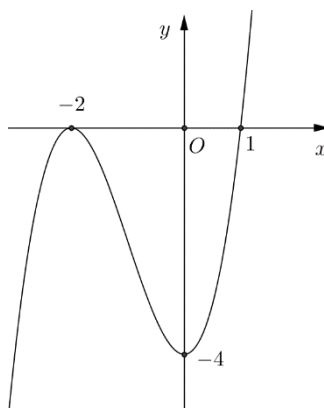
$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1: f(2\alpha-1)+1 > 2f(\alpha) \text{ hay } 2f(\alpha) - f(2\alpha-1) - 1 < 0$$

$$\Rightarrow (\alpha-1)[2f(\alpha) - f(2\alpha-1) - 1] < 0 \text{ (không thỏa mãn (**)).}$$

Do đó $m = -1$ không thỏa mãn

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt?

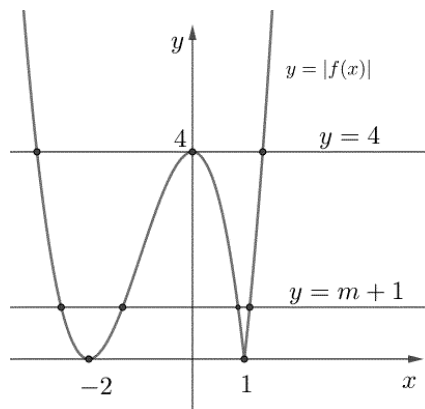
Lời giải

ĐS: 3

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} f^2(x) - 5|f(x)| + 4 - m(|f(x)| - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1) - m(|f(x)| - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1 - m) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 4 & (1) \\ |f(x)| = m+1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau



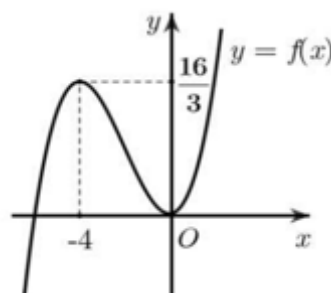
Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, suy ra phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vì vậy, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khác 4.

Suy ra $0 < m+1 < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \Rightarrow m = 0, 1, 2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f\left(\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right) = f(m^2 + 4m + 4) \text{ có nghiệm.}$$

Lời giải

ĐS: 3

Ta có $\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| \leq 0$, " x và $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \geq 0$, " m . Nhìn vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra phương trình đã cho tương đương

$$\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| = m^2 + 4m + 4 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } P = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} \quad (*)$$

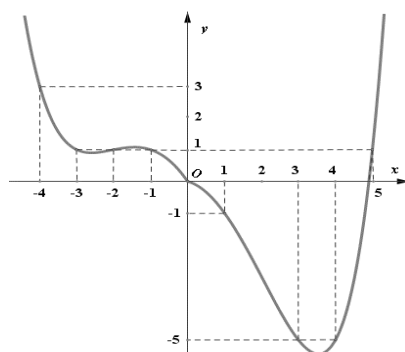
vì $2\cos x - \sin x + 4 > 0$, " x

$$\text{nên } (*) \Leftrightarrow (3 - P)\sin x - (1 + 2P)\cos x = 4P + 1 \quad (2)$$

$$\text{Phương trình (2) có nghiệm } \Leftrightarrow (4P + 1)^2 \leq (3 - P)^2 + (1 + 2P)^2 \Leftrightarrow \frac{-9}{11} \leq P \leq 1 \text{ và } |P| \leq 1$$

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m \in [-3; -1] \cup [0; 1]$ Có ba giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right) = m-2019$ có nghiệm.



Lời giải

ĐS: 13

$$\text{Ta có: } \sqrt{-9x^2+30x-21} = \sqrt{4-(3x-5)^2} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{-9x^2+30x-21} \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq 3-3\sqrt{-9x^2+30x-21} \leq 3.$$

$$\text{Đặt } t = 3-3\sqrt{-9x^2+30x-21} \Rightarrow t \in [-3;3].$$

$$\text{Khi đó, phương trình } 2.f\left(3-3\sqrt{-9x^2+30x-21}\right) = m-2019 \quad (1) \Leftrightarrow 2f(t) = m-2019$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \frac{m-2019}{2} \quad (2)$$

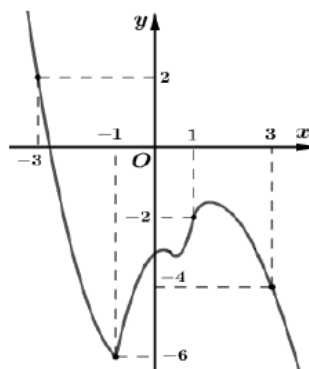
Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có, phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3;3]$ khi và chỉ khi

$$-5 \leq \frac{m-2019}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -10 \leq m-2019 \leq 2 \Leftrightarrow 2009 \leq m \leq 2021$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2009, 2010, \dots, 2021\}$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right) = m-3$ có nghiệm.



