

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

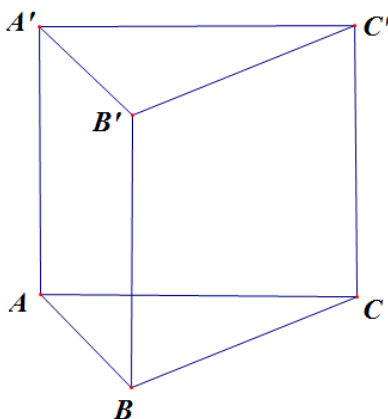
BÀI: VECTO TRONG KHÔNG GIAN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $\triangle ABC$ có cạnh bằng 3. Tính $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'}|$.

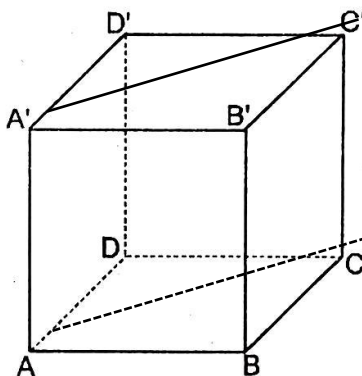
Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'}| = |\overrightarrow{BA}| = 3$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ (đơn vị độ).

Lời giải

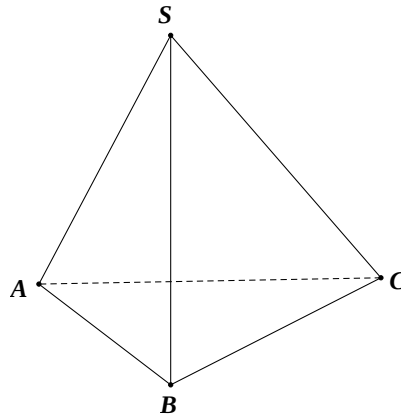


Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Do đó: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 45^\circ$

Câu 3: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải



Có: $BC^2 = SB^2 + SC^2 (2.2^2 = 2^2 + 2^2) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S .

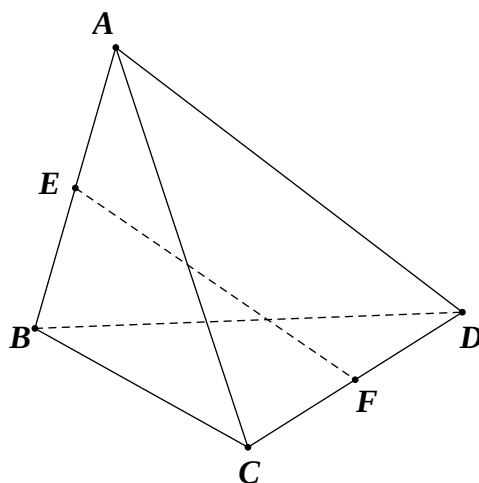
Lại có: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 - SC \cdot SA \cdot \cos \angle ASC = -2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{2^2}{2} = -2.$$

Vậy $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k \cdot ME^2 + l \cdot a^2$. Tính $k + l$.

Lời giải



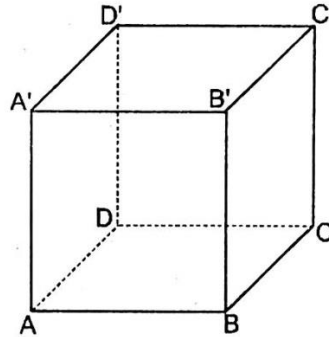
Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = 2ME^2 + 2a^2.$$

Vậy $k + l = 2 + 2 = 4$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

$$\text{Có: } \overrightarrow{MA'} = k.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-k(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}{1 - k}.$$

$$\text{Có: } \overrightarrow{NC} = l.\overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - l\vec{b}}{1 - l}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{k}{1 - k} - \frac{1}{1 - l}\right)\vec{a} + \left(-\frac{k}{1 - k} - 1\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{1 - k} - \frac{1}{1 - l}\right)\vec{c}.$$

$$\text{Mà: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{Vì } MN \parallel BD' \text{ nên } \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \frac{3k + 1}{1 - k} = -2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow l = -1.$$

