

CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: $F(x)$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 + 1$ và $F(0) = 1$. Tính giá trị của $F(1)$.

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 + 1)dx = x^4 + x + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 1$ nên $C = 1 \Rightarrow F(1) = 3$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị $F(2)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Ta có: $\int f'(x)dx = \int (3x^2 - 2)dx = x^3 - 2x + C$.

Suy ra $f(x) = x^3 - 2x + C$.

Theo bài ra ta có: $f(1) = 0 \Rightarrow -1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 2x + 1$

Khi đó: $F(2) - F(0) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 - 2x + 1)dx = 2$

$\Rightarrow F(2) - 2 = 2 \Rightarrow F(2) = 4$.

Câu 3: Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 6x$. Biết $F(3) = 27$. Tính $F(-3)$.

Lời giải

Trả lời: 9

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + C$. Vì $F(3) = 27$ nên $C = -9$. Khi đó

$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 9 \Rightarrow F(-3) = 9$.

Câu 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$ sao cho $F(1) = 2$. Tính $F(e^{2025})$.

Lời giải

Trả lời: 2027

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C, x \in (0; +\infty)$.

$F(1) = 2 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = \ln x + 2$.

Vậy $F(e^{2025}) = \ln e^{2025} + 2 = 2027$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$ và $f(2) = \frac{9}{2}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(2) = 4 + \ln 2$, khi đó $F(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + 2x + C.$$

$$\text{Theo bài ra } f(2) = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + 4 + C = \frac{9}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + 2x \Rightarrow F(x) = \ln|x| + x^2 + M.$$

$$\text{Theo bài ra } F(2) = 4 + \ln 2 \Rightarrow \ln 2 + 4 + M = 4 + \ln 2 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow F(x) = \ln|x| + x^2 \Rightarrow F(1) = 1.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 4x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(-2) = 5$. Biết rằng $F(1) + 3F(-1) = ae^2 + b$. Khi đó $a + b$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} \int (e^{2x} + 1) dx = \frac{e^{2x}}{2} + x + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ \int (4x + 2) dx = 2x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do } F(-2) = 5 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Do } F(x) \text{ liên tục tại } x = 0 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + 0 + C_1 = C_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{2} + x + \frac{1}{2} & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } F(1) + 3F(-1) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{9}{2}. \text{ Khi đó } a = \frac{1}{2}; b = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Vậy } a + b = 5.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f'(1) = 0$, $f(1) = 1$ và $f(-1) = 2$. Tính giá trị $f(2)$.

Lời giải

Trả lời: 0,5

$$\text{Ta có } f'(x) = ax + \frac{b}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + c. \text{ Khi đó}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0;$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} - b + c = 1;$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} + b + c = 2.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{a}{2} + b + c = 2 \\ a + b = 0 \\ \frac{a}{2} - b + c = 1 \end{cases} \quad \hat{U} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Do đó $f(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{7}{4}$. Vậy $f(2) = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Bạn An ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5$ (m/s). Quãng đường máy bay đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

Lời giải

Trả lời: 966

Quãng đường máy bay đi được sau khoảng thời gian t giây là

$$S(t) = \int (3t^2 + 5) dt = t^3 + 5t + C \Rightarrow S = S(10) - S(4) = 966.$$

Câu 9: Một ô tô đang chạy với vận tốc 36km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3}$ (m/s²). Tính vận tốc của ô tô sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Trả lời: 22

Đổi 36km/h = 10m/s.

