

CHƯƠNG

II

VECTƠ
TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (3; 2; 5)$ và $\vec{b} = (3m + 2; 3; 6 - n)$. Tính giá trị biểu thức $6m + 2n$ để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{a}, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{3m+2}{3} = \frac{3}{2} = \frac{6-n}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{6} \\ n = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow 6m + 2n = 2.$$

Câu 2: Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; 1; 1)$. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.

Lời giải

Điểm $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-1; y - 2; z - 3)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow M(0; 3; 5)$

Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = 8$.

Câu 3: Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1; -1; 1)$, $B(3; 1; 2)$ và $C(-1; 0; 3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$

$\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{DC} = (-1 - x; -y; 3 - z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2} = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 7 \\ y = 2z - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1; y+1; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (x+1; y; z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2z-8; 2z-5; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (2z-6; 2z-6; z-3) \end{cases}$$

$$\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = \frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)} \cdot \sqrt{9(z-3)^2}} = \frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

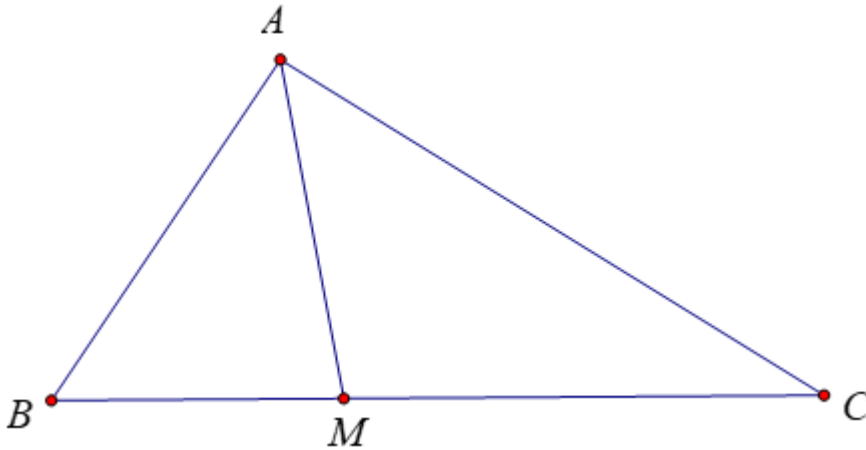
$$\Rightarrow 2(z^2-6z+9) = z^2-6z+10 \Leftrightarrow \begin{cases} z=4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=-3; y=-2 \end{cases}.$$

Vậy $D(1; 2; 4)$ hoặc $D(-3; -2; 2)$.

Có 2 điểm D thỏa điều kiện.

Câu 4: Trong không gian Oxy, cho tam giác ABC, biết $A(2; 0; 0), B(0; 3; 1), C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài AM.

Lời giải



Gọi $M(x; y; z)$

$$\overrightarrow{CM} = (-3-x; 6-y; 4-z)$$

$$\overrightarrow{MB} = (x; y-3; z-1)$$

$$\text{Theo đề ta có, } \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x = 2x \\ 6-y = 2(y-3) \\ 4-z = 2(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 4; 2)$$

$$AM = \sqrt{(-1-2)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

Câu 5: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 - c^2$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MC} = (-2-a; 3-b; 3-c)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$$

$$\text{Tứ giác ABCM là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2-a=1 \\ 3-b=-3 \\ 3-c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=6 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow P=44.$$

Câu 6: Trong không gian Oxy , cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3; 4; 8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.

Lời giải

$$N(x; 0; 0)$$

$$MN = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + 4^2 + 8^2} = 12 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -11 \end{cases}$$

Tổng hoành độ của chúng bằng -6

Câu 7: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (2; 5; -3), \vec{b} = (0; -4; 0)$. Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.

Lời giải

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = -20$$

Câu 8: Trong không gian Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (1; m; 2), \vec{b} = (m+1; 2; 1), \vec{c} = (0; m-2; 2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$.

Lời giải

$$\vec{a} + \vec{b} = (m+2; m+2; 3)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + (m+2)^2 + 9 = (m-2)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -6 \pm \sqrt{3}.$$

Tổng các giá trị của m bằng -12 .

Câu 9: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (1; -1; 0), \vec{b} = (2; 2t-1; 0)$. Xác định giá trị t để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

$$\text{Hai vector } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương thì } \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \\ 0 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = (2t-1)k \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm.)}$$

$$\text{Với } t \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{-1}{2t-1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2t-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $t = -0,5$.

Câu 10: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1; 0)$. Số đo độ của góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$?

Lời giải

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$$