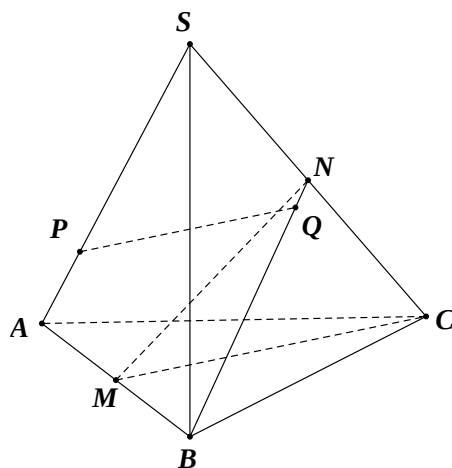
Vậy $k + l = -4$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ \parallel CM$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. $PQ \parallel CM$. Khi biểu diễn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vectơ

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ} = -\frac{m}{n}\vec{a} - \frac{p}{q}\vec{b} + \frac{r}{z}\vec{c}$ (với $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{z}$ là các phân số tối giản và

$m, n, p, q, r, z \in \mathbb{Z}$). Tính $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{z}$.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BN}$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = x\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{BN} = (x-1)\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + y(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SB}) \\ &= (x-1)\vec{a} + (1-y)\vec{b} + \frac{y}{2}\vec{c}.\end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

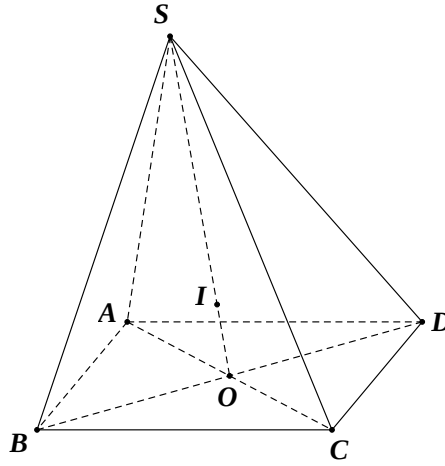
$$PQ // CM \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0,5} = \frac{1-y}{0,5} = \frac{y}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\text{Vậy } \frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{z} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm thay đổi trên SO . Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SI} = 4\overrightarrow{IO}$.

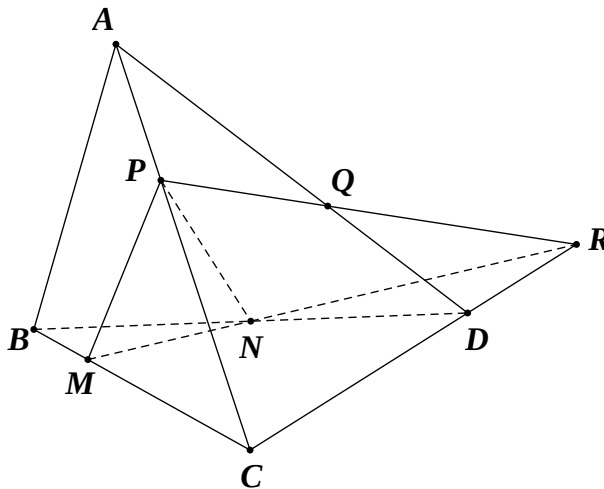
$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } P &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IS})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + 4\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} \text{ khi } M \equiv I \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}.$$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q .

Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Lời giải



$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD} = k\vec{c}$$

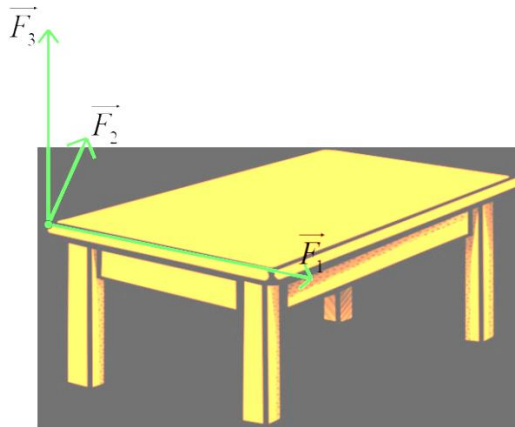
Theo đề bài, ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$; $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$$

$$\text{Vì } M, N, P, Q \text{ đồng phẳng nên } x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,75y = 0,75 \\ 0,25x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ 0,5x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}$$

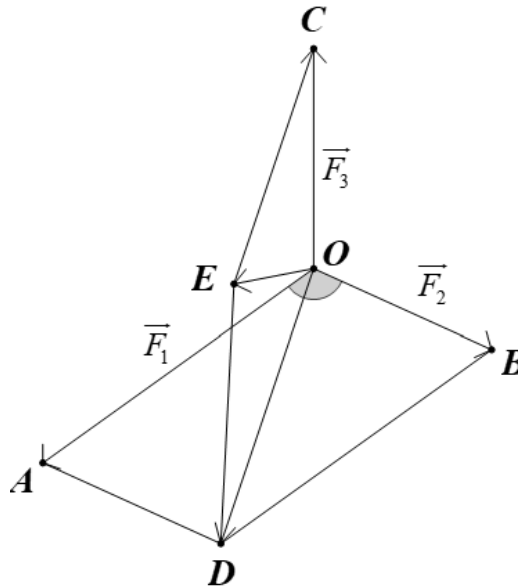
$$\text{Vậy } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}.$$

Câu 9: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\vec{F}_3$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a .



Lời giải

Theo đề bài ta có hình vẽ sau:



Hợp lực tác động vào ba vật là $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle OAD$, ta có:

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA \cdot AD \cdot \cos OAD = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos 80^\circ = 97 - 72 \cos 80^\circ.$$

Vì $OC \perp (OBDA)$ nên $OC \perp OD \Rightarrow ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó $\triangle OCE$ vuông tại C nên:

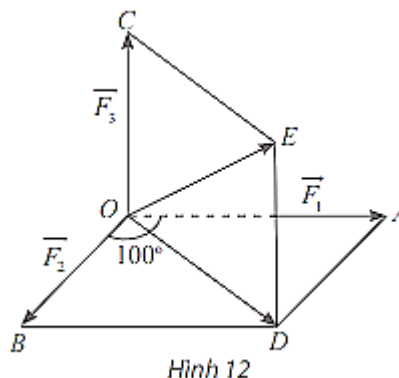
$$OE^2 = OC^2 + EC^2 = 4^2 + 97 - 72 \cos 80^\circ = 113 - 72 \cos 80^\circ$$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{113 - 72 \cos 80^\circ} \approx 10$$

Suy ra độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng $10N$.

Vậy $a=10$.

Câu 10: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là $25N$ và $12N$. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn $4N$. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.



Hình 12

Lời giải

Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $25N, 12N, 4N$.

$$\text{Vẽ } \overrightarrow{OA} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{F}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{F}_3.$$

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là

$$\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

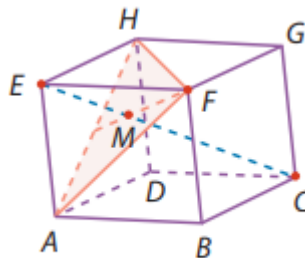
$$\text{Ta có } OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

$$\text{Suy ra } OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ}$$

$$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092.$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26 \text{ N}$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Điểm M là trọng tâm tam giác AFH (hình tham khảo bên dưới). Tính độ dài của $\overrightarrow{EM}$ trong trường hợp $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng có các cạnh $AB = 5, AD = 6, AE = 10$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.



Hình 2.16

Lời giải

Trước hết ta chứng minh E, M, C thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{EC} = k\overrightarrow{EM}$ với k là một số thực nào đó.