Khi ô tô chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3}$ (m/s²)

$$\Rightarrow \text{Vận tốc của ô tô khi đó là } v = \int a(t) dt = \int \left(1 + \frac{t}{3}\right) dt = t + \frac{t^2}{6} + C \text{ (m/s)}$$

$$\text{Khi ô tô bắt đầu tăng tốc thì } v(0) = 10 \Leftrightarrow 0 + \frac{0^2}{6} + C = 10 \Leftrightarrow C = 10.$$

$$\Rightarrow v = t + \frac{t^2}{6} + 10 \text{ (m/s)} \Rightarrow v(6) = 6 + \frac{6^2}{6} + 10 = 22 \text{ (m/s)}$$

Câu 10: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x(3x+2)^2$, biết $F(0) = 1$. Tính $F(1) = 1$

Lời giải

Trả lời: 9,25

$$F(x) = \int f(x) dx = \int x(3x+2)^2 dx = \int (9x^3 + 12x^2 + 4x) dx = \frac{9}{4}x^4 + 4x^3 + 2x^2 + C.$$

$$\text{Có } F(0) = C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{9}{4}x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1. \text{ Nên } F(1) = 9,25$$

Câu 11: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(3x-1)^2$, biết $F(1) = 0$. Tính $F(0)$

Lời giải

Trả lời: -1,75

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)(3x-1)^2 dx = \int (9x^3 + 3x^2 - 5x + 1) dx = \frac{9}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + C.$$

$$\text{Có } F(1) = \frac{7}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{9}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{7}{4} \text{ nên } F(0) = -1,75.$$

Câu 12: Có $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3-2x)(x-2)^2$, biết $F(1) = 0$. Tính $F(3)$ làm tròn đến phần trăm

Lời giải

Trả lời: -3,33

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int (3-4x)(x-2)^2 dx = \int (-4x^3 + 19x^2 - 28x + 12) dx \\ &= -x^4 + \frac{19}{3}x^3 - 14x^2 + 12x + C \end{aligned}$$

$$\text{Có } F(1) = \frac{10}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{10}{3}.$$

$$\text{Vậy } F(3) = -3^4 + \frac{19}{3} \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - \frac{10}{3} = -\frac{10}{3} = -3,33.$$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: -1

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: -0,1

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10} = -0,1.$$

Câu 15: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ và thỏa mãn $F(0) + F(3) = 5$. Giá trị của biểu thức $T = F(-1) + F(11)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 5,92

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{3x-1} dx = \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln(3x-1) + C_1 & \text{ khi } x > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \ln(1-3x) + C_2 & \text{ khi } x < \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Giả thiết $F(0) + F(3) = 5$ nên $C_2 + \frac{1}{3} \ln 8 + C_1 = 5 \Rightarrow C_1 + C_2 = 5 - \ln 2$.

$$\begin{aligned} T &= F(-1) + F(11) = \frac{1}{3} \ln 4 + C_2 + \frac{1}{3} \ln 32 + C_1 = \frac{7}{3} \ln 2 + C_1 + C_2 \\ &= \frac{7}{3} \ln 2 + 5 - \ln 2 = 5 + \frac{4}{3} \ln 2 \\ &\approx 5,92. \end{aligned}$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = -\frac{1}{2}$; $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$. Tính tổng $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025)$.

Lời giải

Trả lời: -0,5

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \\ \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx &= \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C \quad (*). \end{aligned}$$

Cho $x = 0$, từ (*) ta có $C = 2$.

$$\text{Kho đó } -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = -\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)$$

$$\begin{aligned} S &= f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) \\ &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} + \frac{1}{2026} - \frac{1}{2027}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2027}\right) = -\frac{2025}{2 \cdot 2027} \approx -0,5. \end{aligned}$$

Câu 17: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t) = \frac{34}{t^2 + 4t + 4}$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Lời giải

Trả lời: 19,3

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{34}{t^2 + 4t + 4} = \frac{34}{(t+2)^2} \\ \Rightarrow f(t) &= -\frac{34}{t+2} + C \end{aligned}$$

Chọn mốc thời gian là năm 1990. Dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người nên ta có $f(0) = 3$

$$-\frac{34}{2} + C = 3 \Leftrightarrow C = 20$$

$$\text{Do đó } f(t) = -\frac{34}{t+2} + 20$$

Từ năm 1990 đến năm 2035 là 45 năm nên dân số của thị trấn năm 2035 là

$$f(45) = -\frac{34}{47} + 20 = \frac{906}{47} \approx 19,3.$$

Câu 18: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x^3}$ trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = -\frac{3}{5}$. Tính $F(4)$.

