

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Điểm $D(x; y; z)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $P = 2x + y - z$.

Lời giải:

Gọi D để $ABCD$ là hình bình hành.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9)$$

$$P = 2x + y - z = 2 \cdot (-4) - 2 - 9 = -19$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$. Tọa độ vec tơ $\vec{a} = (x; 0; 3)$; $\vec{b} = (3; y; 0)$. Tính $P = x^2 + y^2$.

Lời giải:

$$\vec{a} = (2; 0; 3); \vec{b} = (3; 3; 0). P = x^2 + y^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\overrightarrow{ON} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ điểm $M(2; -3; a); N(-1; b; -1)$. Tính $T = 2a - 3b$.

Lời giải:

$$M(2; -3; 4), N(-1; 3; -1). T = 2a - 3b = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; -5; 2)$; $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Vector $\vec{a} = 3\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$. Tính $P = y^2 - z^2$

Lời giải:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}; \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}. P = y^2 - z^2 = (-5)^2 + (-1)^2 = 26$$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $M(1; 0; -2), N(5; 1; -6)$. Tính $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}; \overrightarrow{ON} = x\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$. Tính $P = x^3 + y^3$.

Lời giải:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 2\vec{k}; \overrightarrow{ON} = 5\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}. P = x^3 + y^3 = 0^3 + 5^3 = 125$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 5, $SA = 2$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ điểm $C(x; y; z)$. Tính $P = x^3 + y^3 + z^3$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}$. Suy ra: $C(5; 5; 0)$. $P = x^3 + y^3 + z^3 = 5^3 + 5^3 + 0^3 = 250$

Câu 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tìm tọa độ của $C'(x; 3; z)$. Tính $P = x - z$.

Lời giải:

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \text{ suy ra } C'(2; 3; 4). P = x - z = 2 - 4 = -2.$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Gọi M là trung điểm SC. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Tính $T = x + y - \frac{3}{2}z$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$.

Vì M là trung điểm SC nên:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} + 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}) = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 2\right). T = x + y - \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2 = 0$$

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $|\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}|$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A}$ và $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA}$

Suy ra: $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}| = 0$$

Câu 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ điểm $C'(x; y; z)$. Tính $P = x - 2y + z$.

Lời giải:

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

Trong hình bình hành ABCD: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$

Trong hình bình hành ACC'A': $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\Rightarrow C'(8; 6; 4). P = x - 2y + z = 8 - 2.6 + 4 = 0$$