Lời giải

ĐS: 9

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$, $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t' = -4 \cdot \frac{6 - 18x}{2\sqrt{6x - 9x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Bảng biến thiên cho $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$. Vì $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right] \Rightarrow t \in [-1; 3]$

Phương trình trở thành: $2f(t) = m - 3 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m-3}{2}, t \in [-1; 3]. (*)$

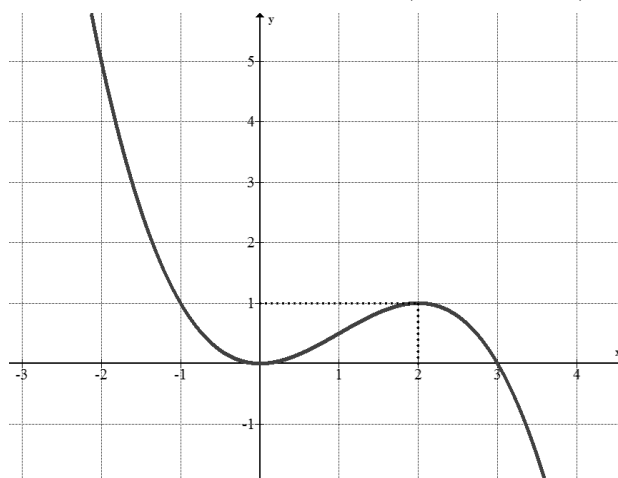
Phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t) = \frac{m-3}{2}$ có nghiệm $t \in [-1; 3]$

$\Leftrightarrow -6 \leq \frac{m-3}{2} \leq -2 + a \Leftrightarrow -12 \leq m - 3 \leq -4 + 2a \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -1 + 2a$, với

$\max_{[-1; 3]} f(t) = a + 2, a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-9; -8; -7; \dots; -1\} \Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 66: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0; 0)$ và cắt trục hoành tại $A(3; 0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5; 5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



Lời giải

ĐS: 2

Theo hình vẽ ta có $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba nên $a \neq 0$.

$f'(x) = 4ax^3 + 3b^2x + 2cx + d \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(3) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = d = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x) = ax^4 - 4ax^3 + e$.

$$\Rightarrow f(x) = e \Leftrightarrow ax^4 - 4ax^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Khi đó $f(-x^2 + 2x + m) = e(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 1+m \\ (x-1)^2 = m-3 \end{cases}$$

$$\text{PT(1) có bốn nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+m > 0 \\ m-3 > 0 \\ 1+m \neq m-3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Mà $m \in \mathbb{Q} \cap [-5; 5] \Rightarrow m \in \{4; 5\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề bài.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	4		3		3
		↘	↗	↘	↗
		1		1	

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 5]$.

Lời giải

ĐS: 2014

Trên $[0; 5]$, ta có: $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x} \Leftrightarrow m \leq 2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)}.$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên đoạn $[0; 5]$.

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{1}{\sqrt{10-2x}} = \frac{3\sqrt{10-2x} - 2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}\sqrt{10-2x}}$$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [0; 5]$.

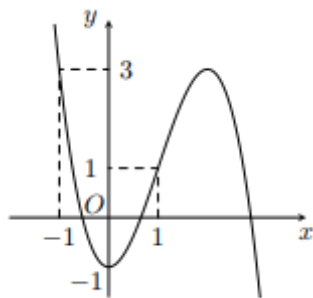
Do $g(0) = \sqrt{10}$, $g(3) = 5$ và $g(5) = \sqrt{15}$ nên $\max_{[0; 5]} g(x) = g(3) = 5$.

Mặt khác $\min_{[0; 5]} f(x) = f(3) = 1$ nên

$$m \leq 2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)}, \forall x \in [0; 5]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0; 5]} \left(2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)} \right) = 2019 - \frac{5}{1} = 2014.$$

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m-2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



Lời giải

ĐS: 2

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2019 - m \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta có: $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ \cos x = k > 1 & (2) \end{cases}$

PT có 2 nghiệm thỏa mãn, PT vô nghiệm.