Lời giải

Trả lời: 11,8

$$\text{Trên } (0; +\infty), \text{ ta có: } F(x) = \int \sqrt{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$$

$$\text{Theo đề bài: } F(1) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot 1^{\frac{5}{2}} + C = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Vậy } F(4) = \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}} - 1 = \frac{59}{5} = 11,8.$$

Câu 19: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $f(1) = 1$ và $f'(x) \sqrt[3]{x^{-1}} = 1$, với mọi $x > 0$. Tính $4f(8)$?

Lời giải

Trả lời: 49

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^{-1}}} = \frac{1}{x^{-\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4f(8) = 49$$

Câu 20: Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây.

Lời giải

Trả lời: 1,64

Ta có:

$$h'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[3]{t}$$

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{5} \sqrt[3]{t} dt = \frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{5} \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{20} t \sqrt[3]{t} + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t^3\sqrt{t} + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t^3\sqrt{t}$$

$$\text{Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây: } h(6) = \frac{3}{20} \cdot 6^3\sqrt{6} \approx 1,64m$$

Câu 21: Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$. Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Lời giải

Trả lời: 2,73

Ta có

$$h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$$

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + C$$

$$\text{Năm đầu tiên cây cao } 1,5m \text{ nên } h(1) = 1,5 \Leftrightarrow 1,5 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{1} + C \Rightarrow C = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6}$$

$$\text{Cây cao được 3m nên } h(t) = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{t^3} = \frac{17}{8} \Rightarrow t \approx 2,73$$

Câu 22: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

Lời giải

Trả lời: 3200

$$\text{Ta có: } P(t) = \int P'(t) dt = \int k\sqrt{t} dt = \int kt^{\frac{1}{2}} dt = k \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \begin{cases} P(0) = 500 \\ P(1) = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot \frac{2}{3} \cdot 0\sqrt{0} + C = 500 \\ k \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1} + C = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 500 \\ \frac{2}{3}k = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 500 \\ k = 150 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(t) = 100t\sqrt{t} + 500.$$

$$\text{Do đó, số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày là: } P(9) = 100 \cdot 9\sqrt{9} + 500 = 3200.$$

Câu 23: Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = e^{-x}(e^{2x} - 1)$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Khi đó giá trị làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2 của $F(1)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 3,09

Ta có: $\int e^{-x}(e^{2x} - 1)dx = \int (e^x - e^{-x})dx = e^x + e^{-x} + C$.

Mà $F(0) = 2$ nên $C = 0$.

Suy ra $F(1) = e + e^{-1} \approx 3,09$.

Câu 24: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và: $f'(x) = 1 + e^{2x}$, $\forall x, f(0) = 2$. Tìm hàm $f(x)$.
Tính $f(1)$

Lời giải

Trả lời: 3,35

Ta có: $f'(x) = 1 + e^{2x}$.

$\Rightarrow f(x) = \int (1 + e^{2x})dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Mà $f(0) = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{3}{2} \Rightarrow f(1) = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2} \approx 3,35$.

Câu 25: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2024) = 2^n - m (m, n \in N)$. Khi đó $m + n$ bằng

Lời giải

Trả lời: 2025

Ta có: $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$ nên $C = 0$.

Suy ra $T = \frac{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{2024}}{\ln 2} = \frac{1 \cdot \frac{1 - 2^{2025}}{1 - 2}}{\ln 2} = \frac{1 - 2^{2025}}{1 - 2} = 2^{2024} - 1$ hay $m + n = 2024 + 1 = 2025$.

Câu 26: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t) = \frac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20.

Lời giải

Trả lời: 11

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = \int a(t)dt = \int \frac{2}{t+1}dt = 2\ln|t+1| + C$.

Vì vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ nên $v(0) = 5 \Leftrightarrow 2\ln|0+1| + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$.

Nên $v(t) = 2\ln|t+1| + 5$. Vậy vận tốc của vật tại giây thứ 20 là

$v(20) = 2\ln|20+1| + 5 \approx 11(m/s)$.