Do M là trọng tâm của tam giác AFH nên ta có:

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{EM}$$

Mặt khác, theo quy tắc hình hộp thì:

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC}$$

Suy ra $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EM}$. Vậy ba điểm E, M, C thẳng hàng.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

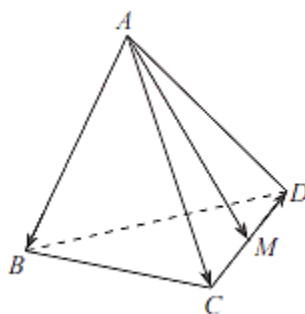
$$AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 91$$

Khi $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng thì EAC là tam giác vuông tại A , do đó:

$$EC^2 = EA^2 + AC^2 = 100 + 91 = 191$$

$$\text{Suy ra } EM = \frac{1}{3}\sqrt{191}.$$

Câu 12: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD . Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.



Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

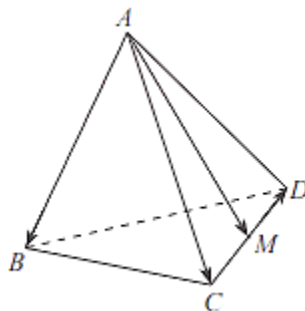
$$= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}), \text{ suy ra:}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

Câu 13: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD . Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.



Lời giải

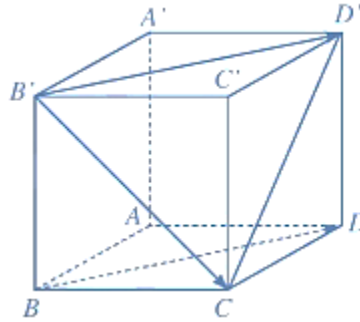
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa Hình 10 hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.



Lời giải

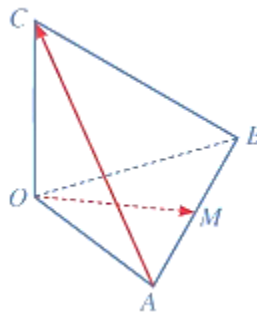
Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$. Do đó,

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}) = (\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'C}) = \widehat{D'B'C}.$$

Vì $B'C = CD' = D'B'$ nên tam giác $B'CD'$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{D'B'C} = 60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}) = 60^\circ$.

Câu 15: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Lời giải

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Khi đó, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Ta có: $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$.

Mặt khác, do $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$$\text{và } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$$

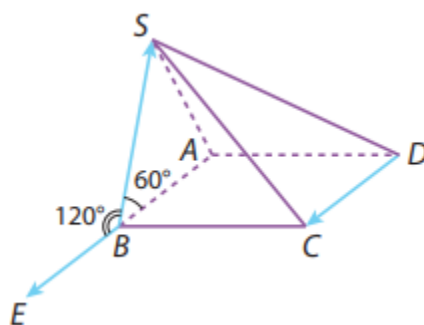
$$\begin{aligned} \text{nên } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2} (\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a}) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } |\overrightarrow{OM}| = OM = \frac{\sqrt{2}}{2}; |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó, } \cos (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Vậy } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = 120^\circ.$$

Câu 16: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.



Lời giải

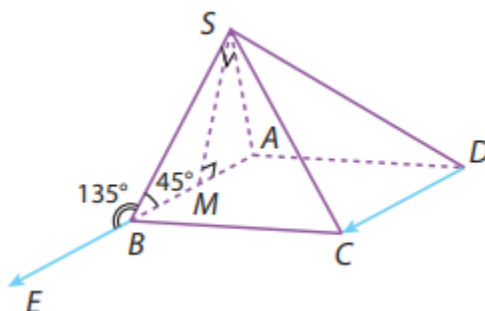
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$.

Trên tia AB lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ (Hình 2.20). Ta có:

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \widehat{EBS} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính: $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$;



Lời giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$. Gọi E là điểm thuộc tia AB sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$. Ta có:

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \widehat{EBS}$$

$\triangle ASB$ vuông cân (tại S) nên $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{EBS} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, hay $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 135^\circ$.