Yêu cầu: phương trình $f(\cos x) = 2019 - m$ ($2019 - m \neq 1$) có thêm 4 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Nhận xét:

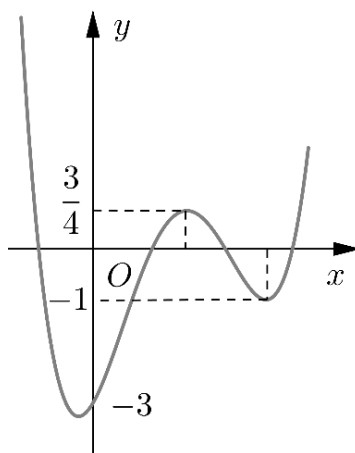
+ Với mỗi $t \notin [-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ vô nghiệm.

+ Với mỗi $t \in (-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ có 2 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

+ Với $t = -1$, phương trình $\cos x = t$ có đúng 1 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

Như vậy, $-1 < 2019 - m \leq 1 \Leftrightarrow 2018 \leq m \leq 2020$.

Câu 69: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x + m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là



Lời giải

ĐS: 1

Đặt $t = |x + m| \geq 0$

Với $t = 0 \Rightarrow x = m$

Với mỗi giá trị $t > 0$ sẽ ứng với 2 giá trị x

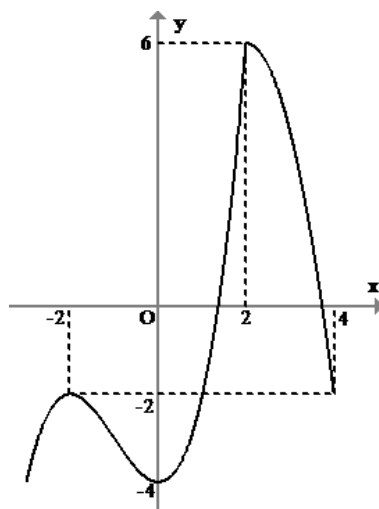
Ta có phương trình: $f(t) = m$ ($t \geq 0$) (*)

Đề phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\text{Từ đồ thị của hàm số } y = f(t) \text{ trên miền } t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

Lời giải

ĐS: 8

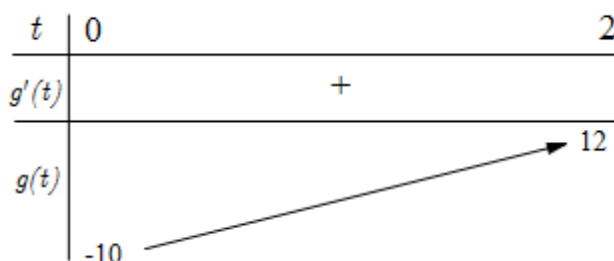
Đặt $t = \frac{x}{2}+1$, khi $-2 \leq x \leq 2$ thì $0 \leq t \leq 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f(t)+2t-2=m \Leftrightarrow f(t)+6t-6=3m$.

Xét hàm số $g(t) = f(t)+6t-6$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(t) = f'(t)+6$. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên $f'(t) > 0, \forall t \in (0; 2) \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \in (0; 2)$ và $g(0) = -10; g(2) = 12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0; 2]$

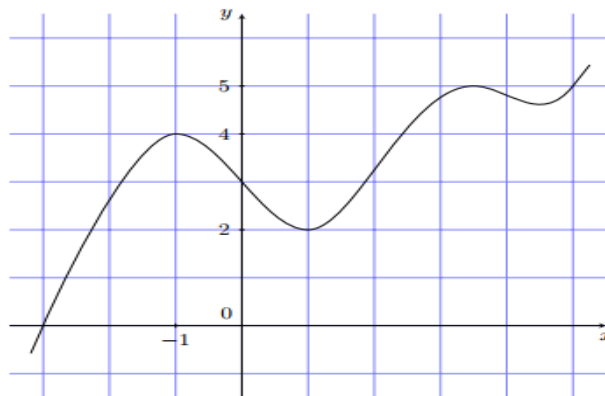


Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t) = 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$ hay $-10 \leq 3m \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



Lời giải

ĐS: 2

Xét phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ (1)

Đặt $t = x^2 - 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

Ta có $t' = 2x - 2$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $t = x^2 - 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

x	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	
t'		-	0	+
t	$\frac{21}{4}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $t \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{21}{4}\right]$.