Câu 27: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Tính $F(0)$.

Lời giải

Trả lời: 1

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 3 \Leftrightarrow 1 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 2.$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow F(0) = -\cos 0 + \sin 0 + 2 = -1 + 0 + 2 = 1$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Trả lời: 8,14

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5\sin x) dx = 2x + 5\cos x + C.$$

$$\text{Mà } f(0) = 10 \text{ nên } 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2x + 5\cos x + 5.$$

$$\text{Do đó: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 5\cos \frac{\pi}{2} + 5 = \pi + 5 \approx 8,14159.$$

Câu 29: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

Lời giải

Trả lời: 1,29

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3} + 6}{6} \approx 1,2886751.$$

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $f'(x) \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Tính $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Trả lời: -8

$$\text{Ta có: } f'(x) \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 x} \Rightarrow f(x) = 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \Rightarrow f(x) = 4 \cot x + C$$

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow C = -4 \Rightarrow f(x) = 4 \cot x - 4$$

$$\text{Ta có: } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \cot \frac{3\pi}{4} - 4 = -8.$$

Câu 31: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15$ (m/s), trong đó t là thời gian tính từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 37,5

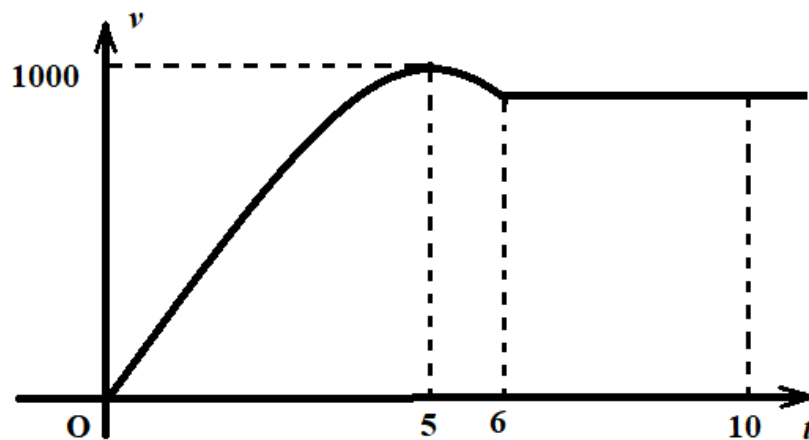
Ta có quãng đường xe đi được là $s(t) = \int v(t) dt = \int (-3t + 15) dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$.

Do $s(0) = 0$ nên $C = 0$.

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra quãng đường đi được là $s(5) = 37,5$ (m).

Câu 32: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3840

Dựa vào đồ thị ta có phương trình vận tốc của ô tô là $v(t) = -40t^2 + 400t$ với $t \in [0; 6]$ và $v = 960$ với $t > 6$. Trong khoảng 6 phút đầu phương trình quãng đường là

$$S(t) = \int (-40t^2 + 400t) dt = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2 + C.$$

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t_0 = 0$ và $S(t_0) = 0$ suy ra $C = 0$ nên phương trình quãng đường là $S(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 200t^2$.

Trong khoảng 6 phút đầu ô tô đi được quãng đường là $S(6) = 4320$ m và 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960 \times 4 = 3840$ m

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320 + 3840 = 8160$ m.

Câu 33: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5m. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi công thức $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần.

Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t . Chiều cao tối đa của cây cà chua là bao nhiêu cm.

Lời giải

Trả lời: 88,3

$$\text{Ta có } h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,1t^3 + t^2) dt = -\frac{t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C.$$

$$\text{Theo đề bài } h(0) = 5 \text{ nên } C = 5, h(t) = -\frac{t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5.$$

Do $v(t) \geq 0 \Leftrightarrow -0,1t^3 + t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 10$ nên thời gian sinh trưởng của cây là 10\$ tuần

Ta có $h'(t) = -\frac{1}{10}t^3 + t^2 \geq 0, \forall t \in [0;10]$ nên $h(t)$ là hàm đồng biến trên $[0;10]$, do đó chiều

$$\text{cao tối đa của cây cà chua là } h(10) = \frac{265}{3} \approx 88,3 \text{ cm}.$$

Câu 34: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $V(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Biết rằng $V'(t) = at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước, sau 5 giây thể tích nước trong bể là $15m^3$, sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $110m^3$. Tính thể tích nước bơm được sau 20 giây.