Mặt khác, do $AB = a$ nên $AS = BS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

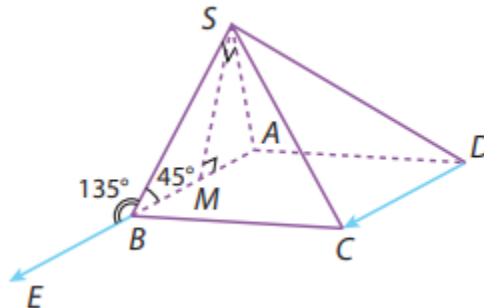
Từ đó ta có:

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} = |\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{BS}| \cdot \cos(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS})$$

$$= a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

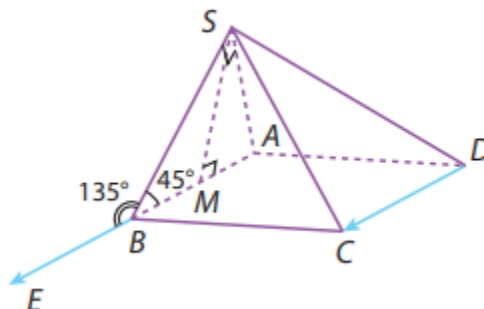
Câu 18: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính: $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$;



Lời giải

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

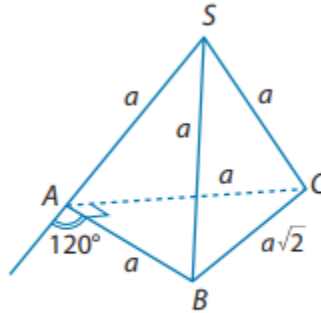
Câu 19: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Hãy tính: $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$.



Lời giải

Tam giác ASB cân tại S và M là trung điểm của cạnh AB nên $SM \perp AB$, hay $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$. Suy ra $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$.

Câu 20: Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$



Hình 2.23

Lời giải

Ta có:

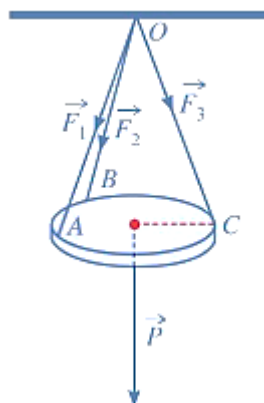
$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} \\ &= \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} \end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra SAB là tam giác đều và ABC là tam giác vuông cân tại A . Từ đó ta tính được:

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2} \text{ và } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

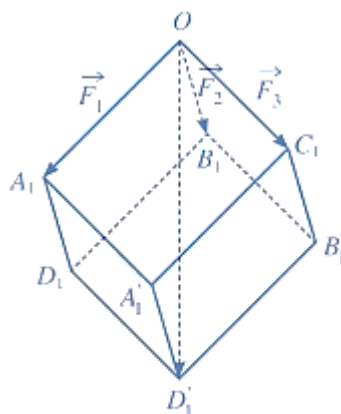
$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ.$$

Câu 21: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15(\text{ N})$ (Hình bên dưới).



Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

Lời giải



Hình 15

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB_1} = \vec{F}_2, \overrightarrow{OC_1} = \vec{F}_3$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 , sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (Hình 15). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có:

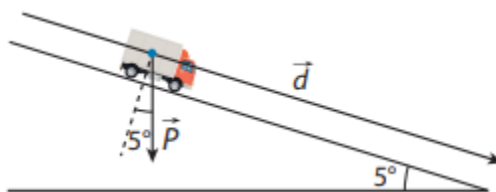
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD'_1}$$

Mặt khác, do các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ đôi một vuông góc và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15(\text{ N})$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1, C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD'_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là: $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD'_1}| = 15\sqrt{3}(\text{ N})$.

Câu 22: Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vector biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức

$\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

**Lời giải**

Ta có $1,5 \text{ tấn} = 1500 \text{ kg}$.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 1500.9,8 = 14700 \text{ (N)}$.

Vectơ $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}| = 30 \text{ (m)}$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là:

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 14700.30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38436 \text{ (J)}$$