Xét $t = -\frac{1}{4}$ khi đó phương trình (1) thành $f(-\frac{1}{4}) = m \Rightarrow 4 = m$.

Với $m = 4$ phương trình $f(x^2 - 2x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -\frac{1}{4} \\ x^2 - 2x = a \end{cases} (*)$ với $2 < a < 3$.

Dễ thấy (*) có tối đa 3 nghiệm (không thỏa mãn yêu cầu).

Xét $t_0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{21}{4}\right]$.

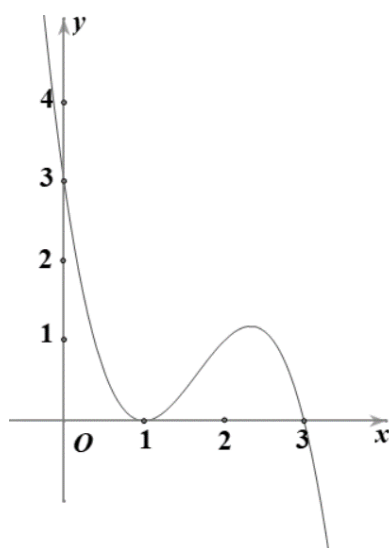
Nhận xét với mỗi $t_0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{21}{4}\right]$ thì có 2 giá trị $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ thỏa mãn $t_0 = x^2 - 2x$.

Do đó phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$. Hay đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại 2 điểm với $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $m = 3; m = 5$ thỏa mãn yêu cầu.

KL: Có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $|f(|x|)| = m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



Lời giải

DS: 6

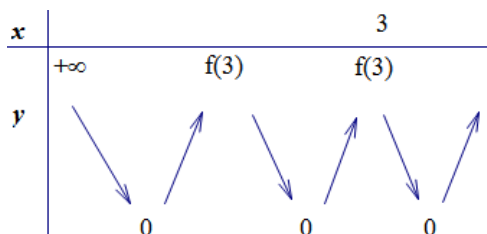
BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		0		3		∞
y'		+	0	+	0	-	
y	$-\infty$		0		$f(3)$		$-\infty$

BBT của hàm số $y = f(|x|)$

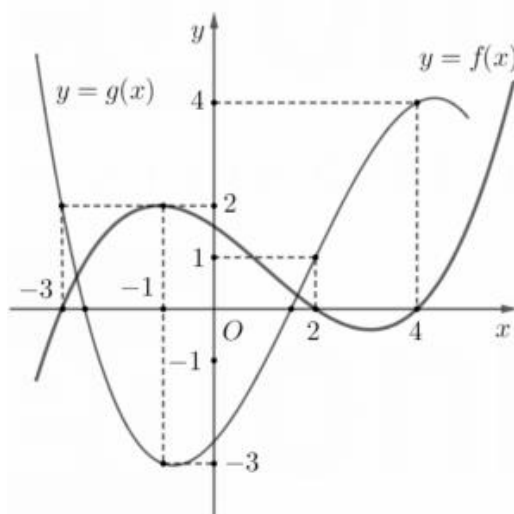
x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$		$f(3)$		0		$f(3)$		$-\infty$

BBT của hàm số $y = |f(|x|)|$



Suy ra phương trình $|f(|x|)| = m$ có nhiều nhất là 6 nghiệm.

Câu 73: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1 - g(2x - 1)) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.



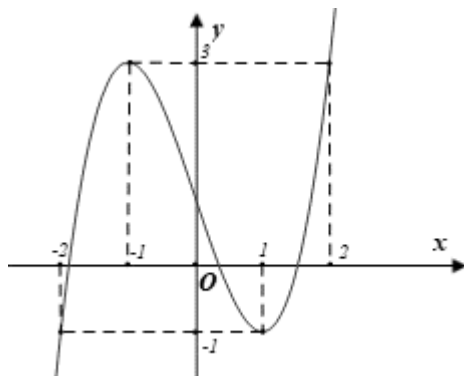
Lời giải

ĐS: 3

Với $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right] \Rightarrow 2x - 1 \in [-3; 4] \Rightarrow g(2x - 1) \in [-3; 4] \Rightarrow t = 1 - g(2x - 1) \in [-3; 4]$

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3; 4]$
 $\Leftrightarrow \min_{[-3; 4]} f(t) \leq m \leq \max_{[-3; 4]} f(t) \Leftrightarrow \min_{[-3; 4]} f(t) \leq m \leq 2$ trong đó $\min_{[-3; 4]} f(t) \in (-1; 0)$. Vậy các số nguyên cần tìm là $a \in \{0, 1, 2\}$

Câu 74: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



Lời giải

ĐS: 3

Đặt $g(x) = f(f(x))$.