Lời giải

Trả lời: 840

$$\text{Ta có } V'(t) = at^2 + bt \Rightarrow V(t) = \int at^2 + bt dt = a \frac{t^3}{3} + b \frac{t^2}{2} + c.$$

$$\text{Theo bài ta có hệ } \begin{cases} V(0)=0 \\ V(5)=15 \\ V(10)=110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \frac{0^3}{3} + b \frac{0^2}{2} + c = 0 \\ a \frac{5^3}{3} + b \frac{5^2}{2} + c = 15 \\ a \frac{10^3}{3} + b \frac{10^2}{2} + c = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{10} \\ b = \frac{1}{5} \\ c = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra, } V(20) = \frac{3}{10} \cdot \frac{20^3}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{20^2}{2} = 840m^3.$$

Câu 35: Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là: $I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$, với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Lời giải

Trả lời: 16

$$\text{Ta có: } Q(t) = \int Q'(t) dt = \int (3t^2 - 6t + 5) dt = t^3 - 3t^2 + 5t + C.$$

$$\text{Do } Q(1) = 4 \text{ nên } 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + C = 4 \Rightarrow C = 1$$

$$\text{Như vậy } Q(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1.$$

$$\text{Vậy } Q(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 = 16.$$

Câu 36: Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t . Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì cây cà chua cao bao nhiêu centimét?.

Lời giải

Trả lời: 88,3

Ta có: $h(t) \int (-0,1t^3 + t^2) dt = \int -0,1t^3 dt + \int t^2 dt = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + C.$

Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm nên $h(0) = 5$, suy ra $C = 5$.

Do đó $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5.$

Ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3} + 5$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có: $h'(t) = \frac{-t^3}{10} + t^2 = \frac{t^2}{10}(-t + 10)$, suy ra $h'(t) = 0$ khi t bằng 0 hoặc 10.

Ta thấy $h(0) = 5, h(10) = \frac{265}{3}$. Khi đó, $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{265}{3}$ trên đoạn $[0; 10]$.

Vậy chiều cao tối đa của cây cà chua đó là $\frac{265}{3} \approx 88,3$ (cm).

Câu 37: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15$ (m/s) thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t$ (m/s²). Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Lời giải

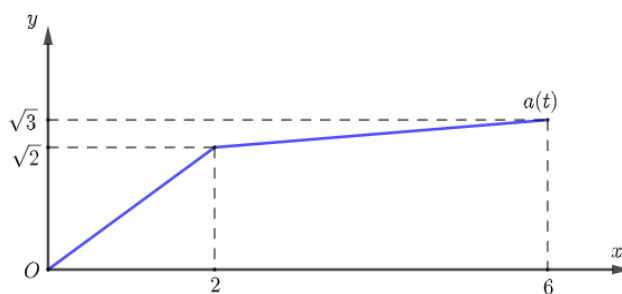
Trả lời: 41

Ta có $a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

Theo giả thiết $v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15.$

Vậy $v(3) = \frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + 15 = 41$ (m/s).

Câu 38: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t = 0$ là $v(0) = 1$ (m/s).



Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 8,71

Từ đồ thị ta có $a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}.$

$$\text{Mà } v(0)=1(m/s) \text{ nên } v(t)=\int a(t)dt=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4}t^2+1 & ,0\leq t\leq 2 \\ \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}t^2+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}t+C & ,2\leq t\leq 6 \end{cases}.$$

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$$\lim_{t\rightarrow 2^-} v(t)=\lim_{x\rightarrow 2^+} v(t)\Leftrightarrow \sqrt{2}+1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}+C\Leftrightarrow C=\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}{2}.$$

Do đó $v(6)=1+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\approx 8,71 (m/s)$.