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (hoành độ các điểm cực trị).}$$

$$+ f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, ta có:

+ Khi $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $x = a \in (-2; -1)$; $x = b \in (1; 2)$.

+ Khi $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1$; $x = -2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	b	2	$+\infty$
g'		0	-	0	+	0	+
g							

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -1 3 -1

Phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 75: Cho hàm số $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)} - m = 2g(x) + 7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

Lời giải

ĐS: 25

$$\text{Đặt } t = g(x) + 3 \Rightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 3 \Rightarrow t' = 6x^2 + 2x - 8.$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$		1	$+\infty$	
t'		+	0	-	0	+
t	$-\infty$		$\frac{289}{27}$		-2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t \in \left(-2; \frac{289}{27}\right)$ sẽ có tương ứng 3 giá trị x .

$$\sqrt{g(g(x)+3)}-m=2g(x)+7 \Leftrightarrow \sqrt{g(t)-m}=2(t+3)+7 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ g(t)-m=(2t+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ m=2t^3+t^2-8t-4t^2-4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ m=2t^3-3t^2-12t-1 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{289}{27}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{289}{27}\right)$.

$$f'(t) = 6t^2 - 6t - 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{289}{27}$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	4		-21		1979,5

Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt $m \in (-21; 4]$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-20; -19; -18; \dots; 4\} \Rightarrow$ có 25 số nguyên thỏa mãn.

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m-6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

ĐS: 3

Hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	3	-1	$+\infty$

Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Đặt $t = f(|x|) \geq -1$ (*)

Nhận xét:

+ với $t_0 < -1 \xrightarrow{(*)} x \in \emptyset$ + với $t_0 = -1; t_0 > 3 \xrightarrow{(*)} 2$ nghiệm

+ với $t_0 = 3 \xrightarrow{(*)} 3$ nghiệm + với $t_0 \in (-1; 3) \xrightarrow{(*)} 4$ nghiệm

Phương trình trở thành $t^2 - (m-6)t - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = m-5 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1 < m-5 < 3 \Leftrightarrow 4 < m < 8 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{5; 6; 7\}$

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

Lời giải

ĐS: 91

Đặt $t = f(x) - 3$.

* $t = f(x) - 3 \Leftrightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 4$ (1)

Đặt $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 4$; $g'(x) = 6x^2 + 2x - 8$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{316}{27} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		$\frac{316}{27}$		-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = t$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $t < -1$ hoặc $t > \frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ $t = -1$ hoặc $t = \frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ $-1 < t < \frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

* Ta có $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5 \Leftrightarrow \sqrt{f(t)+m} = 2t+1$ (2)

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm $t \geq -\frac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow f(t)+m = 4t^2+4t+1 \Leftrightarrow m = 4t^2+4t+1-f(t) \Leftrightarrow m = -2t^3+3t^2+12t-6$$

$$\text{Đặt } h(t) = -2t^3+3t^2+12t-6; h'(t) = -6t^2+6t+12; h(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{316}{27}$
$h'(t)$		+	0	-	
y	-11		14		-2660,89

Số nghiệm

của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = h(t)$ và $y = m$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $m > 14$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

+ $m = 14$ hoặc $m < -11$ thì phương trình (2) có 1 nghiệm.

+ $-11 \leq m < 14$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{316}{27}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả là $-11 \leq m < 14$. Suy ra $S = \{1; 2; \dots; 13\}$

Tổng các phần tử của $S = 1 + \dots + 11 + 12 + 13 = 91$.

Câu 78: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$?

Lời giải

ĐS: 16

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Rightarrow t^3 = f(x)+m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t^3 = f(x)+m \\ x^3 = f(t)+m \end{cases} \Rightarrow f(x)+x^3 = f(t)+t^3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x)+x^3, x \in [1; 2] \Rightarrow g'(x) = f'(x)+3x^2 > 0 \quad \forall x \in [1; 2]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Vì $g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t \Rightarrow f(x) = x^3 - m$

$\Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m = x^3 - m \Rightarrow 3m = x^5 + 2x^3 \quad (1)$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3, x \in [1; 2] \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0 \quad \forall x \in [1; 2]$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow h(1) \leq 3m \leq h(2) \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; \dots; 16\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số m .